# פתרונות לתרגילים של פרק 6

1. הערה: תחת מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$,
פונקציות זוגיות ואי-זוגיות נצבות. לכן $1, x^2 \perp x, x^3$

Gramm-Schmidt: $e_1 = 1,\ e_2 = x \quad (1 \perp x)$

$$e_3 = x^2 - P_{\langle 1,x\rangle}(x^2)$$

$$= x^2 - \left(\frac{\langle x^2,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\cdot 1 + \underbrace{\frac{\langle x^3 x\rangle}{\langle x,x\rangle}}_{=0}\cdot x\right)$$

$$= x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}{\int_{-1}^{1} 1\,dx}\cdot 1$$

$$= x^2 - 1/3$$

$$e_4 = x^3 - P_{\langle 1,x,x^2\rangle}(x^3)$$

$$= x^3 - P_{\langle x\rangle}(x^3) \qquad (1, x^2 \perp x^3)$$

$$= x^3 - \frac{\langle x^3, x\rangle}{\langle x,x\rangle}\, x$$

$$= x^3 - \frac{\int_{-1}^{1} x^4\,dx}{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}\cdot x \quad = x^3 - 3/5\, x$$

קיבלנו בסיס אורתוגונלי $\{1, x, x^2 - 1/3, x^3 - 3x/5\}$

$$\langle 1,1\rangle = \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2$$

$$\langle x,x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2/3$$

$$\langle x^2-\tfrac{1}{3}, x^2-\tfrac{1}{3}\rangle = \int_{-1}^{1}(x^2-\tfrac13)^2dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\right]_{-1}^{1} = 2/5 - 4/9 + 2/9 = 8/45$$

$$\langle x^3-\tfrac{3x}{5}, x^3-\tfrac{3x}{5}\rangle = \int_{-1}^{1}(x^3-\tfrac{3x}{5})^2dx = \left[\frac{x^7}{7} - \frac{6}{25}x^5 + \frac{3}{25}x^3\right]_{-1}^{1} = 2/7 - 12/25 + 6/25 = \frac{8}{7\times 25}$$

בסיס אורתונורמלי:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt2},\ \sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot x,\ \sqrt{\tfrac{45}{8}}\,(x^2 - \tfrac13),\ 5\sqrt{\tfrac{7}{8}}\,(x^3 - 3x/5)\right\}$$

$$= \sqrt{\tfrac{5}{8}}\,(3x^2-1) \qquad = \sqrt{\tfrac{7}{8}}\,(5x^3 - 3x)$$

**2.**

$$S^f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx \, dx$$

$$n \neq 0: \quad \pi a_n = \left[x^2 \cdot \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x \cdot \frac{\sin nx}{n} \, dx$$

$$= -\tfrac{2}{n} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx$$

$$= -\tfrac{2}{n} \left( \left[x \cdot \frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{-\cos nx}{n} \, dx \right)$$

$$= -\tfrac{2}{n} \left( 2\pi \cdot -\frac{1}{n} \qquad + \frac{1}{n} \left[ \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{2\pi} \right)$$

$$= 4\pi/n^2$$

$$n = 0: \quad \pi a_0 = \int_0^{2\pi} x^2 \, dx = \left[ x^3/3 \right]_0^{2\pi} = 8\pi^3/3$$

$$n \neq 0: \quad \pi b_n = \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx$$

$$= \left[ -x^2/n \cos nx \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x \cdot -1/n \cos nx \, dx$$

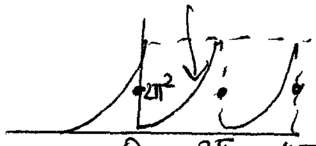
$$= -4\pi^2/n + 2/n \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx$$

$$= -4\pi^2/n + 2/n \left( \left[ x \cdot \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n} \, dx \right)$$

$$= -4\pi^2/n - 2/n^2 \left[ -\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{2\pi} = -4\pi^2/n$$

טור פורייה של $x^2$ הוא:

$$\underbrace{\frac{4\pi^2}{3}}_{a_0/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big( \underbrace{4/n^2}_{a_n} \cos nx - \underbrace{4\pi/n}_{b_n} \sin nx \Big)$$



(התכנסות נקודתית)

---

**3.**

$$\langle \sin mx, \sin nx \rangle = \int_0^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \tfrac{1}{2} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[ \frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_0^{\pi} = 0$$

לכן $\{\sin mx\}$ אורתוגונליים.

