ת3-1

תרגילים על פרק 3

1. אפיינו את המשוואות הדיפרנציאליות הבאות לפי הקריטריונים הבאים
סדר \ מעלה \ ליניאריות \ הומוגניות)

א. $d^2y/dx^2 = \sin 2x - 4y$

ב. $y = xy' + (y')^2/2$

ג. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin(x+y)$

ד. $y'' = xy$

2. מצאו את הפתרון הכללי למשוואות הדיפרנציאליות הרגילות הבאות מסדר ראשון.

א. $dy/dx = \sqrt[3]{y}$

ב. $dy/dx = x/y$

ג. $dy/dx = \frac{y-5}{x^2}$

ד. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{y/x}$

ה. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^3}{x^3 + xy^2}$

ו. $dy/dx = \frac{x+2y}{5x-2y}$

ז. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+5}{5x-2y+1}$

ח. $\frac{dy}{dx} = y\tan x + \cos x$

ט. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3+2xy}{3xy^2+x^2}$

י. $y' + 2xy = x^3$

3. א. מצאו את הפתרון הכללי למשוואה הבאה

$$\frac{dx}{dt} = 2x + t$$

ב. מצאו את הפתרון ל- IVP (משוואה דיפרנציאלית עם תנאי התחלה)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + t \\ x(0) &= A \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

ג. שיטת Euler עם צעד h, למציאת קירוב לפתרון ל-$(*)$, היא דרך למצוא קירובים לערכים $x(nh)$ $(n \in \mathbb{N})$ בעזרת הקירוב

$$x(nh+h) \sim x(nh) + h\dot{x}(nh)$$

מצאו את הפתרון לנוסחת נסיגה

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h(2x_n + nh) \\ x_0 &= A \end{aligned}\right\} \quad (\#)$$

*ד. בדקו כי הקירוב x_n ל- $x(nh)$ שמצאנו. בסעיף הוא כך שכאשר הצעד h שואף לאפס, הקירובים שואפים לפתרון האמיתי ($x(t)$ שמצאנו בסעיף ב).

4. א. כתבו את המשוואה $y = xy' + (y')^2/2$ בצורה $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$.

ב. מצאו את $\int \frac{dv}{\pm\sqrt{v} - v}$

ג. בעזרת ההצבה $y = x^2 u$, מצאו משוואה בת-הפרדה ל- $u = u(x)$ מהמשוואה שמצאתם בסעיף (א), ופתרו אותה.

ד. לפי משפט Picard, לאיזה תנאי התחלה קיים פתרון יחיד בסביבתו?

ה. מצאו את כל הפתרונות של

$$\begin{cases} y = xy' + (y')^2/2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

ו. פתרו את סעיף (ה) עבור תנאי ההתחלה $y(1) = -1/2$.

5. מצאו את הפתרון הכללי למשוואות הבאות ובדקו אותו. לאיזה תנאי התחלה קיים פתרון יחיד בסביבתו לפי משפט Picard? מצאו את הפתרונות עם תנאי ההתחלה $y(0)=0$ או $y(0)=1$ או $y(1)=0$.

א. $\frac{dy}{dx} = |x|$

ב. $\frac{dy}{dx} = |y|$

ג. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$

ד.* $\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$

ה. $\frac{dy}{dx} = y^2$

6. מצאו מערכת של משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון שקולה למשוואות הבאות:

א) $y''' - y\cdot y'' = \sin x \cdot (y')^2$

ב) $\begin{cases} \ddot{x} = 5y - 2x - 3\dot{x}\dot{y} + \sin t \\ \ddot{y} = x - 3y + \dot{y} - \cos t \end{cases}$

ג) $\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -\frac{m}{(x^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{M}{((x-a)^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix}$

7. בדקו כי $y=x^2, e^x$ פתרונות של

$$(x^2-2x)y'' + (2-x^2)y' + (2x-2)y = 0$$

והסקו מכך את הפתרון הכללי. מצאו את הפתרון תחת התנאים הבאים:

