פתרונות לתרגילים על פרק 5

1. (א)
$$\frac{1}{1+x^2} = 1-x^2+x^4-\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x = \int_0^x \frac{1}{1+y^2}\,dy = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}}} \quad (-1<x\le 1)$$

(ב)
$$(1+y)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}y^n$$

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(\frac{1}{2}-n)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}1\cdot 3\cdots(2n-1)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!}\,\frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdots 2n}$$

$$= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$y=-x^4 \Rightarrow (1-x^4)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(-x^4)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!\,x^{4n}}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!\,x^{4n+1}}{2^{2n}(n!)^2(4n+1)}}} + \text{קבוע} \qquad |x|<1$$

(ג)
$$\frac{1}{1-x^9} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^9)^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^{9n}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\int\frac{dx}{1-x^9} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{9n+1}}{9n+1}}} + \text{קבוע} \qquad (-1\le x<1)$$

(ד)
$$\tan^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\frac{\tan^{-1}x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1}$$

$$\underline{\underline{\int\frac{\tan^{-1}x}{x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}}} + \text{קבוע} \qquad (|x|\le 1)$$

(ה)
$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$$

$$\frac{1}{x-a} = -\tfrac{1}{a}(1-x/a)^{-1} = -\tfrac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(x/a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}-x^n/a^{n+1} \quad (|x|<|a|)$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \left(-\sum_{n=0}^{\infty}x^n/3^{n+1}\right)-\left(-\sum_{n=0}^{\infty}x^n/2^{n+1}\right) = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2^{n+1}}-\tfrac{1}{3^{n+1}}\right)x^n}} \quad (|x|<2)$$

המשך של ① ...

① שורשים $x=1,-2\pm i$

$$x^3+3x^2+x-5 = (x-1)(x^2+4x+5)$$

$$\frac{x^2-3x-8}{x^3+3x^2+x-5} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2-i}+\frac{C}{x+2+i}$$

$$x^2-3x-8 = A(x+2-i)(x+2+i) + B(x-1)(x+2+i) + C(x-1)(x+2-i)$$

$$x=1 \Rightarrow \quad -10 = A(3-i)(3+i) \Rightarrow A=-1$$

$$x=-2+i \Rightarrow (-2+i)^2-3(-2+i)-8 = B(-3+i)(2i)$$

$$\Rightarrow (3-4i)+(6-3i)-8 = B(-2-6i)$$

$$\Rightarrow (1-7i) = B(-2-6i) \Rightarrow B=\frac{1-7i}{-2-6i}=\frac{(1-7i)(2-6i)}{(-2-6i)(2-6i)}$$

$$= \frac{-40-20i}{-40} = 1+i/2$$

$$\text{צמוד} \Rightarrow C=\bar{B}=1-i/2$$

$$\frac{x^2-3x-8}{x^3+3x^2+x-5} = -\frac{1}{x-1}+\frac{(1+i/2)}{x+2-i}+\frac{1-i/2}{x+2+i}$$

$$= \frac{1}{1-x}+\frac{(1+i/2)}{x-(2+i)}+\frac{(1-i/2)}{x+(2+i)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(1+i/2)\cdot\frac{-x^n}{(i-2)^{n+1}} + \sum(1-i/2)\frac{-x^n}{(-2-i)^{n+1}}$$

מתכנס ל- $|x|<1$ מתכנס ל- $|x|<|i-2|=\sqrt5$ מתכנס ל- $|x|<|-2-i|=\sqrt5$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{(1+i/2)}{(i-2)^{n+1}}-\frac{(1-i/2)}{(-2-i)^{n+1}}\right]x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (|x|<1)$$

כאשר

$$a_n = 1-\mathcal{R}\left(\frac{2+i}{(i-2)^{n+1}}\right)$$

$$= \underline{\underline{1+5\mathcal{R}\left((i-2)^{-n-2}\right)}} \qquad \left(2+i=\frac{5}{2-i}\right)$$

$$= 1+5(-1)^n\cdot 5^{-1-n/2}\cos\left((n-2)\tan^{-1}\tfrac12\right) \qquad 2-i=\sqrt5\, e^{-i\tan^{-1}1/2}$$

$$= \underline{\underline{1+(-1/\sqrt5)^n\cos\left((n-2)\tan^{-1}\tfrac12\right)}} \qquad \Rightarrow (2-i)^{-n-2}=5^{-1-n/2}e^{i(n-2)\tan^{-1}1/2}$$

3-5ב

המשך של ① ...

