תרגילים על פרק 1

1. הוכחו כי $(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v} = \underline{\nabla}\left(\frac{|\underline{v}|^2}{2}\right) + (\underline{\nabla}\wedge\underline{v})\wedge\underline{v}$.
[כאשר $\underline{v}$ שדה מהירות של נוזל, $\underline{v}(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})$ נקרא convective acceleration]

2. הוכחו כי $\underline{\nabla}\wedge(\underline{A}\wedge\underline{B}) = \underline{A}(\underline{\nabla}\cdot\underline{B}) - \underline{B}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) + (\underline{B}\cdot\underline{\nabla})\underline{A} - (\underline{A}\cdot\underline{\nabla})\underline{B}$
והעזרו בזהות זו למציאת $\underline{\nabla}\wedge(\underline{\omega}\wedge\underline{r})$ כאשר $\underline{\omega}$ וקטור קבוע.

3. א) מצאו את $(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v}$ כאשר $\underline{v}=\underline{\omega}\wedge\underline{r}$ ($\underline{\omega}$ וקטור קבוע)
ב) מצאו את $\underline{\nabla}\wedge(f(r)\,\hat{\underline{k}}\wedge\underline{r})$.

4. בקואורדינטות כדוריות $\underline{r}=\begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$ נגדיר וקטורי יחידה $\hat{\underline{r}},\hat{\underline{\theta}},\hat{\underline{\phi}}$
כך ש- $\hat{\underline{\phi}} \parallel \frac{\partial \underline{r}}{\partial\phi}$, $\hat{\underline{\theta}}\parallel \frac{\partial \underline{r}}{\partial\theta}$, $\hat{\underline{r}}\parallel \frac{\partial \underline{r}}{\partial r}$.

א. מצאו את $\hat{\underline{\phi}},\hat{\underline{\theta}},\hat{\underline{r}}$ ובדקו שהם נצבים אחד לשני

ב. מצאו נוסחאות לאופרטורים $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\phi}$ בעזרת $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}$ ובאמצעות ביצוע פעולות על המשוואות שקיבלתם מצאו נוסחאות ל-$\underline{\nabla}$, $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$ בעזרת $\frac{\partial}{\partial\phi},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial r}$.

ג. בדקו כי $\partial\hat{\underline{r}}/\partial r = \underline{0}$, $\partial\hat{\underline{\theta}}/\partial\theta = -\hat{\underline{r}}$, $\partial\hat{\underline{\phi}}/\partial\phi = -\sin\theta\,\hat{\underline{r}} - \cos\theta\,\hat{\underline{\theta}}$

ד. בעזרת (ג), הוכחו שלשדה וקטורי $\underline{f} = f_r\hat{\underline{r}} + f_\theta\hat{\underline{\theta}} + f_\phi\hat{\underline{\phi}}$,

$$(\hat{\underline{r}}\, \partial/\partial r)\cdot\underline{f} = \partial f_r/\partial r$$
$$(\hat{\underline{\theta}}\, \partial/\partial\theta)\cdot\underline{f} = \partial f_\theta/\partial\theta + f_r$$
$$(\hat{\underline{\phi}}\, \partial/\partial\phi)\cdot\underline{f} = \partial f_\phi/\partial\phi + \sin\theta\cdot f_r + \cos\theta\cdot f_\theta$$

ולכן $\underline{\nabla}\cdot\underline{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot f_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi}$

ה. בעזרת סעיפים (ב), (ד) מצאו נוסחה ל- $\underline{\nabla}^2 V$ בקואורדינטות כדוריות.

5. בקואורדינטות גליליות $\underline{r}=\begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$, נגדיר וקטורי יחידה $\hat{\underline{z}},\hat{\underline{\theta}},\hat{\underline{\rho}}$ כך ש-
$\hat{\underline{\rho}}\parallel\frac{\partial \underline{r}}{\partial\rho}$, $\hat{\underline{\theta}}\parallel\frac{\partial \underline{r}}{\partial\theta}$, $\hat{\underline{z}}\parallel \frac{\partial \underline{r}}{\partial z}$

א. מצאו את $\hat{\underline{z}},\hat{\underline{\theta}},\hat{\underline{\rho}}$ ובדקו שהם נצבים אחד לשני.

ב. מצאו נוסחאות לאופרטורים $\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial\theta},\frac{\partial}{\partial\rho}$ בעזרת $\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}$ והסיקו מהן נוסחה ל-$\underline{\nabla}$ בקואורד' גליליות

ג. בדקו כי $\partial\hat{\underline{\rho}}/\partial\rho = \underline{0} = \partial\hat{\underline{z}}/\partial z$, $\partial\hat{\underline{\theta}}/\partial\theta = -\hat{\underline{\rho}}$

ד. בעזרת (ג), הוכחו שלשדה וקטורי $\underline{f}=f_\rho\hat{\underline{\rho}}+f_\theta\hat{\underline{\theta}}+f_z\hat{\underline{z}}$,

$$(\hat{\underline{\rho}}\, \partial/\partial\rho)\cdot\underline{f} = \partial f_\rho/\partial\rho,\quad (\hat{\underline{\theta}}\, \partial/\partial\theta)\cdot\underline{f} = \partial f_\theta/\partial\theta + f_\rho,\quad (\hat{\underline{z}}\, \partial/\partial z)\cdot\underline{f} = \partial f_z/\partial z$$

והסיקו מכך נוסחאות ל- $\underline{\nabla}\cdot\underline{f}$ $\underline{\nabla}^2 V$ בקואורדינטות גליליות.

