תרגילים על פרק 4

1. אפיינו את הסדרות הבאות לפי התכונות הבאות (עולה, יורדת, חסומה, מונוטונית אחרי מקום מסוים, מתכנסת)

א. $(-1)^n$

ב. $n(-1)^n$

ג. $\frac{1}{n}(-1)^n$

ד. $n/2^n$

ה. $n^2/2^n$

ו. $\sqrt[n]{n}$

ז. $(1+1/n)^n$

ח. $2\ln n - n$

2. חקרו את ההתכנסות/התבדרות של הטורים הבאים:

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-2}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3\cdot 5^{n+3}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n)$

ה. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

ז. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

ח. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^2+2}$

ט. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n}$

י. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

יא. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}$

יב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

יג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$

יד. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n+1}-1)^n$

3. א. בדקו זהות טריגונומטרית, הוכיחו כי לכל $x\neq 2m\pi$

$$\sum_{k=1}^{n} (\sin kx) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

ב. בעזרת מבחן Dirichlet, הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ מתכנס לכל ערך של המשתנה x.

ג. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$

4. בדקו איזה מהטורים הבאים מתכנסים בצורה מוחלטת, איזה בצורה מותנית ואילו מתבדרים.

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$ ד. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n^2}}{n!}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ ה. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n}$

ג. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$ ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

5. לטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ (כאשר $c_n=\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}$) נקרא המכפלה של הטורים המקוריים. מצאו את הכפלים של הטורים הבאים. לאן הם מתכנסים? (ומתי?)

א. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!, \sum_{n=0}^{\infty} y^n/n!$ ב. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

6. לכל אחד מהאינטגרלים הבאים מצאו תנאים על הפרמטרים שהאינטגרל מתכנס וגם חשבו אותם.

א. $\int_0^1 x^{a-1}(\ln x)^n dx$ (רמז: $\int_0^1 x^{a-1}dx = \frac{1}{a}$)

ב. $\int_0^{\infty} e^{-kx} \sin \alpha x \, dx$

ג. $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos \alpha x}{x} e^{-kx} dx$

ד. $\int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\alpha t}}{t} \cos t$

[רמז: משתמשים בנוסחה: $\frac{d}{dy}\left(\int_a^b f(x,y)dx\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx$]

*7. נגדיר $\Gamma(s)=\int_0^{\infty} x^{s-1}e^{-x}dx$, $B(s,t)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dt$. הוכיחו את הזהויות הבאות

א. $\Gamma(s)\Gamma(t)=B(s,t)\Gamma(s+t)$ ד. $B(s,t)=B(s+1,t)+B(s,t+1)$

ב. $B(s,t)=2\int_0^{\pi/2} \sin^{2s-1}\theta \cos^{2t-1}\theta \, d\theta$ ה. $B(s,s)=2^{1-2s}\int_0^1 y^{-1/2}(1-y)^{s-1}dy = 2^{1-2s}B(\frac{1}{2},s)$

ג. $B(s,t+1)=\frac{t}{s}B(s+1,t)$ ו. $\Gamma(2s)=\Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2})\cdot 2^{2s-1}/\sqrt{\pi}$

(נוסחת ההכפלה של Legendre)