ב.

$$2-5x+4x^2-x^3=(1-x)(2-3x+x^2)$$
$$=(1-x)^2(2-x)$$

$$\frac{x^2-3x+3}{2-5x+4x^2-x^3}=\frac{A}{(1-x)^2}+\frac{B}{(1-x)}+\frac{C}{2-x}$$

$$x^2-3x+3=A(2-x)+B(1-x)(2-x)+C(1-x)^2$$

$x=1$: $1=A \Rightarrow A=1$

$x=2$: $1=C \Rightarrow C=1$

x^2 : $1=B+C \Rightarrow B=0$

$$\frac{x^2-3x+3}{2-5x+4x^2-x^3}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{2-x}$$
$$=(1-x)^{-2}-1/(x-2)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}(-x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n/2^{n+1}$$
$$\uparrow \quad |x|<1 \qquad\qquad \uparrow \quad |x|<2$$

$$\binom{-2}{n}=\frac{(-2)(-3)\cdots(-2-n+1)}{n!}=(-1)^n\cdot\frac{2\cdot 3\cdots(n+1)}{n!}=(-1)^n(n+1)$$

$$\frac{x^2-3x+3}{2-5x+4x^2-x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(-x)^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n/2^{n+1}$$
$$=\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\left(n+1+1/2^{n+1}\right)x^n}}$$

הערה קיימת דרך לפתור נוסחאות נסיגה דרך פיתוח טור Taylor.

$$\forall n\geq 3,\quad 2a_n-5a_{n-1}+4a_{n-2}-a_{n-3}=0,$$

Generating function $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $\Rightarrow \sum_{n=3}^{\infty}(2a_n-5a_{n-1}+4a_{n-2}-a_{n-3})x^n=0$

$$\Rightarrow 2(f(x)-a_0-a_1x-a_2x^2)-5x(f(x)-a_0-a_1x)+4x^2(f(x)-a_0)-x^3f(x)=0$$

$$\Rightarrow (2-5x+4x^2-x^3)f(x)=2(a_0+a_1x+a_2x^2)+5x(a_0+a_1x)+4x^2a_0$$

תנאי התחלה. $\Rightarrow$ $f(x)=$ פונקציה רציונלית $\dfrac{(2a_2+5a_1+4a_0)x^2+(2a_1+5a_0)x+2a_0}{2-5x+4x^2-x^3}$

2. א.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$$

מתכנס כאשר $|x|<1$

(רדיוס ההתכנסות הוא 1

ובגלל שהטור מתבדר כאשר $x=\pm 1$)

$$= \int_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-2}\right) dx$$

$$= \int_0 \frac{x^2}{1-x^4}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0 \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tanh^{-1}x - \tan^{-1}x\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

ב.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$$

$$= \int_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{4n-4}\right) dx$$

$$= \int_0 \frac{dx}{1-x^4}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tanh^{-1}x + \tan^{-1}x\right) \qquad (|x|<1)$$

ג.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$$

$$\downarrow \ d/dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n/n$$

$$\downarrow \ d/dx$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

$$= \frac{1}{1+x}$$

$$\int$$

$$\ln(1+x)$$

$$= \int \ln(1+x)\, dx$$

$$\ln(1+x)\int 1\, dx - \int \frac{1}{1+x}\left(\int 1\, dx\right)dx$$

$$= \ln(1+x)\cdot(1+x) - (1+x) + \text{קבוע}$$

הפונקציה היא 0 ב-$x=0$

ולכן הקבוע $=1$

$$(1+x)\ln(1+x) - x$$

המשך של ② ...

