15-4פ

8. א. $x^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ לכל $x\in[0,\frac{1}{2}]$

לכן צריך לבדוק האם $x^n \to 0$ במ"ש על $[0,\frac{1}{2}]$

$$d_\infty(x^n,0) = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |x^n-0| = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

⇐ ההתכנסות במ"ש.

ב. נקודתית: $x^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & 0\le x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$

הפונקציה בצד ימין לא רציפה ולכן לא יכולה להיות גבול של פונקציות תחת התכנסות במ"ש. (לא במ"ש)

ג. $\forall x\in[0,1]$ $\quad x^n - x^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$d_\infty(x^n-x^{n+1},0) = \max_{x\in[0,1]} (x^n-x^{n+1})$$

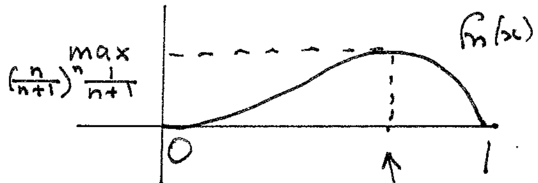
פונקציה חיובית

max = sup לפונקציות רציפות על [0,1]

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1} \Rightarrow f_n'(x) = nx^{n-1}-(n+1)x^n$$

$= x^n(1-x)$

≥ 0 על $[0,1]$



$$f_n'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{n}{n+1}$$

$$d_\infty(x^n-x^{n+1},0) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n}_{<1\ (\to 1/e)}\cdot \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\downarrow\ 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

ולכן ההתכנסות במ"ש.

ד. $x^n - x^{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\quad \forall x\in[0,1]$

$$d_\infty(x^n-x^{2n},0) = \max_{x\in[0,1]} (x^n-x^{2n})$$

$f_n(x) = x^n - x^{2n}$

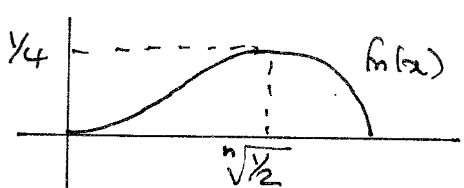
$\Rightarrow f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1}$

$f_n'(x)=0 \Rightarrow x^n = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f_n(x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow d_\infty(f_n,0) = \frac{1}{4} \not\to 0$

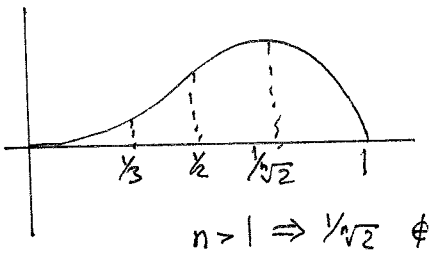
לא במ"ש



המשך של ⑧ ...

ה. כמו ב-ג, $x^n - x^{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ לכל x ב-$[1/3, 1/2]$

$$d_\infty(x^n - x^{2n}) = \max_{x\in[1/3,1/2]} \underbrace{(x^n - x^{2n})}_{f_n}$$



$$= \max\{\underbrace{f_n(1/3), f_n(1/2)}_{\text{נק' קצוות}}, \underbrace{f_n(1/\sqrt[n]{2})}_{\text{כאשר } 1/\sqrt[n]{2}\in[1/3,1/2]}\}$$

(נק' קריטית)

$n>1 \Rightarrow 1/\sqrt[n]{2} \notin [1/3,1/2] \Rightarrow d_\infty(x^n - x^{2n}) = \max\{f_n(1/3), f_n(1/2)\}$

$1/\sqrt[n]{2} > 1/2$

$\Rightarrow$ f_n עולה על $[1/3,1/2]$

$$= f_n(1/2) = (1/2^n - 1/4^n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

לכן ההתכנסות במ"ש.

ו.

$$f_n(x) = \frac{nx}{2+n+x} \xrightarrow{n\to\infty} x$$

$$f_n(x) - x = \frac{nx}{2+n+x} - x = -\frac{2x+x^2}{2+x+n} = -g_n(x)$$

$$d_\infty(f_n(x), x) = \max_{0\le x\le 1} |g_n(x)| \quad (\text{על } [0,1])$$

$$= g_n(1)$$

$$g_n(0) = 0, \quad g_n'(x) = \frac{(2+2x)(2+x+n) - (2x+x^2)}{(2+x+n)^2}$$

$$= \frac{x^2+4x+2n}{(2+x+n)^2} > 0 \text{ על } [0,1]$$

(פונקציה עולה)

$$= 3/(3+n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

לכן ההתכנסות במ"ש.