המשך של ③...

טור פורייה של $\cos x$ (על $[0,\pi]$) לפי הבסיס $\{\sin nx\}$ $(n\in\mathbb{N})$ הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx$$

כאשר

$$c_n = \frac{\langle \sin nx, \cos x\rangle}{\langle \sin nx, \sin nx\rangle}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi} \sin nx \cos x \, dx}{\int_0^{\pi} \sin^2 nx \, dx}$$

$$= \frac{\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[\sin(n-1)x + \sin(n+1)x\right] dx}{\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2nx)\, dx}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(n-1)x}{n-1} + \frac{\cos(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi}}{\left[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right)\right]_0^{\pi}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1} + \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(1+(-1)^n\right)\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ אי זוגי} \\ \frac{4n}{\pi(n^2-1)} & n=2m \text{ זוגי} \end{cases}$$

לכן טור פורייה של $\cos x$ הוא

$$\underline{\underline{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{8m}{\pi(4m^2-1)} \sin 2mx}}$$

4. אנו צריכים להוכיח כי $\langle R_m,R_n\rangle \equiv \int_{-1}^{1} R_m(x)R_n(x)\,dx = 0 \quad \forall m\neq n$
נניח ש- $n<m$. הכוונה להשתמש באינטגרציה בחלקים $(n+1)(\leq m)$
פעמים: לגזור את $R_n$ ולעשות אינטגרל ל- $R_m$.

$R_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$ היא נגזרת $n$ פעמים של הפולינום
$(x^2-1)^n$ מסדר $2n$ ולכן $R_n$ פולינום מסדר $n$.
ולכן $\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(R_n)\equiv 0$.

כעים של- $(x^2-1)^n$ יש שורשים $x=\pm1$ עם ריבוי $n$.
אחרי נגזרת ריבוי יורד ב-1 ולכן $x=\pm1$ עדיין שורשים של
$\frac{d^r}{dx^r}((x^2-1)^n)$ לכל $r<n$.

---

מדוע? $x=a$ שורש של פולינום $p$ עם ריבוי $n$

$$\Leftarrow \quad p(x) = \underbrace{q(x)}_{\text{פולינום}}\cdot(x-a)^n$$

$$\Leftarrow \quad p'(x) = q'(x)\cdot(x-a)^n + q(x)\cdot n(x-a)^{n-1}$$

$$= (x-a)^{n-1}\underbrace{\left((x-a)q'(x)+n\,q(x)\right)}_{\text{פולינום}}$$

$\Leftarrow$ $p \,|\, (x-a)^{n-1}$, כלו' $x=a$ שורש עם ריבוי לפחות $n-1$.

---

$$\langle R_m,R_n\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)\cdot\frac{d^m}{dx^m}((x^2-1)^m)\,dx$$

$$\underset{\text{בחלקים}}{\overset{\text{אינטגרציה}}{=}} \left[\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)\cdot\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}((x^2-1)^m)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}((x^2-1)^n)\cdot\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}((x^2-1)^m)\,dx$$

$$\vdots$$

$$\underset{\text{בחלקים}}{\overset{\text{אינטגרציה}}{=}} \left[\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)\cdot\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}((x^2-1)^m)\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}((x^2-1)^n)\cdot\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}((x^2-1)^m)\right]_{-1}^{1}$$

$$+\cdots + (-1)^n\left[\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}((x^2-1)^n)\cdot\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}((x^2-1)^m)\right]_{-1}^{1}$$

$$+(-1)^n\int_{-1}^{1}\underbrace{\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}((x^2-1)^n)}_{=0}\cdot\frac{d^{m-n-1}}{dx^{m-n-1}}((x^2-1)^m)\,dx$$

נגזרת $2n+1$ פעמים
של פולינום מסדר $2n$)

בהמשך של ④...