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$: נגדיר $\displaystyle f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} x^{3n-2}$

רדיוס ההתכנסות של הטור של f הוא 1

$x=1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/(3n-2)$ מתכנס

$x=-1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(-1)^{3n-2}/(3n-2) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-2}$ מתבדר

לכן f מוגדרת היטב רק על $(-1,1]$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{3n-3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}$$

$$f(0)=0 \Rightarrow f(x) = \int_0^x \frac{du}{1+u^3}$$

$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x)$ ⇐ משפט Abel

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^3}$$
$$= \int_0^1 \frac{du}{(1+u)(1-u+u^2)}$$

$$\frac{A}{1+u} + \frac{Bu+C}{1-u+u^2} = \frac{1}{1+u^3} \Longrightarrow A(1-u+u^2) + (Bu+C)(1+u) = 1$$

$u=-1$	$3A$		$=1$	$\Rightarrow A = 1/3$
$u=0$	A	$+\ C$	$=1$	$\Rightarrow C = 2/3$
u^2	A	$+\ B$	$=0$	$\Rightarrow B = -1/3$

$$\Rightarrow S = \int_0^1 \frac{1/3}{1+u} + \frac{2/3 - u/3}{1-u+u^2}\, du$$
$$= \left[\tfrac13 \ln(1+u)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{-\frac16(2u-1)}{1-u+u^2} + \frac{1/2}{1-u+u^2}\, du$$
$$= \tfrac13 \ln 2 - \tfrac16 \left[\ln(1-u+u^2)\right]_0^1 + \tfrac12 \int_0^1 \frac{du}{(u-\frac12)^2 + \frac34}$$
$$= \tfrac13 \ln 2 + \frac{1/2}{\sqrt3/2} \left[\tan^{-1}\left(\frac{u-\frac12}{\sqrt3/2}\right)\right]_0^1$$
$$= \tfrac13 \ln 2 + \tfrac{1}{\sqrt3}\Big(\underbrace{\tan^{-1}(1/\sqrt3)}_{\pi/6} - \underbrace{\tan^{-1}(-1/\sqrt3)}_{(-\pi/6)}\Big)$$
$$= \underline{\underline{\tfrac13 \ln 2 + \tfrac{\pi}{3\sqrt3}}}$$

המשך של ② ...

ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}$: נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}x^{4n-3}$

רדיוס ההתכנסות : 1

$f(\pm 1) = \pm\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}$ מתכנס

לכן f מוגדרת היטב על $[-1,1]$ ולכן מתכנס במ"ש על $[-1,1]$)

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{4n-4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}=\frac{1}{1+x^4} \qquad (|x|<1)$$

$$f(0)=0 \Rightarrow f(x)=\int_0^x \frac{du}{1+u^4} \qquad (|x|<1)$$

$$\text{Abel} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x) = \int_0^1 \frac{du}{1+u^4}$$

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n-3} = \int_0^1\frac{du}{1+u^4}$$

$$=\int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^2-2u^2}$$

$$=\int_0^1 \frac{du}{(1-\sqrt{2}u+u^2)(1+\sqrt{2}u+u^2)}$$

$$=\int_0^1 \frac{A+Bu}{1-\sqrt{2}u+u^2}+\frac{A-Bu}{1+\sqrt{2}u+u^2}\,du$$

סימטריה תחת $u\to -u$

כשכך $1=(A+Bu)(1+\sqrt{2}u+u^2)+(A-Bu)(1-\sqrt{2}u+u^2)$

$$=2A+2u^2(A+B\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow A=\tfrac{1}{2},\ B=-\tfrac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow S=\int_0^1 \frac{\frac12-\frac{u}{2\sqrt2}}{1-\sqrt2 u+u^2}+\frac{\frac12+\frac{u}{2\sqrt2}}{1+\sqrt2 u+u^2}\,du$$