א) $y(1)=1,\ y'(1)=3$

ב) $y(0)=1,\ y(1)=1$

ג) $y(0)=1,\ y'(0)=2$

8. מצאו משוואה דיפרנציאלית רגילה ליניארית והומוגנית עם פתרונות כנתון

א) $x(t)=t^2,\ \sin t$

ב) $y(x)=x,\ 1/x$

ג) $y(x)=e^{2x},\ xe^{2x}$

ד) $y(x)=e^{2x},\ x^2e^{2x}$

9. מצאו את ה- Wronskian של הרשימות הבאות:

א) $x,\ e^x,\ x^2$

ב) $x,\ e^x,\ x-e^x$

10. מצאו פתרונות כלליים ככל הניתן תחת התנאים הנתונים:

א) $y(0)=y'(0)=3,\quad y''-4y'-5y=0$

ב) $y''+4y'+8y=0$

ג) $y(0)=y(\pi)=1,\quad y''=4y$

ד) $x^2y''+xy'-4y=0$

ה) $x^2y''+xy'+4y=0$

ו) $y(1)=2,\ y'(1)=0,\ x^2y''+xy'-4y=0$

ז) $y(1)=1,\ y'(1)=-6\ x^2y''+xy'+4y=0$

ח) $y(0)=y(\pi)=1,\quad y''+4y=0$

11. מצאו פתרון כללי דרך הורדת סדר המשוואה

א) $y''-2y'\tan x-y=0$, $y_0=\sec x$

ב) $y''-y'\tan x-y\sec^2 x=0$, $y_0=\sec x$

ג) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$, $y_0=x$

ד) $xy''-y'+4x^3y=0$, $y_0=\sin(x^2)$

ה) $y''+a(xy'+y)=0$, $y_0=e^{-ax^2/2}$ [הפתרון צריך להשאר עם $\int$]

12. הוכיחו ש- y_1, y_2 פתרונות של המד"ר הלינארית $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ אזי ה- Wronskian $W(x)=W(y_1(x),y_2(x))$ מקיים את המשוואה

$$W'=-p(x)\cdot W$$

13. תהי (1) המשוואה דיפרנציאלית עם מקדמים קבועים:

$$a_ny^{(n)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0 \quad ①$$

ויהי הפולינום האופייני שלה $F(\lambda)=a_n\lambda^n+\cdots+a_1\lambda+a_0$.

א) הוכיחו שאם $\lambda=\lambda_1$ שורש כפול של f (כלומר $F(\lambda_1)=F'(\lambda_1)=0$) אזי $y=x\cdot e^{\lambda_1 x}$ פתרון של ①, דרך הצבה ישירה ב- ①.

*ב) הוכיחו שתחת ההצבה $y(x)=e^{\lambda_1 x}u(x)$, המשוואה ① שקולה למשוואה הבאה לפונקציה u:

$$\sum_{r=0}^{n}\frac{1}{r!}F^{(r)}(\lambda_1)\cdot u^{(r)}=0 \quad ②$$

כלומר מד"ר לינארית עם מקדמים קבועים $\frac{1}{r!}F^{(r)}(\lambda_1)$.

*ג) כמסקנה מסעיף ב), הוכיחו שאם $\lambda=\lambda_1$ שורש של f עם ריבוי s (כלומר $F^{(r)}(\lambda_1)=0$ לכל $r=0,1,\ldots,s-1$) אזי $u=1,x,\ldots,x^{s-1}$ פתרונות של ② ולכן $y=e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x},\ldots,x^{s-1}e^{\lambda_1 x}$ פתרונות של ①.