ז.

$$\tan^{-1}(nx) \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & x=0 \\ \pi/2 & x\in(0,1] \end{cases}$$

הפונקציה לא רציפה ולכן ההתכנסות לא במ"ש.

ח.

$$x\tan^{-1}(nx) \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & x=0 \\ \pi x/2 & x\in(0,1] \end{cases}$$

$$d_\infty(x\tan^{-1}(nx), \pi x/2) = \max_{x\in[0,1]} \left(\pi x/2 - x\tan^{-1}(nx)\right)$$

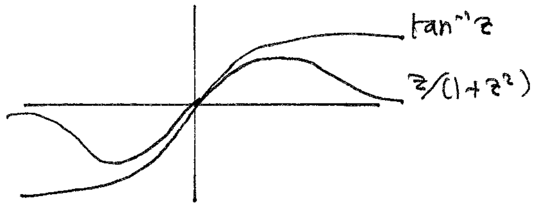
המשך של 8ב ...

$$g_n(x) = \frac{\pi |x|}{2} - x\tan^{-1}(n x)$$

$$g_n'(x) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(nx) - \frac{x\cdot n}{1+n^2x^2}$$

$$= \tan^{-1} z - \frac{z}{1+z^2} > 0$$

כאשר $z = 1/nx \in (0,\infty)$



$$\Rightarrow \quad d_\infty\left(x\tan^{-1}(nx), \frac{\pi x}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(n) \qquad \text{(ערך ב-} x=1\text{)}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

לכן ההתכנסות במ"ש

• דרך נוספת: $\tan^{-1}(nx)$ פונקציה רציפה
הגבול נקודתית הוא $\frac{\pi|x|}{2}$ (גם רציף)
והסדרה $(x\tan^{-1}(nx))$ עולה לכל x
משפט דיני $\Leftarrow$ ההתכנסות במ"ש.

---

9. נגדיר פונקציה $g_n(x)$ ע"י $g_n(x) = nf(x) - [nf(x)]$
לפי ההגדרה, $0 \le g_n(x) < 1$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}[nf(x)] = \frac{1}{n}(nf(x) - g_n(x)) = f(x) - \frac{1}{n}g_n(x)$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}|g_n(x)| < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$$

$\square$

---

10. $x \ge 0$ $\quad n^\alpha x e^{-nx} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \Rightarrow f_n'(x) = n^\alpha(e^{-nx} - x\cdot n e^{-nx})$$

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(x) \xrightarrow{x\to\infty} 0 \quad (n>0)$$

$$\Rightarrow \max_{x\ge 0} |f_n(x)| = f_n(1/n) = n^\alpha \cdot \frac{1}{n}\cdot e^{-1}$$

$$= n^{\alpha-1}e^{-1}$$

ההתכנסות במ"ש אם"ם $n^{\alpha-1}/e = d_\infty(f_n, 0) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ אם"ם $\alpha>1$.

11. $n^2x^2e^{-n^2x^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ נקודתית

$$d_\infty(f_n,0) = \max_{x\ge 0}\left(n^2x^2e^{-n^2x^2}\right)$$

$$= \max_{y\ge 0}\left(y^2e^{-y}\right) \qquad (y=nx)$$

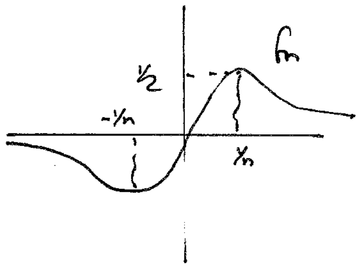
לא תלוי ב-n ולכן $\not\xrightarrow{n\to\infty} 0$

לכן ההתכנסות לא במ"ש.

---

12. $\underset{\text{רציפה}}{f_n(x)} = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

$\xrightarrow{n\to\infty} \underset{\text{רציפה}}{0}$ (נקודתית)



אבל $d_\infty(f_n,0) = \sup_x\left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right|$

$$= \sup_y\left|\frac{y}{1+y^2}\right|$$

לא תלוי ב-n, ולכן $\not\to 0$ וההתכנסות לא במ"ש.