$$=\int_0^1 \frac{(2u-\sqrt2)(-\frac{1}{4\sqrt2})+\frac14}{1-\sqrt2 u+u^2}+\frac{(2u+\sqrt2)(\frac{1}{4\sqrt2})+\frac14}{1+\sqrt2 u+u^2}\,du$$

$$=\Big[\ln(1-\sqrt2 u+u^2)\left(-\tfrac{1}{4\sqrt2}\right)+\ln(1+\sqrt2 u+u^2)\left(\tfrac{1}{4\sqrt2}\right) + \tfrac14\sqrt2\tan^{-1}\left(\frac{u-\frac{1}{\sqrt2}}{\frac{1}{\sqrt2}}\right)+\tfrac14\sqrt2\tan^{-1}\left(\frac{u+\frac{1}{\sqrt2}}{\frac{1}{\sqrt2}}\right)\Big]_0^1$$

$$\left(1\pm\sqrt2 u+u^2=(u\pm\tfrac{1}{\sqrt2})^2+\tfrac12\right)$$

$$=\underline{\underline{\tfrac{1}{4\sqrt2}\left(\ln(2+\sqrt2)-\ln(2-\sqrt2)\right)+\tfrac{\sqrt2}{4}\left(\tan^{-1}(\sqrt2-1)+\tan^{-1}(\sqrt2+1)\right)}}$$

ג.

א.

$$e^{-x}/x^3 = \frac{1-x+x^2/2}{x^3} + \frac{-x^3/3! + x^4/4! - \cdots}{x^3}$$

$$= 1/x^3 - 1/x^2 + 1/2x - \frac{1}{3!} + \frac{x}{4!} - \cdots$$

$$= \frac{1}{2x} + \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq 2}}^{\infty} \frac{(-x)^n}{x^3 \cdot n!}$$

$$\int_{0.1}^{0.2} \frac{e^{-x}}{x^3}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln x\right]_{0.1}^{0.2} + \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq 2}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left[\frac{x^{n-2}}{n-2}\right]_{0.1}^{0.2}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{\substack{n=0 \\ n\neq 2}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-2)\,n!}\left((0.2)^{n-2} - (0.1)^{n-2}\right)$$

$n>2 \Rightarrow$ אז מתחלף

0.001 $\quad n=5:\ \frac{1}{3\cdot 5!}\left((0.2)^3-(0.1)^3\right) = \frac{1}{360}(0.007) < 10^{-3}$

$n=4:\ \frac{1}{2\cdot 4!}\left((0.2)^2-(0.1)^2\right) = \frac{1}{48}(0.03) \sim 0.0006$

קירוב:

$$\tfrac{1}{2}\ln 2 - \tfrac{1}{2}\overbrace{\left(\frac{1}{0.2^2} - \frac{1}{0.1^2}\right)}^{-75} + \underbrace{\left(\frac{1}{0.2} - \frac{1}{0.1}\right)}_{-5} - \frac{1}{6}(0.2-0.1) + \frac{1}{48}\left((0.02)^2-(0.01)^2\right)$$

מספיק!

דיוק $< .001$

$$\sim \tfrac{1}{2}\ln 2 + \frac{65}{2} - \frac{1}{60}$$

ב.

$$\tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

$$\frac{\tan^{-1}x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \cdots$$

$$\int_0^{0.5} \frac{\tan^{-1}x}{x}\,dx = 0.5 - \frac{(0.5)^3}{3^2} + \frac{(0.5)^5}{5^2} - \cdots$$

צולף יאצ, מחליפים סימנים

$$\frac{(0.5)^5}{5^2} = \frac{1}{32\cdot 25} \doteq \frac{1}{800} > 10^{-3}$$

$$\frac{(0.5)^7}{7^2} = \frac{1}{2^7\cdot 7^2} = \frac{1}{128\cdot 49} < 10^{-3}$$

$$\int_0^{0.5} \frac{\tan^{-1}x}{x}\,dx \underset{\text{דיוק } <.001}{\sim} 0.5 - \frac{(0.5)^3}{3^2} + \frac{(0.5)^5}{5^2}$$

8-5פ

המשך של 3...