לכל $r$, $0\le r\le n$
$$\left[\frac{d^{n+r}}{dx^{n+r}}\left((x^2-1)^n\right)\cdot\frac{d^{m-r-1}}{dx^{m-r-1}}\left((x^2-1)^m\right)\right]_{-1}^{1} = 0$$

$x=\pm 1$ עדיין שורשים של $\frac{d^{m-r-1}}{dx^{m-r-1}}\left((x^2-1)^m\right)$

$$(0\le)\, m-n-1 \le m-r-1 < m$$

$$\Leftarrow \quad \langle R_m, R_n\rangle = 0$$

---

<u>הערה</u> גם אפשר להשתמש באינטגרציה בחלקים של $\langle R_n,R_n\rangle$ $n$ פעמים לקבל:

$$\langle R_n,R_n\rangle = \int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)dx$$

$$= \left[\frac{d^n}{dx^n}\left((x^2-1)^n\right)\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left((x^2-1)^n\right)\right]_{-1}^{1} + \cdots + (-1)^{n-1}\left[\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}\left((x^2-1)^n\right)\cdot (x^2-1)^n\right]_{-1}^{1}$$
$$- (-1)^{n-1}\int_{-1}^{1}\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left((x^2-1)^n\right)\cdot(x^2-1)^n\,dx$$

$$= \underbrace{0}_{\text{כל האיברים נעלם}} + (-1)^n\int_{-1}^{1}\underbrace{(2n)!}_{=\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}((x^2-1)^n)}(x^2-1)^n\,dx$$

כל האיברים נעלם

$\frac{d^r}{dx^r}\left((x^2-1)^n\right)$
$0\le r\le n-1$
והוא מתאפס ב- $x=\pm1$

$=\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left((x^2-1)^n\right)$ פולינום ממעלה $2n$ והמקדם של $x^{2n}$ הוא 1

$$= (-1)^n\cdot(2n)!\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx$$
$$= (-1)^n\cdot(2n)!\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(-\cos^2\theta)^n\cdot\cos\theta\,d\theta \quad (x=\sin\theta)$$
$$= (2n)!\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\theta)^{2n+1}\,d\theta$$

$$I_n=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\theta)^{2n+1}d\theta \;\Rightarrow\; I_n=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\theta)^{2n-1}(1-\sin^2\theta)d\theta$$

$$\left(I_0=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta=[\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}=2\right)$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos\theta)^{2n-1}d\theta-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin\theta\cdot\left(\sin\theta(\cos\theta)^{2n-1}\right)d\theta$$
$$= I_{n-1} - \left[\sin\theta\left[-\frac{(\cos\theta)^{2n}}{2n}\right]-\int\cos\theta\cdot\frac{-(\cos\theta)^{2n}}{2n}d\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$
$$= I_{n-1}-\frac{I_n}{2n}$$
$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{2n}\right)I_n = I_{n-1} \Rightarrow I_n=\frac{2n}{2n+1}I_{n-1}=\cdots=\frac{2n\cdots 2}{(2n+1)\cdots 3}I_0$$

$$\Rightarrow \langle R_n,R_n\rangle=(2n)!\,I_n=\frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3}\cdot 2\cdot(2n)! = \frac{2}{2n+1}\cdot\left[(2n)(2n-2)\cdots 2\right]^2=\frac{2^{2n+1}}{2n+1}(n!)^2$$

המשך של ④...

ההגדרה כקילה של פולינומים Legendre היא

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \underbrace{d^n/dx^n \left( (x^2-1)^n \right)}_{R_n}$$

ולכן $\{P_n\}$ הם פולינומים אורתוגונלים ביחס למכפלה פנימית

$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ עם נורמה

$$\langle P_n, P_n\rangle = \left(\frac{1}{2^n n!}\right)^2 \langle R_n, R_n\rangle = \frac{2}{2n+1}$$

לדוגמה:

$P_1 = \frac{1}{2}\, d/dx\,(x^2-1) = x$ $\qquad \langle P_1,P_1\rangle = 2/3$

$P_2 = \frac{1}{8}\, d^2/dx^2\,((x^2-1)^2) = \frac{1}{8}(12x^2-4) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ $\qquad \langle P_2,P_2\rangle = 2/5$

$P_3 = \frac{1}{48}\, d^3/dx^3\,((x^2-1)^3)$ $\qquad \langle P_3,P_3\rangle = 2/7$

$= \frac{1}{48}\, d^3/dx^3\,(x^6-3x^4+3x^2-1)$

$= \frac{1}{48}\left(6\cdot5\cdot4\, x^3 - 3\cdot4\cdot3\cdot2\, x\right) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

---

5. טור פורייה של $y=x^2$ על $(0,\pi)$ הוא

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos 2nx + b_n \sin 2nx\right)$$

כאשר

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos 2nx\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \sin 2nx\, dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = 2/3\,\pi^2$$

