פתרונות של תרגילים על פרק 4

1. א. $((-1)^n)$ לא מונוטונית, לא מתכנסת, כן היא חסומה

ב. $(n(-1)^n)$ לא מונוטונית/ מתכנסת/ חסומה

ג. $(\frac{1}{n}(-1)^n)$ חסומה, מתכנסת: $\frac{1}{n}(-1)^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ד. $(n/2^n)$: $(\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \frac{5}{32}, \dots)$

סדרה יורדת מתכנסת ל-0 (גם חסומה)

ה. $(n^2/2^n)$: $(\frac{1}{2}, \frac{4}{4}, \frac{9}{8}, \frac{16}{16}, \frac{25}{32}, \dots$

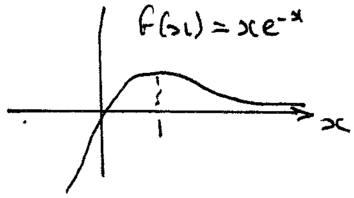
$\quad = \frac{1}{2}, \ 1, \ \frac{9}{8}, \ 1$

לא סדרה מונוטונית, אבל אחרי $n=3$ היא כן מונוטונית (גם חסומה, מתכנסת)

הערה: ההתנהגות של הסדרות $n/2^n$, $n^2/2^n$ כמו ההתנהגות של הפונקציות xe^{-x}, x^2e^{-x}

לפעמים יותר קל לראות התנהגות של פונקציה של משתנה רצ' f מאשר משתנה דסקרטי (סדרה)

$f(x)=xe^{-x}$

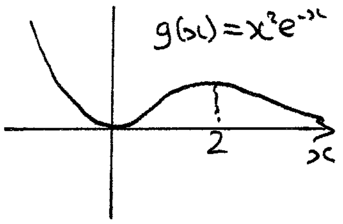


$f'(x)=(1-x)e^{-x}$

אם $x>1$, $\Rightarrow f'<0$

(לכן $x\in(1,\infty)$, f פונקציה מונוטונית יורדת)

$g(x)=x^2e^{-x}$



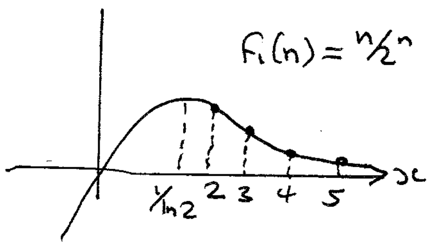
$g'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$

אם $x>2$, $\Rightarrow g'<0$

(לכן $(2,\infty)$, g פונקציה מונוטונית יורדת)

$f_1(x)=x2^{-x}=x\cdot e^{-x\ln 2}$

$f_1(n)=n/2^n$



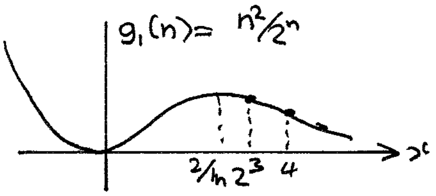
$f_1'(x)=1\cdot 2^{-x}+x(-\ln 2)2^{-x}$

$f_1'=0 \Rightarrow x=\frac{1}{\ln 2}\in(1,2)$

$(\ln 2=0.693\dots)$

$g_1(x)=x^2\cdot e^{-x\ln 2}=x^2 2^{-x}$

$g_1(n)=n^2/2^n$



$g_1'(x)=2x\cdot 2^{-x}+x^2(-\ln 2)2^{-x}$

$x=\frac{2}{\ln 2}\in(2,3)$

המשך של ①...

1. $(\sqrt[n]{n})$: $(1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}, \sqrt[5]{5}, \ldots)$

- לא מונוטונית אבל אחרי מקום השלישית היא כן סדרה מונוטונית
- מתכנסת (ל-1)
- חסומה

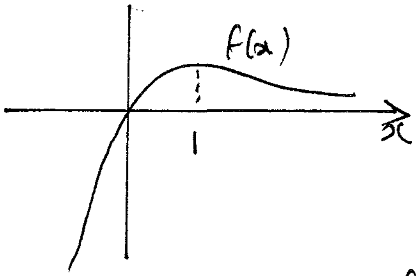
איך לראות את ההתנהגות של $\sqrt[n]{n}$?

