המשך של (20)...

<u>הערה</u>: לבדוק שמטריצה $\underline{\Phi}(t)$ היא מטריצה בסיסית למערכת של משוואות דיפרנציאליות $\dot{\underline{x}} = \underline{A}(t)\underline{x}$, צריך לבדוק ① $\dot{\underline{\Phi}} = \underline{A}\,\underline{\Phi}$

② $\det \underline{\Phi} \neq 0$

לדוגמה, $\underline{\Phi} = \exp(t\underline{A})$ מטריצה בסיסית ל- $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x}$

כאשר $\underline{A}$ מטריצה קבועה, כי ① $\frac{d}{dt}(\exp(t\underline{A})) = \underline{A}\exp(t\underline{A})$ (תרגיל 16)

② $\det(\exp(t\underline{A})) = e^{t\cdot tr(\underline{A})}$

כאשר $tr(\underline{A})$ הוא הסכום של הרכיבים של $\underline{A}$ באלכסון.

<u>הוכחה של ②</u>: $\det(\exp(t\underline{A})) = \det(\underline{P}\exp(t\underline{D})\underline{P}^{-1}) = \det(\exp(t\underline{D}))$

$$\underset{\text{מטריצה אלכסונית}}{\det(\exp(\underline{D}))} = \begin{vmatrix} e^{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{a_n} \end{vmatrix} = e^{a_1}\cdot e^{a_2}\cdots e^{a_n} = e^{a_1+\cdots+a_n} = e^{tr(\underline{D})}$$

$$\det\left(\exp\begin{pmatrix} \lambda t & t \\ 0 & \lambda t \end{pmatrix}\right) = \det\begin{vmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{vmatrix} = e^{\lambda t}\cdot e^{\lambda t} = e^{t\cdot tr\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}$$

ובסוף $tr(\underline{D}) = tr(\underline{P}\,\underline{D}\,\underline{P}^{-1}) \Leftarrow \det(\exp(t\underline{A})) = \det(\exp(t\underline{D})) = e^{t\cdot tr(\underline{D})} = e^{t\cdot tr(\underline{A})}$

$$\boxed{\neq 0}$$

---

21. א. $\underline{\Phi}$ מטריצה בסיסית למערכת $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} \Leftarrow \dot{\underline{\Phi}} = \underline{A}\,\underline{\Phi}$

$\underline{X} = \underline{\Phi}^{-1} \Leftarrow$ (19 ב) $\dot{\underline{X}} = -\underline{\Phi}^{-1}\dot{\underline{\Phi}}\,\underline{\Phi}^{-1}$

$$= -\underline{\Phi}^{-1}(\underline{A}\,\underline{\Phi})\underline{\Phi}^{-1} = -\underline{\Phi}^{-1}\underline{A} = -\underline{X}\,\underline{A} \checkmark$$

ב. $\underline{\Psi}$ גם מטריצה בסיסית $\Leftarrow \dot{\underline{\Psi}} = \underline{A}\,\underline{\Psi}$

נגדיר $\underline{B} = \underline{\Phi}^{-1}\underline{\Psi}$ — אנחנו צריכים להוכיח ש- $\underline{B}$ קבועה

$$\frac{d}{dt}(\underline{B}) = \frac{d}{dt}(\underline{X}\,\underline{\Psi}) = \dot{\underline{X}}\,\underline{\Psi} + \underline{X}\,\dot{\underline{\Psi}}$$

$$= (-\underline{X}\,\underline{A})\underline{\Psi} + \underline{X}(\underline{A}\,\underline{\Psi}) = 0$$

$\Leftarrow$ $\underline{B}$ קבועה ונכון $\underline{\Psi} = \underline{\Phi}\,\underline{B}$.

---

22. א. $\ddot{x} + 2x - x^2 - x^3 = 0 \underset{y=\dot{x}}{\Leftarrow}$ $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x^3 + x^2 - 2x \end{aligned}\right\}$

ב. נקודה שבת $\Leftarrow$ $\begin{cases} y = 0 \\ x(x-1)(x+2) = x^3 + x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftarrow$ $(0,0)$, $(1,0)$, $(-2,0)$

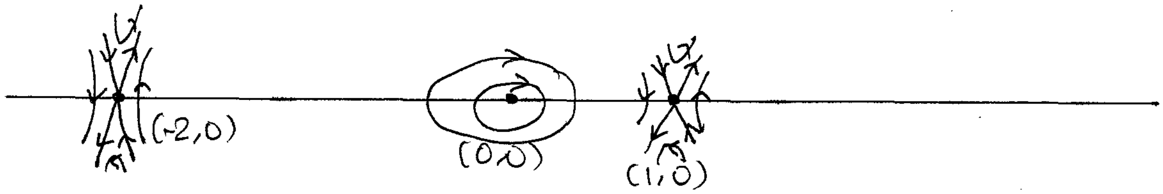
המערכת בצורה $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underline{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ כאשר $\underline{f}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x^3 + x^2 - 2x \end{pmatrix} \Rightarrow D\underline{f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3x^2 + 2x - 2 & 0 \end{pmatrix}$

המשך של (22ב) ...