$n \neq 0$ $\qquad a_n = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[x^2\cdot\frac{\sin 2nx}{2n}\right]_0^\pi}_{0} - \int_0^\pi 2x\cdot\frac{\sin 2nx}{2n}\,dx\right)$

$= -\frac{2}{\pi n}\cdot\int_0^\pi x \sin 2nx\, dx$

$= -\frac{2}{\pi n}\left(\left[x\cdot\frac{-\cos 2nx}{2n}\right]_0^\pi - \underbrace{\int_0^\pi 1\cdot\frac{-\cos 2nx}{2n}\,dx}_{[x \sin 2nx]_0^\pi = 0}\right)$

$= -2/\pi n\cdot\pi\cdot\left(\frac{-\cos 2n\pi}{2n}\right) = 1/n^2$

$b_n = 2/\pi\left(\left[x^2\cdot\frac{-\cos 2nx}{2n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\cdot\frac{-\cos 2nx}{2n}\,dx\right)$

$= 2/\pi\left(-\pi^2/2n + 2/n\int_0^\pi x\cos 2nx\, dx\right)$

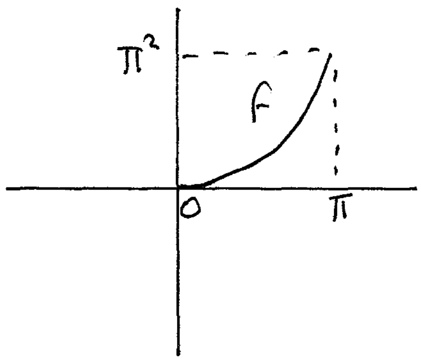
$= -\pi/n + 4/\pi n\left(\underbrace{\left[x\cdot\frac{\sin 2nx}{2n}\right]_0^\pi}_{0} - \int_0^\pi \frac{\sin 2nx}{2n}\,dx\right)$

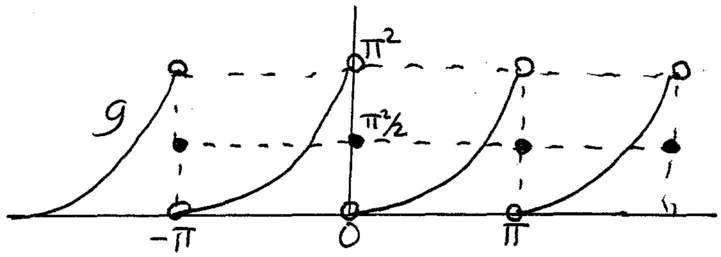
$= -\pi/n$ $\qquad [x\cos 2nx]_0^\pi = 0$

המשך של ⑤...

לכן טור פורייה של $x^2$ על $(0,\pi)$ הוא

$$S^f = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos 2nx - \frac{\pi}{n}\sin 2nx\right)$$




$S^f$ מתכנס נקודתית לפונקציה $g$ שהיא

מחזורית בעלת מחזור $\pi$,

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & 0<x<\pi \\ \pi^2/2 & x=0 \end{cases}$$

$g$ לא רציפה $\Leftarrow$ ההתכנסות לא במ"ש.

אפשר לקבל 2 סוגים של שוויון:

Parseval: $\int_0^{\pi} f^2 = \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{n^2}\right)^2\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{n}\right)^2\frac{\pi}{2}\right)$

$$\int_0^{\pi} f^2 = \int_0^{\pi} x^4\,dx = \pi^5/5$$

ההתכנסות נקודתית של הטור: $g(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos 2nx - \frac{\pi}{n}\sin 2nx\right)$ (*)

רוצים למצוא את $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots$ בעזרת (*).

נבחר $x$ כך ש- $\sin 2nx = 0$ $\cos 2nx = \pm 1$

$x=\pi/2 \Leftarrow$ $\pi^2/4 = g(\pi/2) = \pi^2/3 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}(-1)^n\right)$

$$\underbrace{\pi^2/12}_{\pi^2/3-\pi^2/4} = \underbrace{\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\cdots}_{-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/n^2}$$

8-6פ

.6 $f(x)=|x|, \quad -\pi\le x\le\pi$

f פונקציה זוגית ⇐ טור פורייה בצורה $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

כאשר $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

$n\neq 0$ : $a_n=\frac{1}{\pi}\cdot 2\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\cdot\left(\left[x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}1\cdot\frac{1}{n}\sin nx\,dx\right)$