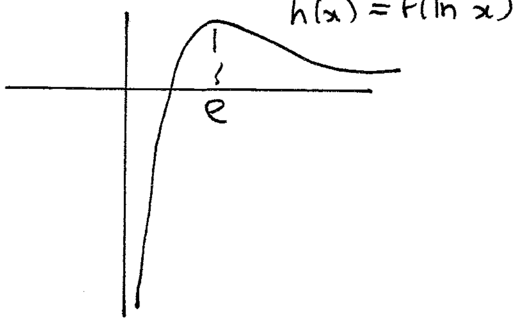
$$\ln(\sqrt[n]{n}) = \frac{1}{n}\ln n$$

$h(x) = \frac{1}{x}\ln x$ ⟵ אפשר לצייר את הגרף של h

או לשים לב ש- $h(x) = f(\ln x)$.

$(f(x) = xe^{-x})$





ל-$f(x)$ יש מקסימום ב- $x=1$

⇐ ל- $h(x)=f(\ln x)$ יש מקסימום ב- $\ln x = 1$ $(x=e)$

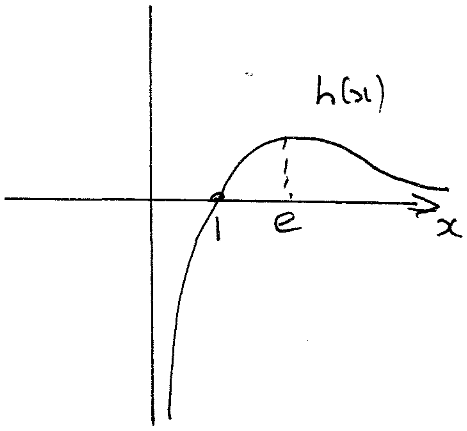
מהטבלה:

$h(x) = \frac{1}{x}\ln x$

$h'(x) = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)$ *

$= \frac{1}{x^2}(1 - \ln x)$

$h'(x) = 0 \Rightarrow 1 = \ln x \Rightarrow x = e$



* $h = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$
* h מוגדרת כאשר $0 < x$
* $h \to -\infty$ כאשר $x \to 0^+$
* $h \to 0$ כאשר $x \to \infty$

בכל זאת מקבלים ש- $(\frac{1}{n}\ln n)$ סדרה יורדת, מתכנסת ל-0 $(n>e)$

⇐ $(\sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n}\ln n})$ סדרה יורדת, מתכנסת ל- $e^0 = 1$ כאשר $n \geq 3$

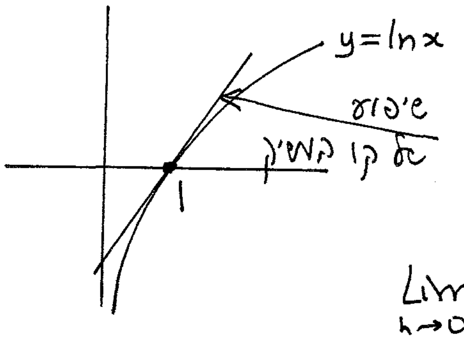
המשך של ① ...

ב. $((1+1/n)^n)$: $(2, (3/2)^2, (4/3)^3, (5/4)^4, \dots)$

סדרה עולה, מתכנסת ל- e (כמו "אוילר")

מדוע? $\ln((1+\frac{1}{n})^n) = n\ln(1+1/n)$

$$= \frac{\ln(1+1/n)}{1/n}$$



משמעות גאומטרית:

$$\frac{d}{dx}(\ln x)\Big|_{x=1} = \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = 1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\overbrace{\ln 1}^{0}}{h} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+1/n)}{1/n}$$