ב.

$$x^{10}\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} x^{10}\cdot\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+11}}{2n+1}$$

$$\int_0^{0.8} x^{10}\sin x\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+12)}(0.8)^{2n+12}$$

Leibnitz : $(0.8)^2 = 0.64$, $(0.8)^3 = 0.512 \sim \frac{1}{2}$

$(0.8)^{24} \sim (\frac{1}{2})^8 = \frac{1}{256}$ $\qquad 2n+12=24 \Rightarrow n=6$

$n=6$: $\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{24}(0.8)^{24} \sim \frac{1}{288}\cdot\frac{1}{256} \sim \frac{1}{8\times10^4}$ קטן מדי

$n=4$: $\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{20}(0.8)^{20} \sim \frac{(.64)}{180}\cdot(\frac{1}{2})^6 \sim \frac{1}{18\times10^3}$ קטן מדי

$n=3$: $\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{18}(0.8)^{18} \sim \frac{1}{126}\cdot(\frac{1}{2})^6 \sim \frac{1}{8000}$

$n=2$: $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}(0.8)^{16} \sim \frac{1}{80}(0.8)(\frac{1}{2})^5 \sim \frac{1}{3000}$

$$\underbrace{\int_0^{0.8} x^{10}\sin x\,dx \overset{\text{דיוק } 10^{-3}}{\sim} \underbrace{\frac{(.8)^{12}}{12}}_{n=0} - \underbrace{\frac{(.8)^{14}}{3\times14}}_{n=1}}$$ סך

$\uparrow$

$\sim \frac{1}{42}\cdot\frac{0.64}{2^4} \sim 10^{-3}$

ג.

$$\int_0^{0.5}\frac{dx}{1+x^2} = 0.5 - \frac{(0.5)^3}{3} + \frac{(0.5)^5}{5} - \cdots$$

Leibnitz : נבחר n כך ש· $\frac{(0.5)^n}{n} < 0.001$

(אי זוגי)

$\Leftrightarrow n\cdot 2^n > 1000$

$10\cdot 2^{10} \sim 10^4$

$7\cdot 2^7 = 7\cdot128 = 896 < 10^3$

$9\cdot 2^9 = 9\cdot512 > 10^3$

$$\Rightarrow \int_0^{0.5}\frac{dx}{1+x^2} \sim \underline{\underline{0.5 - \frac{(0.5)^3}{3} + \frac{(0.5)^5}{5} - \frac{(0.5)^7}{7}}}$$

עם דיוק $> 10^{-3}$

4. א. $x=0,-2$: סינגולריות רגילות
$x=1$: סינגולרית

ב. $y''+\frac{x}{x+3}y'-\frac{1}{x(x+3)}y=0 \Leftarrow x=0,-3$ נק' סינגולריות רגילות

ג. $y''+e^x y'+(\cos x)y=0$ אין נק' סינגולריות

ד. $y''-\frac{1}{x\sin x}y$: $x=n\pi$ נק' סינגולריות רגילות

ה. $y''+\frac{x+2}{x(x-1)^2}y'-\frac{1}{x(x-1)^2}y=0$: $x=0$ סינגולרית רגילה
$x=1$ סינגולרית

---

5. א. $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ ($x=0$ נק' רגולרית)

$$y''+xy'+y=0 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}+x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$

$$x^n:\quad a_{n+2}(n+2)(n+1)+a_n\cdot n+a_n=0$$

$$\Rightarrow a_{n+2}=-\frac{(n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n=\frac{-a_n}{n+2}\quad (n\geq 0)$$

$$\Rightarrow a_{2m}=\frac{(-1)^m}{(2m)(2m-2)\cdots 2}a_0=\frac{(-1)^m}{2^m m!}a_0$$

$$a_{2m+1}=\frac{(-1)^m a_1}{(2m+1)\cdots(3)}=\frac{(-1)^m a_1}{(2m+1)!}(2m)\cdots(4)(2)=\frac{(-2)^m m!\,a_1}{(2m+1)!}$$