$(0,0): \quad DF|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2+2=0$ מרכז

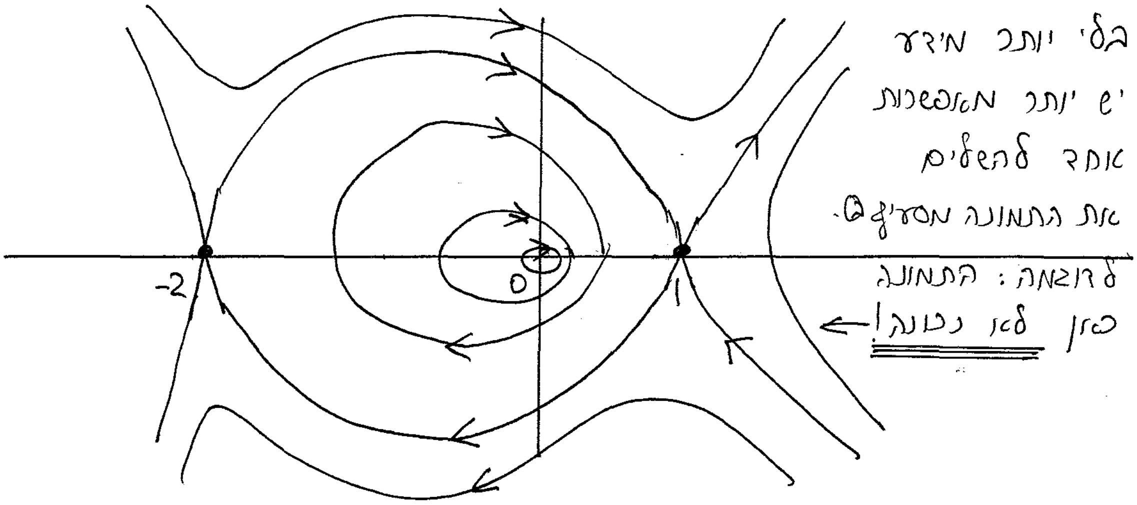
$(1,0): \quad DF|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2-3=0$ אוכף $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $\lambda=\pm\sqrt{3}$

$(-2,0): \quad DF|_{(-2,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda^2-6=0$ אוכף $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{6} \end{pmatrix}$ $\lambda=\pm\sqrt{6}$



הערה: $y=\dot{x}$ ⇐ בחצי העליון של המישור $(y>0)$, $\dot{x}>0$ ⇐ x עולה
זה דרך פשוטה למצוא את הכיוונים של הסדים.

ג. בלי יותר מידע יש יותר מאפשרות אחד לתשלים את התמונה מסעיף ב.
לדוגמה: התמונה כאן לא נכונה!



במקרה, המשוואה $\ddot{x} = x^3+x^2-2x$ היא בצורה של 3-5 ו'

$$\frac{dv}{dx}v = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dt} = \ddot{x} = x^3+x^2-2x \Leftarrow v=\dot{x} \quad (=y!)$$

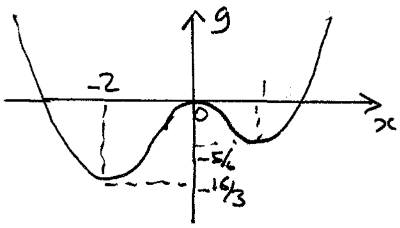
$$\int v\,dv = \int(x^3+x^2-2x)\,dx + \text{קבוע} \Leftarrow$$

$$v^2/2 = x^4/4 + x^3/3 - x^2 + \text{קבוע} \Leftarrow$$

$$\underline{\underline{v = \pm\sqrt{\left(\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-2x^2+C\right)}}} \Leftarrow$$