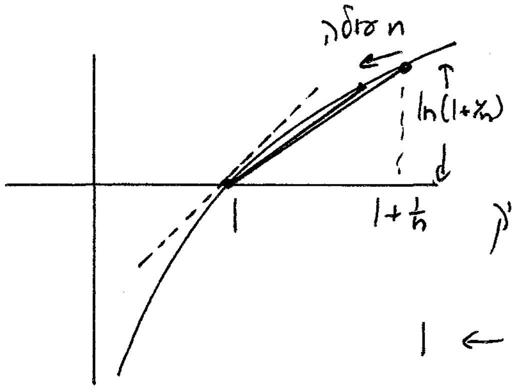
לכן קיבלנו $\lim_{n\to\infty} n\ln(1+1/n) = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e^1 = e$$

גם כמובן ש- $n\ln(1+\frac{1}{n})$ הנו השיפוע של המיתר של הגרף של $y=\ln x$ בין הנקודות $x=1+1/n$, $x=1$.

בגלל שהפונקציה קמורה, השיפוע עולה כאשר $1+1/n \to 1$ $(n\to\infty)$

$(y''<0 : y'=\frac{1}{x}, y''=-1/x^2)$



מיתר ← קו המשיק

שיפוע של מיתר ← שיפוע של קו המשיק

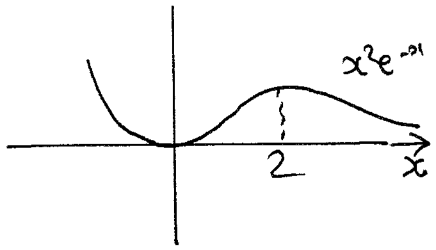
$\Leftarrow$ $(n\ln(1+\frac{1}{n}))$ סדרה עולה ← 1

$\Leftarrow$ $((1+1/n)^n)$ גם כן עולה ← e.

המשך של ①...

ט. $\ln(n^2/e^n) = 2\ln n - n$

הפונקציה x^2e^{-x} מקבלת מקס (פ4-1).



הסדרה (n^2e^{-n}) ⇐ יורדת אחרי $n=2$ $(\to 0)$

הסדרה $(2\ln n - n)$ ⇐ יורדת אחרי $n=2$ $(\to -\infty)$ (מתבדרת, לא חסומה)

---

2. א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-2}$: ל- $n>1$ האיברים חיוביים

$$\frac{n+1}{n^2-2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר ⇐ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-2}$ מתבדר

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{3\cdot 5^{n+3}}$:

$$\frac{2^{2n}}{3\cdot 5^{n+3}} = \frac{1}{3\cdot 5^3}\cdot\left(\frac{2^2}{5}\right)^n$$

$4/5 < 1$

⇐ הטור מתכנס

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$ $a_n = 2^n/(n+1)!$ $a_{n+1}/a_n = 2/(n+2) \leq 2/3$ $\forall n \geq 1$

⇐ הטור מתכנס

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n)$: n גדול, $\frac{1}{n}$ קטן ⇐ $\sin(1/n) \sim \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר ⇐ $\sum_{n=1}^{\infty} \sin 1/n$ מתבדר

$$\frac{\sin 1/n}{1/n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

המשך של ②...

ה. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$: מבחן אינטגרל

$$\int_2^{X} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \left[\ln(\ln x)\right]_2^X = \ln(\ln X)-\ln(\ln 2) \xrightarrow{X\to\infty} \infty$$

$\Leftarrow$ $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ מתבדר $\Leftarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתבדר

ו. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$: מבחן השוואה

$$\frac{\ln n}{n} \underset{(n\ge 2)}{\geq} \frac{\ln 2}{n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר $\Leftarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$ מתבדר

ז. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$: $\ln n\to\infty$ אבל לאט. $\frac{1}{n(\ln n)^2}\to 0$ יותר

מהר מ- $1/n$ אבל זה לא עוזר כי $\sum\frac{1}{n}$ מתבדר.

עדיין $\frac{1}{n(\ln n)^2}\to 0$ יותר לאט מאשר $1/n^{\alpha}$ $(\alpha>1)$.