פתרון כללי: $\underline{\underline{y=a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-x^2/2)^m}{m!}+a_1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-2)^m m!\,x^{2m+1}}{(2m+1)!}}}$

$e^{-x^2/2}$

ב. $y''-\frac{5x}{1-x^2}y'-\frac{3}{1-x^2}y=0$ $x=0$ נק' רגולרית

$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ בתנוק $(1-x^2)y''-5xy'-3y=0$

$$\Leftarrow (1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty}a_n n(n-1)x^{n-2}-5x\sum_{n=1}^{\infty}a_n n x^{n-1}-3\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=0$$

$$x^n:\quad a_{n+2}(n+2)(n+1)-a_n n(n-1)-5a_n n-3a_n=0 \Leftarrow$$

$$a_{n+2}=\frac{n(n-1)+5n+3}{(n+1)(n+2)}a_n=\frac{n^2+4n+3}{(n+1)(n+2)}a_n=\frac{n+3}{n+2}a_n$$

המשך של 5ב..

$$a_{2m} = \frac{2m+1}{2m}\cdot\frac{2m-1}{2m-2}\cdots\frac{3}{2}a_0$$

$$= \frac{(2m+1)!}{[(2m)(2m-2)\cdots 2]^2}a_0 = \frac{(2m+1)!}{2^{2m}(m!)^2}a_0$$

$$a_{2m+1} = \frac{2m+2}{2m+1}\cdot\frac{2m}{2m-1}\cdots\frac{4}{3}a_1$$

$$= \frac{(2m+2)^2(2m)^2\cdots 4^2\cdot 2}{(2m+2)!}a_1 = \frac{2^{2m+1}((m+1)!)^2}{(2m+2)!}a_1$$

$$y = a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m+1)!\,x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} + a_1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2^{2m+1}((m+1)!)^2x^{2m+1}}{(2m+2)!}$$

---

2. $y''+(x-1)y'+y=0$ $\quad x=1$ נק' רגולרית

$$t=x-1:\quad \ddot{y}+t\dot{y}+y=0$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)t^{n-2}+t\sum_{n=1}^{\infty}a_nnt^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0$$

$$t^n:\ a_{n+2}(n+2)(n+1)+a_nn+a_n=0$$

(ראה א) $\qquad\Rightarrow\qquad a_{n+2}=-\frac{a_n}{n+2}$

$$\cdots\Rightarrow\ y=a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-t^2/2)^m}{m!}+a_1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-2)^mm!\,t^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$=\underbrace{a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2}(x-1)^2)^m}{m!}}_{e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}}+a_1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-2)^mm!\,(x-1)^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

---

3. $y''-(x^2+6x+9)y'-3(x+3)y=0$ $\quad x=-3$ נק' רגולרית

$$t=x+3:\quad \ddot{y}-t^2\dot{y}-3ty=0$$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)t^{n-2}-t^2\sum_{n=1}^{\infty}a_nnt^{n-1}-3t\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n=0$$

$$t^n:\ a_{n+2}(n+2)(n+1)-a_{n-1}(n-1)-3a_{n-1}=0\quad(n\geq1)$$

$$\Rightarrow\qquad a_{n+2}=\frac{a_{n-1}}{n+1}\quad(n\geq1)\quad(*)$$

$$t^0:\ a_2\cdot2=0\ \Rightarrow\ a_2=0$$

המשך של (25) ...

המשוואה דיפרנציאלית מסדר 2 ⇐ מרחב הפתרונות דו-מימדי

אבל ⊛ נוסחה נסיגה עם $k=3$ ⇐ ? תלת-מימדי קבוצה של פתרונות?