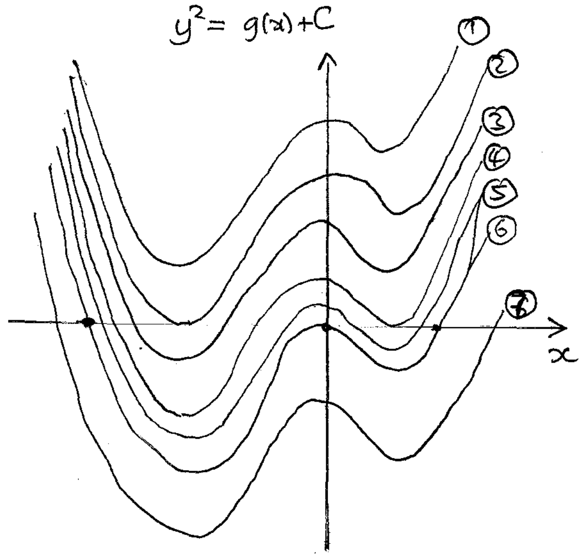
הפונקציה $g(x) = x^4/2 + 2x^3/3 - 2x^2$ כך ש- $g' = 2x^3+2x^2-4x$

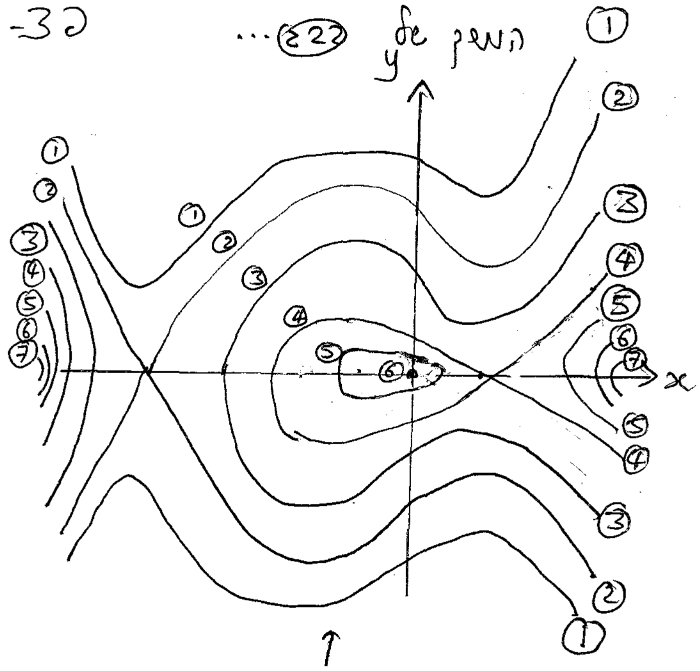
$x=0,-2,1 \Leftrightarrow g'=0$



37-32 פ

① המשך של (22ג)...

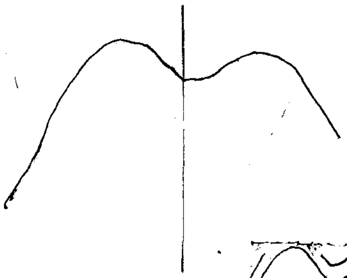




התמונה הנכונה

sepratrix : ②,④

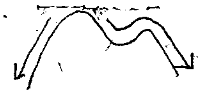
הערה: <u>המשמעות הפיזית</u> הדוגמא הזו היא תנועה תחת פוטנציאל (של $-g(x)$)

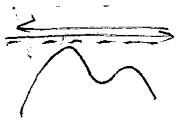


E = אנרגיה

תלוי ב- E איך נראה התנועה

(כמו ③) E קטן:  אז

(כמו ②,④) E יותר גדול:  או (sepratrix) 

(כמו ①) E גדול: 

---

23. א.

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - xy \\ \dot{y} = x - y^3 \end{cases}$$

$$\dot{x} = \dot{y} = 0 \Rightarrow \begin{cases} xy = 1 \\ x = y^3 \end{cases} \Rightarrow y^4 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

2 נקודות שווי משקל: $(1,1), (1,-1)$

$$\underline{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 1-xy \\ x-y^3 \end{pmatrix} \Rightarrow Df = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}$$

$\partial \underline{f}/\partial x$, $\partial \underline{f}/\partial y$

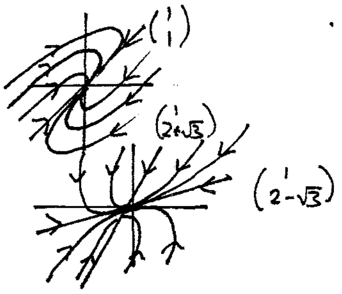
$$Df|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 \quad \lambda = -2,\ \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Df|_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 2 = (\lambda+1)^2 - 3 \quad \lambda = -1 \pm \sqrt{3},\ \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \mp \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

המשך של (23א)...