משתמשים במבחן אינטגרל:

$$\int_2^{X}\frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^X = \underbrace{-\frac{1}{\ln X}}_{\xrightarrow{X\to\infty}0}+\frac{1}{\ln 2}$$

$\Leftarrow$ $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$ מתכנס

$\Leftarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ מתכנס

ח. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+2}$ $\frac{n-1}{n^2+2}<\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$ אבל זה לא עוזר לנו!

$$\frac{(n-1)/(n^2+2)}{1/n} = \frac{n(n-1)}{n^2+2} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$\Leftarrow$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum\frac{n-1}{n^2+2}$ מתבדרים יחד!

ט. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\ln n}$ $\frac{n}{\ln n}\not\to 0$ $\Leftarrow$ הטור מתבדר

המשך של ②...

י. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$: $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$\sim 1/2\sqrt{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} 1/\sqrt{n}$ מתבדר ⇐ הטור שלנו מתבדר

$\frac{a_n}{1/\sqrt{n}}\to\frac{1}{2}$

יא. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}$: טור טלסקופי $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ ⇐ הטור מתכנס

יב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$: $a_n=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$

$\sim 1/n\cdot 2\sqrt{n}=\frac{1}{2}n^{-3/2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ מתכנס ⇐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס

$(3/2>1)$

יג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$: מבחן Dirichlet

סכומים חלקיים חסומים ← $y_n=(-1)^n$

מונוטונית יורדת $\to 0$ ← $x_n=\frac{1}{\ln(n+1)}$

⇐ כן, הטור מתכנס (אבל רק בתנאי: $\sum\frac{1}{\ln(n+1)}$

מתבדר כי $\frac{1}{\ln(n+1)}\to 0$ יותר לאט

מ- $1/n$ (או $1/\sqrt[10]{n}$!))

יד. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n+1}-1)^n$; $a_n=(\sqrt[n]{n+1}-1)^n$

$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{n+1}-1\xrightarrow{n\to\infty}0$

⇐ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס (מספיק ש- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ קטן מ- 1)

3

א.

$$\left.\begin{aligned}\cos(\theta+\varphi) &= \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi\\ \cos(\theta-\varphi) &= \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta-\varphi)-\cos(\theta+\varphi) = 2\sin\underbrace{\theta}_{kx}\sin\underbrace{\varphi}_{x/2}$$

$$\Rightarrow \cos(k-\tfrac{1}{2})x - \cos(k+\tfrac{1}{2})x = 2\sin kx \sin\tfrac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(k-\tfrac{1}{2})x - \cos(k+\tfrac{1}{2})x\right)}_{\text{זה טלסקופי (סופי)}} = \sum_{k=1}^{n}(\sin kx)\cdot 2\sin\tfrac{x}{2}$$

$$\cos\tfrac{x}{2} - \cos(n+\tfrac{1}{2})x$$

$$\underset{\substack{(\sin\frac{x}{2}\neq 0)\\ [x\notin 2\pi\mathbb{Z}]}}{\Rightarrow} \quad \frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} = \sum_{k=1}^{n}(\sin kx)$$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ בצורה $\sum x_n y_n$

$x_n = \frac{1}{n}$ סדרה מונוטונית $\to 0$

$y_n = \sin nx$ סכומים חלקיים $Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$ $(x\notin 2\pi\mathbb{Z})$

סדרה חסומה כפונקצ' של n

נמצאת בין $\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{2\sin\frac{x}{2}}$ ובין $\frac{\cos\frac{x}{2}+1}{2\sin\frac{x}{2}}$

$\underset{\text{Dirichlet}}{\overset{\text{ממבחן}}{\Leftarrow}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ אז מתכנס כאשר $x\notin 2\pi\mathbb{Z}$

כאשר $x=2\pi m$ $\Leftarrow$ $\sin nx = 0$ וגם הטור מתכנס

□

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$ מתכנס ממבחן Dirichlet: $x_n = \frac{1}{\ln n}$ (סדרה מונוטונית $\to 0$)