14. א) הוכיחו שתחת החלפת משתנים $x=e^t$, המד"ר ① ל- $y=y(x)$:

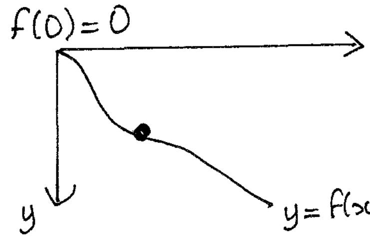
$$a_2x^2y''+a_1xy'+a_0y=0 \quad ①$$

שקולה למד"ר ל- $y=y(t)$:

$$a_2\ddot{y}+(a_1-a_2)\dot{y}+a_0y=0 \quad ②$$

ב) בדקו כי המשוואות האופייניות של ①,② זהות, ומכאן שפתרון $y=x^{\lambda}$ של ①, שקול לפתרון $y=e^{\lambda t}$ של ② וגם $y=x^{\lambda}(\ln x)^r$ של ①, שקול לפתרון $y=t^re^{\lambda t}$ של ②.

15. בעיית הברכיסטוכרון
(Brachistochrone problem)



*א) נניח שתנועת חלקיק מוגבלת למסלול מהצורה $y=f(x)$ על פני מישור מאונך
תחת הנחה שהשפעת החיכוך זניחה, הכוח ממשוואה
התנועה של הקואורדינטה - x - ית $x(t)$
כפונקציה של הזמן t

$$m\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x\\ f(x)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ f'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ mg\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ f'(x)\end{pmatrix}$$

*ב) הוכיחו שהמשוואה בא) שקולה ל- $\ddot{x}(1+(f')^2)+f'f''(\dot{x})^2=gf'$
ושהפתרונות מקיימים $\frac{1}{2}(\dot{x})^2(1+(f')^2)-gf(x)=$ קבוע

ג) הגוף מתחיל בנקודה $x=0$ בזמן $t=0$ עם מהירות 0, $[x(0)=\dot{x}(0)=0]$
אזי $\dot{x}=\sqrt{\left(\frac{2gf}{1+(f')^2}\right)}$ ומכך הוכיחו שהזמן הדרוש
לרדת מ- $(0,0)$ לנקודה $(x_0,f(x_0))$ הוא

$$T=\int_0^{x_0}\sqrt{\left(\frac{1+(f')^2}{2gf}\right)}\,dx$$

ד) בעזרת הנוסחה בסעיף ג, מצאו את משך התנועה מ- $(0,0)$
ל- (x_0,y_0) על מסלול ישר.

*ה) משוואות Euler-Lagrange אומרות שלפונקציה $L(y_1,y_2)$ של שני
משתנים, התנאי שפונקציה $y(x)$ כך ש- $y(x_0)=y_0$, $y(0)=0$ היא כך
ש- $\int_0^{x_0}L(y(x),y'(x))dx$ מינימלי בתוך פונקציות y (עם $y(0),y(x_0)$ נתון)
הוא ש- $y(x)$ מקיימת את המשוואה

$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)$$

השתמשו במשוואות Euler-Lagrange לפונקציה $L(y_1,y_2)=\sqrt{\left(\frac{1+(y_2)^2}{y_1}\right)}$
לקבלת התנאי על המסלול $f(x)$ המביא T מינימאלי ונבדקו
שהוא שקול לתנאי $-\frac{1}{2}(1+(f')^2)=ff''$

ו) הוכיחו שפתרונות המשוואה מסעיף ה מקיימים את המשוואה
$f'=\sqrt{(k^2/f-1)}\iff f\cdot(1+(f')^2)=$ קבוע, k^2

ז) דרך ההצבה $f=k^2\sin^2\frac{\theta}{2}$ או בדרך אחרת, הוכיחו שהמסלול
שבו משך זמן התנועה בין שתי נקודות הוא מינימלי הוא בצורת
cycloid : $x=\frac{k^2}{2}(\theta-\sin\theta)$, $y=\frac{k^2}{2}(1-\cos\theta)$ (θ פרמטר)
ומצאו את הקשר בין θ ובין הזמן.

16. בדקו שתחת הצבה $x=e^t$, המשוואה $\dot{\underline{y}}=\underline{A}\underline{y}$ שקולה למשוואה $\frac{d\underline{y}}{dx}=\frac{1}{x}\underline{A}\underline{y}$.

17. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה $\dot{\underline{x}}=\underline{A}\underline{x}$ ושרטטו את התמונה של הפתרונות במישור (x_1,x_2) במקרים הבאים:

א) $\underline{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$

ב) $\underline{A}=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$

ג) $\underline{A}=\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}$

ד) $\underline{A}=\begin{pmatrix}2&-5/4\\5&-2\end{pmatrix}$

ה) $\underline{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}$

ו) $\underline{A}=\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix}$

ז) $\underline{A}=e^t\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$

18. מצאו מטריצה בסיסית למשוואות בשאלה (17) ומצאו את הפתרון תחת תנאי התחלה הבאים:

א) $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

ב) $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$

ג) $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

ד) $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$

ה) $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$

ו) $\underline{x}(0)=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$

ז) $\underline{x}(1)=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$

19. א) הוכיחו למטריצות $\underline{A}(t),\underline{B}(t)$, $\frac{d}{dt}(\underline{A}(t)*\underline{B}(t))=\dot{\underline{A}}*\underline{B}+\underline{A}*\dot{\underline{B}}$

ב) אם $\underline{A}$ פונקציה מטריצית של t כך ש- $\dot{\underline{A}}\underline{A}=\underline{A}\dot{\underline{A}}$, הוכיחו כי
$$\frac{d}{dt}(\underline{A}^n)=n\dot{\underline{A}}\underline{A}^{n-1}$$

ג) בדקו כי למטריצה $\underline{A}=\begin{pmatrix}1&t\\0&t\end{pmatrix}$, $\frac{d}{dt}(\underline{A}^2)\neq 2\dot{\underline{A}}\underline{A}$

ד) למטריצה הפיכה $\underline{A}(t)$ הוכיחו כי
$\frac{d}{dt}(\underline{A}^{-1})=-\underline{A}^{-1}\dot{\underline{A}}\underline{A}^{-1}$ (רמז סעיף (א))

20*. האקספוננט $\exp(\underline{A})$ של מטריצה $n\times n$ $\underline{A}$ מוגדר ע"י
$$\exp(\underline{A})=\lim_{n\to\infty}(\underline{I}+\tfrac{1}{n}\underline{A})^n$$

א) רמז שאלה (19ב), הוכיחו כי $\frac{d}{dt}(\exp(t\underline{A}))=\underline{A}\exp(t\underline{A})$
(כלומר $\exp(t\underline{A})$ מטריצה בסיסית למערכת $\dot{\underline{x}}=\underline{A}\underline{x}$).

ב) בדקו כי $\exp(\underline{P}\underline{D}\underline{P}^{-1})=\underline{P}\exp(\underline{D})\underline{P}^{-1}$

ג) למטריצה אלכסונית $\underline{D}=\begin{pmatrix}a_1&&\\&\ddots&\\&&a_n\end{pmatrix}$, בדקו כי $\exp(\underline{D})=\begin{pmatrix}e^{a_1}&&\\&\ddots&\\&&e^{a_n}\end{pmatrix}$

המשך...

ד.) דרך סעיפים ב, ג, מצאו את $\exp(t\underline{A})$ למטריצה $\underline{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-2&4\end{pmatrix}$

[כמו דף 3-16, דוגמה 1 במונחי]

ה.) בדקו כי $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a+b\\0&1\end{pmatrix}$ ולכן $\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&na\\0&1\end{pmatrix}$.