יציבה : $(1,1)$

יציבה : $(1,-1)$



ב. $\begin{cases} \dot x = x - x^2 - xy \\ \dot y = 3y - xy - 2y^2 \end{cases}$

$\dot x = \dot y = 0 \Leftarrow \begin{cases} x - x^2 - xy = 0 \\ 3y - xy - 2y^2 = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x=0 \text{ או } 1-x-y=0 \text{ או} \\ y=0 \text{ או } 3-x-2y=0 \text{ או} \end{cases} \Longrightarrow$ או $\begin{cases} x=0 \\ x+2y=3 \end{cases}$ או $\begin{cases} x+y=1 \\ x+2y=3 \end{cases}$ או $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ או $\begin{cases} x+y=1 \\ y=0 \end{cases}$

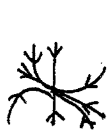
$\Longrightarrow$ או $x=0, y=3/2$ או $y=2, x=-1$ או $x=0, y=0$ או $y=0, x=1$

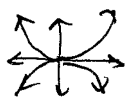
נקודות שיווי משקל: $(0,0),(0,3/2),(0,1),(-1,2)$

$\underline{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x-x^2-xy \\ 3y-xy-2y^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow D\underline{f} = \begin{pmatrix} 1-2x-y & -x \\ -y & 3-x-4y \end{pmatrix}$

$(-1,2): \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+3\lambda-2 \quad \lambda = -3/2 \pm \sqrt{17}/2$  לא יציב

$(0,1): \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+\lambda \quad \lambda=0,-1, \ \underline{v} = \binom{1}{-1}, \binom{0}{1}$  לא ברור

$(0,3/2): \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ -3/2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1/2-\lambda & 0 \\ -3/2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda+1/2) \quad \lambda=-3,-1/2, \ \underline{v} = \binom{0}{1}, \binom{5}{-3}$  יציב

$(0,0): \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \lambda = 1,3, \ \underline{v} = \binom{1}{0}, \binom{0}{1}$  לא יציב

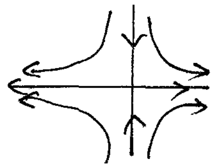
לנקודה $(0,1)$, הקירוב לינארי למערכת נותן מערכת עם נקודה שיווי משקל יציבה, אבל $\lambda=0$ הוא אחד מהערכים עצמיים ולכן אנחנו לא יודעים על היציבות של $(0,1)$ במערכת המקורית!

המשך של (23) ...

ג. $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x^3 - 2y \end{cases}$ $\Leftarrow$ $\dot{x} = \dot{y} = 0$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 2y = 0 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $x = y = 0$

$\underline{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ x^3 - 2y \end{pmatrix} \Leftarrow Df = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3x^2 & -2 \end{pmatrix}$

בנקודה $(0,0)$, $D\underline{f}|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$



לא יציב

ד. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x - cy \end{cases}$ $\Leftarrow$ $\dot{x} = \dot{y} = 0$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} y = 0 \\ -\sin x - cy = 0 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $\begin{matrix} x = n\pi \\ y = 0 \end{matrix}$

$\underline{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x - cy \end{pmatrix} \Leftarrow D\underline{f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -c \end{pmatrix}$

$D\underline{f}|_{(n\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & -c \end{pmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ (-1)^{n+1} & -\lambda - c \end{vmatrix} = \lambda^2 + c\lambda + (-1)^n$

$(n\pi, 0)$ (n זוגי): $D\underline{f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$ $\quad \lambda^2 + c\lambda + 1 = 0 \quad \lambda = -c/2 \pm \sqrt{c^2/4 - 1}$

$(n\pi, 0)$ (n אי זוגי): $D\underline{f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$ $\quad \lambda^2 + c\lambda - 1 = 0 \quad \lambda = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{c^2/4 + 1}$ לא יציב

(סיכום)

לא יציב: $(n\pi, 0)$ n אי זוגי

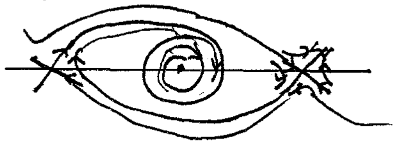
$(n\pi, 0)$ n זוגי: תלוי ב-c

$2 > c > 0$	$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib \quad a < 0$	יציב
$-2 < c < 0$	$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib \quad a > 0$	לא יציב
$c > 2$	$\lambda_1, \lambda_2 = -ve$	יציב
$c < -2$	$\lambda_1, \lambda_2 = +ve$	לא יציב
$c = 0$	$\lambda_1, \lambda_2 = \pm i$	לא ידוע
$c = 2$	$\lambda = -1$	יציב
$c = -2$	$\lambda = 1$	לא יציב