$y_n = \sin\frac{n\pi}{12}$ (Y_n חסומה ע"פ א)

(4)

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}}_{a_n} \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$

כמו $\frac{1}{n^3}$ (היחס $\leftarrow \frac{1}{8}$)

$\sum \frac{1}{n^3}$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum |a_n|$ מתכנס

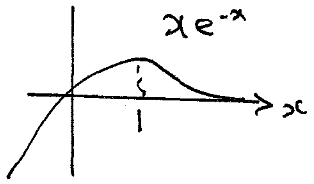
$\Leftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס בהחלט

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n-\ln n}}_{a_n} \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\ln n}$

$$\frac{1}{n-\ln n} > \frac{1}{n}$$

$\sum \frac{1}{n}$ מתבדר $\Leftarrow$ $\sum |a_n|$ מתבדר

האם הטור $\sum a_n$ מתכנס בכלל? $n-\ln n = -\ln(ne^{-n})$



$\Rightarrow$ (ne^{-n}) יורדת $\leftarrow 0$, $n>1$

$\Leftarrow$ $(-\ln(ne^{-n})) = (n-\ln n)$ עולה $\leftarrow \infty$

$\Leftarrow$ $\left(\frac{1}{n-\ln n}\right)$ יורדת $\leftarrow 0$

$\Leftarrow$ Leibnitz הטור מתכנס בתנאי

ג. $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$ $\qquad \frac{n+1}{n} \not\to 0$ $\Leftarrow$ הטור מתבדר

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \, 2^{n^2}/n!$

$$a_n = (-1)^n \, 2^{n^2}/n!$$

$$|a_n| = 2^{n^2}/n!$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{(n+1)^2-n^2}}{n+1} = \frac{2^{2n+1}}{n+1} \to \infty$$

$\Leftarrow$ הטור מתבדר.

המשך של ④ ...

ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} n^2/2^n}_{a_n}$

$|a_n| = n^2/2^n$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} \left|\frac{(n+1)^2}{n^2}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} < 1$

$\Leftarrow$ הטור $\sum |a_n|$ מתכנס

$\Leftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס בהחלט

ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}$

$\left|\frac{\cos n\alpha}{n^2}\right| \le 1/n^2$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}$ מתכנס בהחלט

---

5. א. $a_n = y^n/n!\,,\quad b_n = x^n/n!$

$$c_n = \sum_{m=0}^{n} (a_m b_{n-m}) = \sum_{m=0}^{n} \frac{y^m}{m!} \cdot \frac{x^{n-m}}{(n-m)!}$$

$$= \frac{1}{n!} \underbrace{\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} y^m x^{n-m}}_{(x+y)^n}$$

נוסחת בינום

$\Leftarrow$ הטור $\sum c_n$ הוא $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!\,(x+y)^n$

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n = e^y\,,\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n = e^x\,,\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n = e^{x+y} \right)$ [מתכנסים $\forall x,y$]

ב. $a_n = b_n = x^n$

$$c_n = \sum_{m=0}^{n} (a_m b_{n-m}) = \sum_{m=0}^{n} x^m \cdot x^{n-m}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} x^n = (n+1)x^n$$

הטורים $\sum a_n, \sum b_n$ הם: $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ (מתכנס ל-$\frac{1}{1-x}$ ל-$|x|<1$)

הטור $\sum c_n$ הוא $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

(טור Taylor של $(1-x)^{-2}$: $\left(\binom{-2}{n} = n\right)$)

6. א. $\int_0^1 x^{a-1}dx = [x^a/a]_0^1 = 1/a \quad (a>0)$

חושבים על $\int_0^1 x^{a-1}dx$ כפונקציה של a, $f(a)$.

$$f'(a) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a}(x^{a-1})\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{x}\cdot(\ln x)\,x^a\,dx$$
$$\Rightarrow \quad -1/a^2 = \int_0^1 (\ln x)\,x^{a-1}\,dx$$