$=-\frac{2}{n\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}$

$=\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)$

$=\begin{cases}0 & n \text{ זוגי} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & n \text{ אי זוגי}\end{cases}$

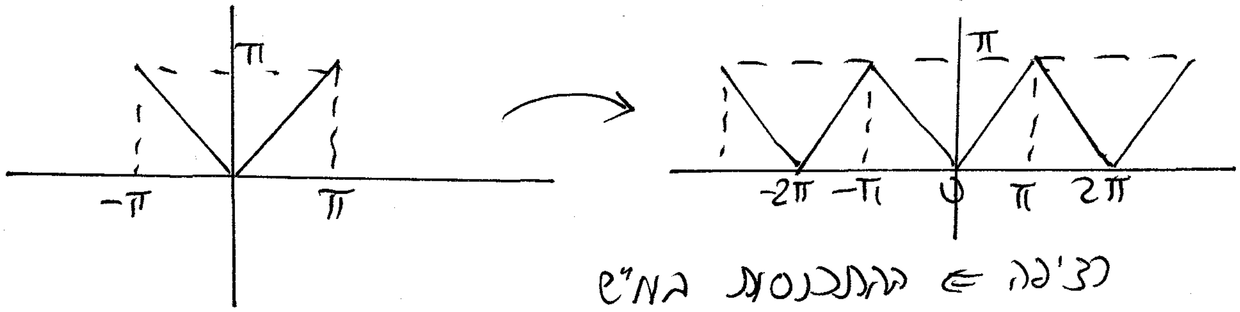
$n=0$: $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\pi$

לכן הטור פורייה הוא $\frac{\pi}{2}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2m+1)^2}\cos(2m+1)x$

$(n=2m+1)$

$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot 2\pi+\sum_{m=0}^{\infty}\pi\cdot\frac{16}{\pi^2(2m+1)^4}=\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{2\pi^3}{3}\Rightarrow\sum_{n \text{ אי זוגי}}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{96}$




רציפה ⇐ מתכנסת במ"ש

לפונקציה $g(x)$

$g(x)=\left|x-2\pi\left[\frac{x-\pi}{2\pi}\right]\right|$

$=$ (הפרש בין $x$ ובין המספר בצורה $2k\pi$ הכי קרוב ל-$x$)

7. $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ $f(x)=x$ היא פונקציה אי זוגית

לכן טור פורייה שלה בצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin 2nx$$

$$\frac{2\pi}{b-a}=2 \quad (T = \text{אורך הקטע})$$

כאשר

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin 2nx\,dx$$

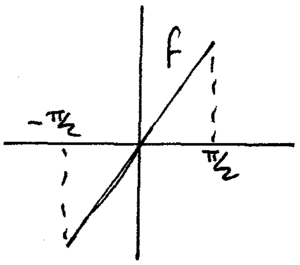
$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[x\cdot\frac{-\cos 2nx}{2n}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} - \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\cdot\frac{-\cos 2nx}{2n}\,dx}_{[*\sin 2nx]_{-\pi/2}^{\pi/2}=0}\right)$$

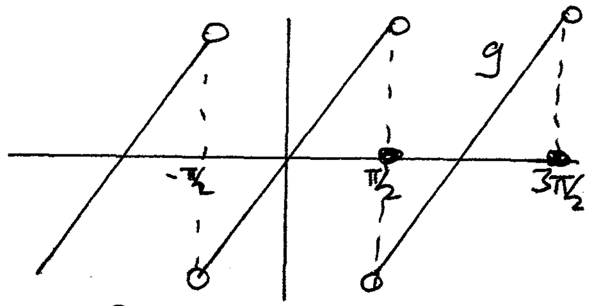
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-1}{2n}\right)\left(\frac{\pi}{2}\cos(n\pi) - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(-n\pi)\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{2n}\right)\left((-1)^n + (-1)^n\right) = -\frac{1}{n}(-1)^n$$

טור פורייה של $f$ הוא $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin 2nx$

$$= \sin 2x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin 6x - \frac{1}{4}\sin 8x + \cdots$$




הוא מתכנס נקודתית ל-$g$, פונקציה מחזורית

בעלת מחזור $\pi$, $g(x)=\begin{cases} x & |x|<\frac{\pi}{2} \\ 0 & |x|=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

שוויון Parseval:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

8.