מצאו נוסחה ל- $\begin{pmatrix}c&a\\0&c\end{pmatrix}^n$ ולכן בדקו כי $\exp\left(t\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}e^{t\lambda}&te^{t\lambda}\\0&e^{t\lambda}\end{pmatrix}$

ו.) דרך סעיפים ב, ה, מצאו את $\exp(t\underline{A})$ למטריצה $\underline{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&3\end{pmatrix}$

[כמו דף 3-16, דוגמה 2 במונחי]

<u>הערה</u> גם אפשר לקבל את אותן תשובות דרך טור Taylor:

$$\exp(\underline{A})=\underline{I}+\underline{A}+\frac{1}{2!}\underline{A}^2+\dots+\frac{1}{n!}\underline{A}^n+\dots$$

<u>21.</u> נניח ש- $\underline{\Phi}(t)$ מטריצה בסיסית למערכת $\underline{\dot{x}}=\underline{A}(t)\underline{x}$ (כ"א $\underline{\dot{\Phi}}=\underline{A}\,\underline{\Phi}$)

א) הוכיחו ש $\underline{X}=\underline{\Phi}^{-1}$ מתקיימת $\underline{\dot{X}}=-\underline{X}\,\underline{A}$

ב) הוכיחו שאם $\underline{\Psi}$ גם מטריצה בסיסית ל- $\underline{\dot{x}}=\underline{A}(t)\underline{x}$ (כ"א $\underline{\dot{\Psi}}=\underline{A}\,\underline{\Psi}$) אז $\underline{B}=\underline{\Phi}^{-1}\underline{\Psi}$ מטריצה קבועה, ולכן כל מטריצה בסיסית לאותה מערכת אפשר לכתוב בצורה $\underline{\Phi}(t)\underline{B}$ ($\underline{B}$ קבועה)

<u>22.</u> נקח את המשוואה $\frac{d^2x}{dt^2}+2x-x^2-x^3=0$ ①

א) כתבו מערכת משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון שקולה למשוואה ①

ב) מצאו את הנקודות שיווי משקל ואת מיניהן.

ג) סכמו את התמונה של הפתרונות של ① במישור פזה.
(אפשר במקרה למצוא את התמונות בצורה סגורה)

<u>23.</u> למערכות הבאות מצאו את הנקודות הקריטיות, סוגיהן ויציבותן.

א.) $\dot{x}=1-xy$, $\dot{y}=x-y^3$

ב.) $\dot{x}=x-x^2-xy$, $\dot{y}=3y-xy-2y^2$

ג.) $\dot{x}=x$, $\dot{y}=x^3-2y$

ד.) $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-\sin x-cy$

למקרה ג, מצאו את כל הפתרונות.

24. מצאו את כל הפתרונות למשוואות הבאות:

א) $\ddot y-\cancel{4\dot y}+5y=e^t$

ב) $\ddot y-5\dot y+4y=e^t$

ג) $\ddot y+2\dot y-8y=te^{2t}+t^2$

ד) $\ddot y-2\dot y+5y=te^t\cos 2t$

ה) $\ddot y+2\dot y-8y=te^{2t}+t^2$, $y(0)=-\frac{3}{32}$ $y'(0)=\frac{1}{288}$

ו) $\dot{\underline{x}}=\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}e^t\\t\end{pmatrix}$

ז) $\dot{\underline{x}}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}\cos t\\-\sin t\end{pmatrix}$

ח) $\dot{\underline{x}}=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}\csc t\\\sec t\end{pmatrix}$

ט) $\dot{\underline{x}}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&3\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}e^{2t}\\t\end{pmatrix}$

י) $t\dot{\underline{x}}=\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}t\\1-t^2\end{pmatrix}$

25. א) נניח ש- $\{y_1,y_2\}$ מערכת בסיסית של פתרונות ל- $y''+a(x)y'+b(x)y=0$.
דרך שיטת וריאציה של פרמטרים בדקו שפתרון פרטי ל-

$$y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$$

הוא $y(x)=\int_{x_0}^{x}K(x,u)f(u)du$ כאשר $K(x,u)=\frac{y_1(u)y_2(x)-y_1(x)y_2(u)}{W(u)}$

כאשר W ה-Wronskian של y_1,y_2. ($K(x,u)$ נקראת פונקצית Green)

ב) מצאו פתרון פרטי ל- $-xy''+2(x-1)y'+(2-x)y=f(x)$

26*. א. ממשוואות התנועה למטוטלת עם מסה m, אורך l (ignoring the mass of the string and air resistance) (בהתעלם ממסת החוט והתנגדות האוויר)
קבלו את המשוואות

$$\begin{cases}\ddot\theta=-\frac{g}{l}\sin\theta\\ T=mg\cos\theta+ml(\dot\theta)^2\end{cases}$$

לזווית θ כפונקציה של t, כאשר T, המתח בחוט, חיובי.