אחרי גזירה n פעמים, מקבלים

$$\underline{\underline{(-1)^n/a^{n+1}}} = \frac{d^n}{da^n}(1/a) = \int_0^1 (\ln x)^n x^{a-1}\,dx$$

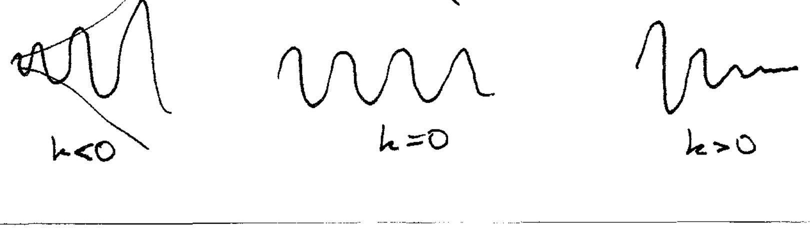
ב.

$$\int e^{-kx}\sin\alpha x\,dx \overset{\text{החלק המדומה}}{=} \operatorname{Im}\left(\int e^{-kx}\cdot e^{i\alpha x}\,dx\right) \quad (\alpha,k\in\mathbb{R})$$
$$= \operatorname{Im}\left(\int e^{(i\alpha-k)x}\,dx\right)$$
$$= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{(i\alpha-k)x}}{i\alpha-k}\right) + \text{קבוע}$$
$$= \operatorname{Im}\left(\frac{e^{-kx}(\cos\alpha x + i\sin\alpha x)(i\alpha+k)}{\underbrace{(i\alpha-k)(i\alpha+k)}_{=-\alpha^2-k^2}}\right) + \text{קבוע}$$
$$= \frac{e^{-kx}}{-\alpha^2-k^2}(\alpha\cos\alpha x + k\sin\alpha x) + \text{קבוע}$$

<u>הערה</u>: הנוסחה שקיבלנו נכונה עבור לכל k,α (לא רק מספרים ממשיים)... גם יש אפשרות לקבל אותה בלי שימוש של מספרים מרוכבים — דרך אינטגרציה בחלקים פעמים.

$$(*) \quad \int_0^X e^{-kx}\sin\alpha x\,dx = -\left[\frac{e^{-kx}}{\alpha^2+k^2}(\alpha\cos\alpha x + k\sin\alpha x)\right]_0^X$$

לכן $\int_0^\infty e^{-kx}\sin\alpha x\,dx$ מתכנס אם"ם $\lim_{X\to\infty} e^{-kX}\underbrace{(\alpha\cos\alpha X + k\sin\alpha X)}_{\text{מספר בין } \pm\sqrt{(\alpha^2+k^2)} \text{ כאשר } X \text{ משתנה}}$ קיים, ז"א אם"ם $k>0$ (ואז הגבול הוא 0)



גרפים של $e^{-kX}(\alpha\cos\alpha X + k\sin\alpha X)$ נגד X:

המשך של 26 ...

כאשר $X \to \infty$ מקבלים:

$$\int_0^\infty e^{-kx} \sin \alpha x \, dx = \left(\frac{e^{-kx}}{\alpha^2+k^2}(\alpha \cos \alpha x + k \sin \alpha x)\right)\Big|_{x=0} = \frac{\alpha}{\alpha^2+k^2} \quad (k>0)$$

ג.

$$\frac{1-\cos \alpha x}{x} = \int_0^\alpha \sin a x \, da$$

מסעיף 2 $\left(\int_0^\infty \sin ax \, e^{-kx} dx\right)$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1-\cos \alpha x}{x} e^{-kx} dx = \int_0^\alpha \frac{a}{a^2+k^2} da$$

$$= \left[\frac{1}{2} \ln (a^2+k^2)\right]_{a=0}^{a=\alpha}$$

$$= \tfrac{1}{2} \ln(\alpha^2+k^2) - \tfrac{1}{2} \ln(k^2)$$

$$= \tfrac{1}{2} \ln(1+\alpha^2/k^2) \qquad (k>0)$$

ד.