$$(\mathcal{F}x)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\, dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\omega} - e^{i\omega}}{-i\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2i\sin\omega}{i\omega}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\omega}{\omega}$$

$$\|x\|_2 = \|\mathcal{F}(x)\|_2 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 d\omega$$

$$\int_{-1}^{1} 1\,dt = 2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 d\omega = \pi}}$$

---

<u>הערה</u>: גם מקבלים מ- $\mathcal{F}^{-1}$ :

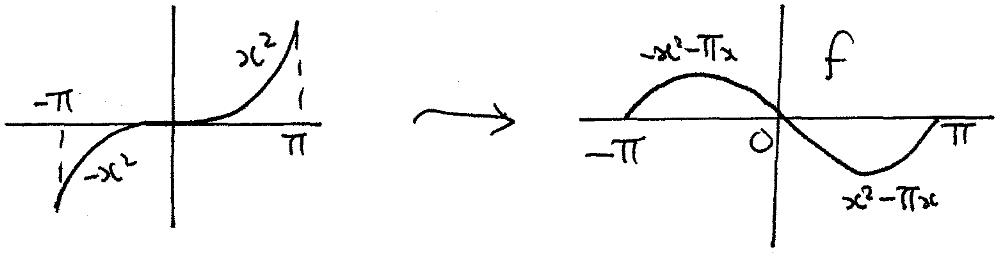
$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}x)(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\, e^{i\omega t}\, d\omega$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin\omega}{\omega}\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right) d\omega \leftarrow \frac{\sin\omega}{\omega} \text{ פונקציה זוגית}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega t}{\omega}\, d\omega$$

לדוגמה:

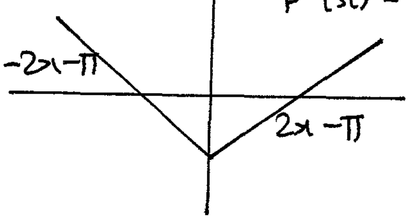
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin\omega\cos 2\omega}{\omega}\, d\omega = \pi x(2) = 0$$
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin\omega\cos\omega/2}{\omega}\, d\omega = \pi x(1/2) = \pi$$

---

9.




$$f'(x) = 2|x| - \pi \qquad (-\pi < x < \pi)$$



המשך של 9...

הפונקציה $f$ רציפה (גם ההרחבה של $f$ על $\mathbb{R}$ כך שהיא פונקציה מחזורית). הנגזרת של $f$ היא:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-\pi & 0 \le x \le \pi \\ -2x-\pi & -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$
$$= 2|x| - \pi$$

משאלה 8, מצאנו טור פורייה ל- $|x|$:

$$|x| = \pi/2 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m+1)^2} \cos(2m+1)x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2|x| - \pi = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2m+1)^2} \cos(2m+1)x$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2m+1)^3} \sin(2m+1)x \; + \underbrace{\text{קבוע}}_{0}$$

$f(0)=0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2m+1)^6} \cdot \pi \quad \Leftarrow \quad \text{Parseval שוויון}$$

הפונקציה $f$ אי זוגית על $(-\pi,\pi)$ ולכן

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = 2\int_0^{\pi} f(x)^2\,dx$$
$$= 2\int_0^{\pi} (x^2-\pi x)^2\,dx$$
$$= 2\int_0^{\pi} x^4 - 2\pi x^3 + \pi^2 x^2\,dx$$
$$= 2\left[\frac{x^5}{5} - \frac{\pi x^4}{2} + \frac{\pi^2 x^3}{3}\right]_0^{\pi}$$
$$= 2\pi^5\left(1/5 - 1/2 + 1/3\right) = \pi^5/15$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^6} = \frac{\pi}{64} \cdot \frac{\pi^5}{15} = \frac{\pi^6}{960}$$

---

הערה:

$$\underbrace{\left(1-\frac{1}{2^6}\right)}_{=63/64} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \sum_{n \text{ אי זוגי}} \frac{1}{n^6} \quad \Leftarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \sum_{n \text{ אי זוגי}} \frac{1}{n^6} + \underbrace{\sum_{n \text{ זוגי}} \frac{1}{n^6}}_{= \frac{1}{2^6} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^6}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{64}{63} \sum_{n \text{ אי זוגי}} \frac{1}{n^6} \quad \Leftarrow$$

$$= \frac{\pi^6}{63 \cdot 15} = \frac{\pi^6}{945} \qquad (\zeta(6))$$