*ה. מצאו נוסחה ל- $\underline{\nabla}\wedge\underline{f}$ לפי בסיס $\{\hat{\underline{z}},\hat{\underline{\rho}},\hat{\underline{\theta}}\}$ בקואורדינטות גליליות.

6. נתון גוף קשיח בצורה של כדור ברדיוס a, מסה M עם צפיפות $\rho \propto (a-r)$ כאשר r המרחק ממרכז הכדור $\underline{O}$.

א. מצאו נוסחה לצפיפות ρ כפונקציה של r.

ב. בעזרת משפט Gauss, מצאו את שדה הכובד $\underline{F}$.

ג. מצאו פוטנציאל סקלרי V כך ש- $\underline{F}=-\underline{\nabla}V$.

7. מצאו פוטנציאל וקטורי לשדה מגנטי $\underline{B}=\begin{pmatrix}2\cos\theta/r^3\\ \sin\theta/r^3\\ 0\end{pmatrix}$ של magnetic dipole
דו-קוטב מגנטי (דיפול)
כאשר $\underline{B}$ נתון לפי בסיס $\{\underline{\hat{r}},\underline{\hat{\theta}},\underline{\hat{\phi}}\}$ בקואורדינטות כדוריות. $(\underline{B}=\underline{\nabla}\wedge\underline{A})$

8. מצאו פוטנציאל סקלרי לשדה חשמלי $\underline{E}=\begin{pmatrix}2\cos\theta/r^3\\ \sin\theta/r^3\\ 0\end{pmatrix}$ של electric dipole
דו-קוטב חשמלי
כאשר $\underline{E}$ נתון לפי בסיס $\{\underline{\hat{r}},\underline{\hat{\theta}},\underline{\hat{\phi}}\}$ בקואורדינטות כדוריות $(\underline{E}=-\underline{\nabla}V)$

9. נניח ש- ρ הצפיפות, $\underline{v}$ המהירות הוקטורית של נוזל, כפונקציות של z,y,x,t. הסבירו מדוע $\underline{v}\cdot\underline{\nabla}\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}$ הוא קצב שינוי הצפיפות ביחס לזמן, בנקודה הנעה עם הנוזל.

10. פשטו את

א. $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ikl}$

ב. $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\varepsilon_{mni}$

ג. $\varepsilon_{ijk}a_ia_k$

ד. $\varepsilon_{ijk}\delta_{jk}$

11.* א. הוכיחו שהטנזור δ נשמר תחת החלפת בסיס.

ב. הוכיחו שהטנזור ε נשמר תחת החלפת בסיס $\{\underline{e}^1,\underline{e}^2,\underline{e}^3\}$ ל- $\{\underline{f}^1,\underline{f}^2,\underline{f}^3\}$ אם הבסיס החדש אורתונורמלי עם אוריינטציה חיובית.

12. א. פשטו את $\underline{\nabla}\cdot(\phi\underline{\nabla}\phi)$.

ב. נניח ש- ϕ פונקציה של תחום R עם שפה Σ, כך ש- $\phi=0$ בשפה וגם $\underline{\nabla}^2\phi=0$ לכל נקודה ב- R. דרך הנוסחה שמצאתם בסעיף א ומשפט Gauss לאינטגרל $\iiint_R \underline{\nabla}\cdot(\phi\underline{\nabla}\phi)dV$, הוכיחו ש- $\iiint_R \|\underline{\nabla}\phi\|^2 dV=0$ ולכן ש- $\phi=0$ בכל נקודה ב- R.

המשך של (12):

ג. הסבירו בעזרת (ב) שאם ϕ, ψ שתי פונקציות הרמוניות $(\nabla^2\phi=0=\nabla^2\psi)$ שוות בשפה $\Sigma=\partial R$, אז $\phi=\psi$ בכל נקודה ב- R.

13. א. בדקו כי $\oiint_\Sigma \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi$ לכל ספירה Σ שמרכזה ב- $\underline{0}$.

ב. בדקו כי $\nabla\cdot(\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3) = 0$.

ג. בעזרת (א),(ב) ומשפט Gauss, הסבירו מדוע לכל משטח סגור Σ
(שפה של תחום ב- $\mathbb{R}^3$)

$$\oiint_\Sigma \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|^3}\cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} 0 & \text{אם } \underline{0} \text{ לא בפנים של } \Sigma, \\ 4\pi & \text{אם } \underline{0} \text{ בפנים של } \Sigma, \end{cases}$$

14. א. מצאו את הגרדיינט של $\phi(x,y)=\tan^{-1}(y/x)$ וכתבו את התחום בהגדרה של הפונקציה ϕ ב- $\mathbb{R}^2$.

ב. בעזרת משפט Green הוכיחו כי $\int_{\partial\Sigma}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}=0$ לכל תחום Σ לא כולל $\underline{0}$.

ג. בעזרת סעיף (ב), מצאו את $\int_{\partial\Sigma}\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$ כאשר Σ תחום כולל $\underline{0}$.

רמז: כדיון בשאלה (13 ג,ו).

ד. בעזרת סעיף (א), מצאו משמעות גאומטרית לערך של $\oint_C \frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$ וכתבו את הערך במקרים הבאים.