$$\frac{1-e^{-\alpha t}}{t} = \int_0^\alpha e^{-at} da$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha t}}{t} \cos t \, dt = \int_0^\alpha \left(\int_0^\infty e^{-at} \cos t \, dt\right) da$$

$$\int_0^\infty e^{-kx} \sin \alpha x \, dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+k^2} \Leftarrow \text{מסעיף } 2$$

אבל אנחנו צריכים cos במקום sin:

$$\int_0^\infty e^{-at} \cos t \, dt = \mathcal{R}\left(\int_0^\infty e^{-at} \cdot e^{it} dt\right) \qquad a>0$$

$$= \mathcal{R}\left(\int_0^\infty e^{-(a-i)t} dt\right)$$

$$= \mathcal{R}\left(\left[\frac{e^{-(a-i)t}}{a-i}\right]_0^\infty\right)$$

$$= \mathcal{R}\left(\frac{1}{a-i}\right) \leftarrow e^{-(a-i)t} \xrightarrow[(a>0)]{t\to\infty} 0$$

$$= \mathcal{R}\left(\frac{a+i}{a^2+1}\right) = \frac{a}{a^2+1}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{1-e^{-\alpha t}}{t} \cos t \, dt = \int_0^\alpha \frac{a}{a^2+1} da = \left[\tfrac{1}{2} \ln(a^2+1)\right]_0^\alpha$$

$$= \tfrac{1}{2} \ln(1+\alpha^2) \qquad (\alpha>0)$$

הערות ① אם $g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$ (גבולות של האינטגרל לא תלויים ב- y)

$$\frac{g(y+h)-g(y)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^b f(x,y+h)\,dx - \int_a^b f(x,y)\,dx\right) \Leftarrow$$

$$= \int_a^b \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}\,dx$$

צריך תנאים על f

f גזירה כפונקציה של y

משפט הערך הממוצע $\Downarrow$

$\exists \eta \in (y,y+h)$ (תלוי ב- x,y,h) : $\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x,\eta)}$

אם $\partial f/\partial y$ רציפה אז ההפרש בין $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x,\eta)}$ ובין $\frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(x,y)}$ קטן ל-h מספיק קטן

וכך מקבלים:

$$\frac{g(y+h)-g(y)}{h} \xrightarrow{h\to 0} \int_a^b \partial f/\partial y \,dx = g'(y)$$

---

② במת"פ (1), ראינו איך למצוא

$$\frac{d}{dy}\left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x)\,dx\right)$$

גבולות תלויים ב- y

פונקציה לא תלויה ב- y

והיה לנו נוסחה: $b'(y)\,f(b(y)) - a'(y)\,f(a(y))$ (מכלל השרשרת)

אפשר לעשות שני סוגים ביחד:

$$\frac{d}{dy}\left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx\right) = b'(y)\,f(b(y),y) - a'(y)\,f(a(y),y) + \int_{a(y)}^{b(y)} \partial f/\partial y \,dx$$

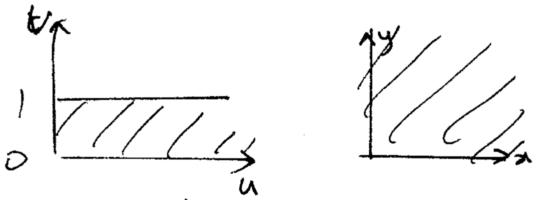
סכום של איברים שמקבלים מ-2 סוגים של נגזרת של אינטגרל.