ב. הוכחו שלפתרון עם תנאי התחלה $\theta(0)=0,\ \dot\theta(0)=\omega$, $(\dot\theta)^2-\frac{2g}{l}\cos\theta=(\omega^2-\frac{2g}{l})$.

ג. מצאו נוסחה למתח T כפונקציה של θ ואז מצאו לאילו ערכים של ω, החוט תמיד במתח.

תליית שרשרת כבדה

27. (hanging heavy chain) נניח ששרשרת כבדה תלויה בקצותיה תחת כוח הכובד, בצורה של גרף הפונקציה $y=y(x)$. מטרת השאלה היא למצוא את הפונקציה $y=y(x)$. נסמן את המתח בנקודה x ב- $T(x)$, את הצפיפות ב- ρ, ואת הזווית בין הקו המשיק לשרשרת וציר x ב- $\theta(x)$.

*א. הוכיחו ממשוואות התנועה ש- $T(x)\cos\theta(x)$ לא תלוי ב- x (נסמן ב-T) וגם ש- $y'' = \rho g/T \sqrt{(1+(y')^2)}$

ב. פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית בסעיף (א) לקבלת התכונות

$$\frac{\rho g y}{T} = \cosh\left(\frac{\rho g x}{T} + A\right) + B \quad (A,B \text{ קבועים})$$

ג. העזרו בסעיף (ב), למצוא את T ולמציאת "depth of hanging" $\max|y(x)-y(0)|$ עבור שרשרת באורך L ומסה M אשר קצותיה תלויים בגובה זהה והמרחק ביניהם הוא $2a$.

שרשרת כבדה במחליקה משולחן

28. (heavy chain sliding off table) נניח ששרשרת מחליקה בצורה ישרה משולחן חלק. נסמן את אורך חלק השרשרת שהחליק עד לזמן t ב- $x(t)$, ($x(0)=0$). נסמן את המתח בזמן t ומרחק y מהקצה התחתון ב- $T(y,t)$, ואת צפיפות השרשרת במרחק y מהקצה התחתון ב- $\rho(y)$.

*א. הסבירו ממשוואות התנועה של חלק קטן $[y,y+\delta y]$ של השרשרת:

$$\partial T/\partial y = (g-\ddot{x})\rho(y) \qquad 0<y<x$$
$$\partial T/\partial y = -\rho(y)\ddot{x} \qquad x<y<L$$
$$T(0,t) = T(L,t) = 0$$

ואת השוויון $M\ddot{x} = g(\int_0^x \rho\, dy)$ כאשר $M=\int_0^L \rho(y)dy$ המסה של השרשרת.

ב. במקרה ש- $\rho(y)=\rho$ קבוע, מצא את הפתרון $x(t)$

ג. מצאו את משך הזמן הנדרש להחלקת כל השרשרת מהשולחן כאשר בזמן $t=0$ כל השרשרת על השולחן אבל $\dot{x}(0)=v$.

ד. פתרו את סעיף (ג) עבור המקרה בו בזמן $t=0$ חלק באורך a מן השרשרת כבר החליק מן השולחן ואילו המהירות בזמן זה היא 0.

29*. השתמשו ב-MATLAB לצפייה בהתנהגות הפתרונות ל-

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = -\frac{m}{(x^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \frac{M}{((x-a)^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x-a\\y\end{pmatrix}$$

(כוח הכובד ממסה m ב- $(0,0)$ ומסה M ב- $(a,0)$).