---

13. $\sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = 1+x+\cdots+x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-x}$

הפרש $y_n(x) = \frac{x^n}{1-x}$

לכן $y_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ נקודתית על $(-1,1)$

אבל $y_n \xrightarrow{x\to 1} \infty$ ולכן $\sup_{x\in(-1,1)}(y_n(x)) = \infty$

ולא יכול להיות התכנסות במ"ש

14. א. $\sum_{n=1}^{\infty}(\ln x)^n$ מתכנס כאשר $|\ln x|<1$

$\Leftrightarrow \ln x \in (-1,1)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x \in (e^{-1}, e)}}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$: $\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2}=\frac{n^2}{(n+1)^2}\xrightarrow{n\to\infty}1$

רדיוס ההתכנסות הוא 1

$\left.\begin{array}{l} x=1: \sum 1/n^2 \\ x=-1: \sum (-1)^n/n^2 \end{array}\right\}$ שניהם מתכנסים

$\underline{\underline{\text{תחום ההתכנסות } [-1,1]}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\sin\frac{x}{2^n}}_{a_n}$ $\qquad (x\neq 0)\quad \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sin(x/2^{n+1})}{\sin(x/2^n)}=\frac{1}{2\cos(x/2^{n+1})}\xrightarrow[n\to\infty]{}1/2$

$\Leftarrow$ הטור מתכנס $\underline{\underline{\text{לכל } x}}$ (בנוסף ל- $x=0$)

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}x^{-n^2}$

$a_n=x^{-n^2}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x^{-(n+1)^2}}{x^{-n^2}}=x^{-2n-1}$

$\to 0 \quad |x|>1$

$|x|\le 1 \Leftarrow$ הטור מתבדר $(x^{-n^2}\not\to 0)$

$\underline{\underline{|x|>1}} \Leftarrow$ הטור מתכנס

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{e^{nx}}$

$a_n=nx/e^{nx}$

$a_{n+1}/a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)/e^x \xrightarrow{n\to\infty} e^{-x}$

$x>0 \Rightarrow e^{-x}<1 \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-x}$

והטור מתכנס

$x<0 \Rightarrow nx/e^{nx}\not\to 0$ הטור מתבדר

$x=0 \Rightarrow$ הטור מתכנס $(\Sigma 0)$

תחום ההתכנסות הוא $\underline{\underline{x\in[0,\infty)}}$

15. א. $\frac{1}{n^2(1+n^2x^2)} \le \frac{1}{n^2} \quad \forall x$, $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס

ב. $\left|\frac{\sin nx}{2^n}\right| \le \frac{1}{2^n} \quad \forall x$, $\sum \frac{1}{2^n}$ מתכנס

ג. $\left|\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad \forall x$, $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס

ד. $\left|\frac{\cos 5nx}{n!}\right| \le \frac{1}{n!} \quad \forall x$, $\sum \frac{1}{n!}$ מתכנס

---

16. א. $\forall a \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a \Rightarrow \frac{a^n}{n!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

לכן מתכנס

ב.

$$(2n)!/a^{n!} = b_n$$

$$b_{n+1}/b_n = \frac{(2n+2)!/(2n)!}{a^{(n+1)!}/a^{n!}}$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+2)}{a^{n\cdot n!}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Leftarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$ (כי $\sum b_n$ מתכנס)

ג.

$$a_n = n^n/(2n)!$$

$$a_{n+1}/a_n = \frac{(n+1)^{n+1}/n^n}{(2n+2)!/(2n)!}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot (n+1)^n/n^n}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \underbrace{(1+1/n)^n}_{\to e}/(2n+1) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$ (כי $\sum a_n$ מתכנס)

ד.

$$a_n = (n!)^n/n^{n^2}$$

$$a_{n+1}/a_n = \frac{[(n+1)!]^{n+1}/[n!]^n}{(n+1)^{(n+1)^2}/n^{n^2}}$$

21-4פ

16ב המשך...

$$a_{n+1}/a_n = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot (n!)^{n+1}/(n!)^n}{(n+1)^{(n+1)^2}/n^{n^2}}$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}\, n!}{(n+1)^{(n+1)^2}}\cdot n^{n^2}$$

$$= \frac{n!\cdot n^{n^2}}{(n+1)^{n^2+n}}$$

$$= \frac{n!}{n}\cdot\frac{n^{n^2+n}}{(n+1)^{n^2+n}} < \frac{n!}{n^n} = c_n$$

$$c_{n+1}/c_n = \frac{(n+1)!/n!}{(n+1)^{n+1}/n^n} = \frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}/n^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = (1+1/n)^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} 1/e$$

$$\Rightarrow c_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow a_{n+1}/a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

דרך אחרת: $a_n = (n!)^n/n^{n^2}$

$$\sqrt[n]{a_n} = n!/n^n = c_n$$

$$c_{n+1}/c_n = \frac{(n+1)!/n!}{(1+n)^{n+1}/n^n}$$

$$= \frac{(n+1)}{(n+1)^{n+1}/n^n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = (1+1/n)^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} 1/e$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = c_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Rightarrow$ מתכנס $\sum a_n$

$$\Rightarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$