(Γ : Gamma function
B : Beta function)

ד.   א.   (ת- משפ' (1))

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \left(\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx\right)\left(\int_0^\infty y^{t-1}e^{-y}\,dy\right)$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty x^{s-1}y^{t-1}e^{-x-y}\,dx\,dy$$



$u = x+y$
$v = x/(x+y)$

$x = uv$
$y = u(1-v)$

$$= \int_0^1\int_0^\infty (uv)^{s-1}(u(1-v))^{t-1}e^{-u}\left\|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\|du\,dv$$

יעקוביאן

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u$$

$$= \int_0^1\int_0^\infty u^{s-1}\cdot u^{t-1}\cdot u\cdot e^{-u}\,v^{s-1}(1-v)^{t-1}\,du\,dv$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^1 v^{s-1}(1-v)^{t-1}\,dv\right)}_{B(s,t)}\underbrace{\left(\int_0^\infty u^{s+t-1}e^{-u}\,du\right)}_{\Gamma(s+t)}$$

$\square$

ב.

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$$

הצבה: $x = \sin^2\theta$

$1-x = \cos^2\theta$

$dx = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$$= \int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta)^{s-1}(\cos^2\theta)^{t-1}\,2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}(\sin\theta)^{2s-1}(\cos\theta)^{2t-1}\,d\theta$$

$\square$

ג.

$$B(s,t+1) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^t\,dx$$

אינטגרציה
לפי חלקים

$$= \left[(1-x)^t\int x^{s-1}dx - \int -t(1-x)^{t-1}\left(\int x^{s-1}dx\right)dx\right]_0^1$$

$$= \left[(1-x)^t\cdot x^s/s\right]_0^1 + \int_0^1 t/s\,(1-x)^{t-1}x^s\,dx$$

$$= \underset{(t,s>0)}{0} + t/s\;B(s+1,t)$$

$\square$

המשך של (7) ...

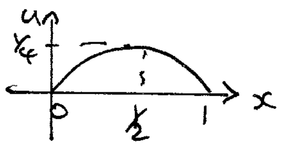
ב.

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$$
$$= \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\big(x+(1-x)\big)\,dx$$
$$= \int_0^1 x^{s}(1-x)^{t-1} + x^{s-1}(1-x)^{t}\,dx$$
$$= B(s+1,t) + B(s,t+1)$$

$\square$

$$B(s,s) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{s-1}\,dx$$
$$= \int_0^1 (x-x^2)^{s-1}\,dx$$

רוצים לעשות הצבה $u=x-x^2$



אבל ההעתקה $x\mapsto u$ לא חח"ע על $x\in[0,1]$

$$= 2\int_0^{1/2} (x-x^2)^{s-1}\,dx$$
$$= 2\int_0^{1/4} u^{s-1}\cdot \frac{du}{\sqrt{(1-4u)}}$$

$x\to u$ חח"ע $[0,\frac12]\to[0,\frac14]$

$$u = x-x^2$$
$$du = (1-2x)\,dx$$
$$\Rightarrow dx = \frac{du}{1-2x} = \frac{du}{\sqrt{(1-4u)}}$$

$y=1-4u$
$dy=-4du$

$$= 2\int_1^0 \left(\frac{1-y}{4}\right)^{s-1}\cdot\frac{-dy/4}{\sqrt{y}}$$
$$= \underbrace{2\cdot 4^{1-s}\cdot\frac14}_{2^{1-2s}}\underbrace{\int_0^1 y^{-1/2}(1-y)^{s-1}\,dy}_{B(\frac12,s)}$$

$\square$

ד. מטענה (א), $B(s,t)=\frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$

מטענה (ב), $B(s,s) = 2^{1-2s}B(\frac12,s)$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma(s)\cdot\Gamma(s)}{\Gamma(2s)} = 2^{1-2s}\frac{\Gamma(\frac12)\Gamma(s)}{\Gamma(s+\frac12)}$$
$$\Rightarrow \Gamma(2s) = 2^{2s-1}\frac{\Gamma(s)\Gamma(s+\frac12)}{\Gamma(\frac12)} = 2^{2s-1}/\sqrt{\pi}\;\Gamma(s)\Gamma(s+\tfrac12)$$

כי: $\Gamma(\frac12) = \int_0^\infty x^{-1/2}e^{-x}\,dx \overset{x=u^2}{=} \int_0^\infty \frac1u\cdot e^{-u^2}\cdot 2u\,du = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$