לא ידוע $c = 0$; לא יציב $c < 0$; יציב $c > 0$

<u>הערה</u>: המערכת שקולה ל- $\ddot{x} = -\sin x - c\dot{x}$

damped pendulum $\quad c > 0$ שיכוך



$\left(\begin{matrix} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{matrix} \Leftrightarrow \ddot{x} = -\sin x \right)$

יציב ב- $(n\pi, 0)$ n זוגי

ideal pendulum

24. א. $\ddot{y}-4\dot{y}+5y=e^t$

משוואה הומוגנית: $\ddot{y}-4\dot{y}+5y=0$

משוואה אופיינית: $\lambda^2-4\lambda+5=0$

$(\lambda-2)^2+1=0 \Leftarrow \lambda=2\pm i$

פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית: $y=e^{2t}(A\cos t+B\sin t)$

פתרון פרטי: $y=Ae^t$

$\dot{y}=\ddot{y}=Ae^t$

$\ddot{y}-4\dot{y}+5y=A(1-4+5)e^t=2Ae^t$

$A=\frac{1}{2} \Leftarrow y=\frac{1}{2}e^t$ פתרון פרטי

פתרון כללי: $\underline{\underline{y=\frac{1}{2}e^t+e^{2t}(A\cos t+B\sin t)}}$

ב. $\ddot{y}-5\dot{y}+4y=e^t$

משוואה הומוגנית: $\ddot{y}-5\dot{y}+4y=0$

$\lambda^2-5\lambda+4=0$

$(\lambda-1)(\lambda-4)=0 \Leftarrow \lambda=1,4$

פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית $y=Ae^t+Be^{4t}$

פתרון פרטי: $S(y)=e^t$ כאשר $S(y)=\ddot{y}-5\dot{y}+4y$

$S(e^t)=0$

$S(te^t)=(te^t+2e^t)-5(te^t+e^t)+4te^t=-3e^t$

$\Leftarrow y=-\frac{1}{3}te^t$ פתרון פרטי

פתרון כללי: $\underline{\underline{y=-\frac{1}{3}te^t+Ae^t+Be^{4t}}}$

ג. $\ddot{y}+2\dot{y}-8y=te^{2t}+t^2$

משוואה הומוגנית: $\ddot{y}+2\dot{y}-8y=0$

$\lambda^2+2\lambda-8=0$

$(\lambda+4)(\lambda-2)=0 \Leftarrow \lambda=2,-4$

פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית: $y=Ae^{2t}+Be^{-4t}$

המשך של (ב24) ...

פתרון פרטי: $S(y)=te^{2t}+t^2$ כאשר $S(y)=\ddot y+2\dot y-8y$

te^{2t} : $S(e^{2t})=0$

$$S(te^{2t}) = \underbrace{(t\cdot 4e^{2t}+2\cdot 2e^{2t})}_{(te^{2t})''}+2\underbrace{(t\cdot 2e^{2t}+e^{2t})}_{(te^{2t})'}-8te^{2t}$$
$$= 6e^{2t}$$

$$S(t^2e^{2t}) = \underbrace{(t^2\cdot 4e^{2t}+2\cdot 2t\cdot 2e^{2t}+2\cdot e^{2t})}_{(t^2e^{2t})''}+2\underbrace{(t^2\cdot 2e^{2t}+2t\cdot e^{2t})}_{(t^2e^{2t})'}-8t^2e^{2t}$$
$$=12te^{2t}+2e^{2t}$$

$$S\left(\tfrac{1}{12}t^2e^{2t}-\tfrac{1}{36}te^{2t}\right)=\tfrac{1}{12}(12te^{2t}+2e^{2t})-\tfrac{6}{36}e^{2t}=te^{2t}$$

t^2 : ננחש $y=At^2+Bt+C$

$\dot y = 2At+B$

$\ddot y = 2A$

$$S(y)=\ddot y+2\dot y-8y = 2A+2(2At+B)-8(At^2+Bt+C)$$
$$=-8At^2+(4A-8B)t+(2A+2B-8C)$$