$a_2=0$ ⇐ פתרונות כן דו-מימדי

$$a_{3m+2}=0 \quad \forall m$$

$$(n=3m-2) \quad a_{3m}=\frac{a_{3m-3}}{3m-1}=\frac{1}{(3m-1)(3m-4)\cdots 2}\,a_0$$

$$(n=3m-1) \quad a_{3m+1}=\frac{a_{3m-2}}{3m}=\frac{1}{(3m)(3m-3)\cdots 3}\,a_1=\frac{a_1}{3^m(m!)}$$

פתרון כללי:

$$y=a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{3m}}{(3m-1)(3m-4)\cdots 2}+a_1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^{3m+1}}{3^m(m!)}$$

$$=a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x+3)^{3m}}{(3m-1)(3m-4)\cdots 2}+a_1\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(x+3)^{3m+1}}{3^m\cdot m!}$$

$$(x+3)\,e^{(x+3)^3/3}$$

ג. $2x^2y''-3xy'+(3-x)y=0$ נק' $x=0$ סינגולרית רגולרית

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}\Rightarrow 2x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2}$$

$$-3x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+s)x^{n+s-1}+(3-x)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}=0$$

$$\circledast \quad x^{n+s}: \quad 2a_n(n+s)(n+s-1)-3a_n(n+s)+3a_n-a_{n-1}=0 \quad (n\geq 1)$$

$$x^s\ (n=0): \quad 2a_0\,s(s-1)-3a_0s+3a_0=0$$

$$\Rightarrow a_0(2s^2-2s-3s+3)=0$$

$$a_0\neq 0 \Rightarrow (2s-3)(s-1)=0$$

$$\Rightarrow s=1,\ 3/2$$

$$s=1:\ \circledast\Rightarrow a_n\big(2(n+1)n-3(n+1)+3\big)=a_{n-1}\Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}}{2n^2-n}$$

$$s=3/2:\ \circledast\Rightarrow a_n\big(2(n+3/2)(n+1/2)-3(n+3/2)+3\big)=a_{n-1}\Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}}{2n^2+n}$$

המשך של (25) ...

$$s=1 \Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)} \Rightarrow a_n=\frac{a_0}{n!\,(2n-1)(2n-3)\cdots 1}$$

$$=\frac{a_0}{n!}\cdot\frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n)!}=\frac{2^n a_0}{(2n)!}$$

$$s=3/2 \Rightarrow a_n=\frac{a_{n-1}}{n(2n+1)} \Rightarrow a_n=\frac{a_0}{n!\,(2n+1)(2n-1)\cdots 3}$$

$$=\frac{a_0}{n!}\cdot\frac{(2n)(2n-2)\cdots(2)}{(2n+1)!}=\frac{2^n a_0}{(2n+1)!}$$

במילים אחרות:

$$x\cosh(\sqrt{2x}) = \underline{\underline{x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!}x^n}} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2x})^{2n}}{(2n)!}$$

$$\frac{x}{\sqrt{2}}\sinh(\sqrt{2x}) = \underline{\underline{x^{3/2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{(2n+1)!}x^n}} = \frac{x}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2x})^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

בסה"כ כללי: $\underline{\underline{A x\cosh(\sqrt{2x}) + B x\sinh(\sqrt{2x})}}$

.1 $3x^2y''+(5x+3x^3)y'+(3x^2-1)y=0$ ($x=0$ נק' סינגולרית רגולרית)

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s}:\quad 3x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2}+(5x+3x^3)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+s)x^{n+s-1}$$
$$+(3x^2-1)\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+s}=0$$

① x^{n+s}: $3a_n(n+s)(n+s-1)+5a_n(n+s)+3a_{n-2}(n+s-2)$
$+3a_{n-2}-a_n=0$ $(n\geq 2)$

②: $x^s\ (n=0)$: $3a_0s(s-1)+5a_0s-a_0=0 \Rightarrow a_0(3s^2+2s-1)=0$

③: $x^{s+1}\ (n=1)$: $3a_1(s+1)s+5a_1(s+1)-a_1=0 \Rightarrow a_1(3s^2+8s+4)=0$

②: $a_0(3s-1)(s+1)=0 \Rightarrow a_0=0$ או $s=1/3,-1$

③: $a_1(3s+2)(s+2)=0 \Rightarrow a_1=0$ או $s=-2/3,-2$

①: $(3(n+s)(n+s-1)+5(n+s)-1)a_n+3(n+s-1)a_{n-2}=0$

$\Rightarrow (3(n+s)^2+2(n+s)-1)a_n+3(n+s-1)a_{n-2}=0$

$\Rightarrow (3(n+s)-1)(n+s+1)a_n+3(n+s-1)a_{n-2}=0$

המשך של (15) ..

$$a_0\neq 0 \Rightarrow s=\tfrac{1}{3} \Rightarrow a_n=\frac{-3(n-\frac{2}{3})}{3n(n+\frac{4}{3})}\,a_{n-2}$$

או $s=-1 \Rightarrow a_n=\dfrac{-3(n-2)}{(3n-4)\,n}\,a_{n-2}$

בשני, מ-(3) מקבלים, $a_1=0$, $\Rightarrow a_n=0\ \forall n$ אי זוגי

$$a_1\neq 0 \Rightarrow s=-\tfrac{2}{3} \text{ או } -2 \overset{(2)}{\Rightarrow} a_0=0$$

$$s=-\tfrac{2}{3} \Rightarrow a_n=\frac{-3(n-\frac{5}{3})}{3(n-1)(n+\frac{1}{3})}\,a_{n-2}$$

$$s=-2 \Rightarrow a_n=\frac{-3(n-3)}{(3n-7)(n-1)}\,a_{n-2}$$

מקבלים בדיוק אותם פתרונות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$

$$\begin{pmatrix} s \rightsquigarrow s-1 \\ a_n \rightsquigarrow a_{n+1} \end{pmatrix}$$

. מספיק לכתוב את הפתרונות מהצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s}$, $a_0\neq 0$

$$s=\tfrac{1}{3}:\qquad a_{2m}=\frac{-3(2m-\frac{2}{3})}{3(2m)(2m+\frac{4}{3})}\,a_{2(m-1)}=\frac{-(3m-1)}{2m(3m+2)}\,a_{2(m-1)}$$

$$\Rightarrow a_{2m}=(-1)^m\,\frac{(3m-1)(3m-4)\cdots 2}{m!\,(3m+2)(3m-1)\cdots 5}\,a_0=(-1)^m\frac{2}{(3m+2)\,m!}\,a_0$$

$$s=-1:\qquad a_{2m}=\frac{-3(2m-2)}{2m(6m-4)}\,a_{2(m-1)}=\frac{-3(m-1)}{2m(3m-2)}\,a_{2(m-1)}$$

$$m=1 \Rightarrow a_2=0 \Rightarrow a_{2m}=0\quad \forall m>1$$

פתרונות:

$$\begin{cases} x^{1/3}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^m x^{2m}}{(3m+2)\,m!} \\ x^{-1}. \end{cases}$$

פתרון כללי:

$$y=A/x+Bx^{1/3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^m}{(3m+2)\,m!}$$

.6

R_1 R_2	R_P	R_Q	P	Q	סעיף
∞	∞	∞	x	1	א $x_0=0$
1	1	1	$-\frac{5x}{1-x^2}$	$-\frac{3}{1-x^2}$	ב $x_0=0$
∞	∞	∞	$x-1$	1	ג $x_0=1$
∞	∞	∞	$-(x+3)^2$	$-3(x+3)$	ד $x_0=-3$
∞	∞	∞	$-3/x$	$\frac{3-x}{2x^2}$	ה. $x_0=0$
∞	∞	∞	$\frac{5}{3x}+x$	$1-\frac{1}{3x^2}$	ו. $x_0=0$

רדיוס ההתכנסות של "צורת" $\sum a_n x^n$ לפתרונות

רדיוס ההתכנסות של הטורים ל- P, Q סביב $x=x_0$
(בסעיפים ה, ו, זה רדיוס ההתכנסות של הטורים ל- $(x-x_0)P$, $(x-x_0)^2Q$)