$A=-1/8 \Leftarrow -8A=1$: t^2 מקדמים $\Leftarrow\ = t^2$

$B=\frac{A}{2}=-\frac{1}{16} \Leftarrow 4A-8B=0$: t

$C=\frac{A+B}{4} \Leftarrow 2A+2B-8C=0$: 1

$=-3/64$

פתרון פרטי:
$$y=\tfrac{1}{12}t^2e^{2t}-\tfrac{1}{36}te^{2t}-1/8\,t^2-1/16\,t-3/64$$

פתרון כללי:
$$y=Ae^{2t}+Be^{-4t}+\tfrac{1}{12}t^2e^{2t}-\tfrac{1}{36}te^{2t}-1/8\,t^2-1/16\,t-3/64$$

כאשר A,B קבועים (אין קשר עם A,B הנ"ל)

בדוק!

$$\dot y = 2Ae^{2t}-4Be^{-4t}+\tfrac{2}{6}t^2e^{2t}+\tfrac{1}{9}te^{2t}-\tfrac{1}{36}e^{2t}-1/4\,t-1/16$$

$$\ddot y = 4Ae^{2t}+16Be^{-4t}+\tfrac{1}{3}t^2e^{2t}+\tfrac{5}{9}te^{2t}+\tfrac{1}{18}e^{2t}-\tfrac{1}{4}$$

$$\ddot y+2\dot y-8y = (4A+4A-8A)e^{2t}+(16B-8B-8B)e^{-4t}$$
$$+(1/3+2/6-8/12)t^2e^{2t}+(5/9+2/9+8/36)te^{2t}$$
$$+(1/18-2/36)e^{2t}+8/8\,t^2+(-2/4+8/16)t+(-2/16+8\cdot 3/64)$$
$$= te^{2t}+t^2$$

המשך של (24)...

ב. $\ddot{y}-2\dot{y}+5y=t+e^t\cos 2t$

משוואה הומוגנית: $\ddot{y}-2\dot{y}+5y=0$ $(\lambda^2-2\lambda+5=0 \Leftarrow \lambda=1\pm 2i)$

פתרון כללי $y=e^t(A\cos 2t+B\sin 2t)$

פתרון פרטי: $S(y)=t+e^t\cos 2t$ כאשר $S(y)=\ddot{y}-2\dot{y}+5y$

בצורה $y=At+B+te^t(C\cos 2t+D\sin 2t)$

t

$$\left.\begin{aligned} S(t)&=0-2\cdot 1+5\cdot t=5t-2\\ S(1)&=0-2\cdot 0+5\cdot 1=5\end{aligned}\right\} \Rightarrow S\left(\tfrac{t}{5}+\tfrac{2}{25}\right)=\tfrac{1}{5}(5t-2)+\tfrac{2}{25}\cdot 5=t$$

$e^t\cos 2t$

$S(te^t\cos 2t)=\,?$ $\qquad S(te^t\sin 2t)=\,?$

$$y=te^t\cos 2t \Rightarrow \dot{y}=e^t\cos 2t+te^t\cos 2t-2te^t\sin 2t$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}&=(e^t\cos 2t-2e^t\sin 2t)\\ &\quad+(e^t\cos 2t+te^t\cos 2t-2te^t\sin 2t)\\ &\quad-2(e^t\sin 2t+te^t\sin 2t+2te^t\cos 2t)\\ &=2e^t\cos 2t-4e^t\sin 2t-3te^t\cos 2t-4te^t\sin 2t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow S(te^t\cos 2t)&=(2e^t\cos 2t-4e^t\sin 2t-3te^t\cos 2t-4te^t\sin 2t)\\ &\quad-2(e^t\cos 2t+te^t\cos 2t-2te^t\sin 2t)\\ &\quad+5te^t\cos 2t\\ &=\underline{\underline{-4e^t\sin 2t}}\end{aligned}$$

$$y=te^t\sin 2t \Rightarrow \dot{y}=e^t\sin 2t+te^t\sin 2t+2te^t\cos 2t$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}&=(e^t\sin 2t+2e^t\cos 2t)\\ &\quad+(e^t\sin 2t+te^t\sin 2t+2te^t\cos 2t)\\ &\quad+2(e^t\cos 2t+te^t\cos 2t-2te^t\sin 2t)\\ &=2e^t\sin 2t+4e^t\cos 2t-3te^t\sin 2t+4te^t\cos 2t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow S(te^t\sin 2t)&=(2e^t\sin 2t+4e^t\cos 2t-3te^t\sin 2t+4te^t\cos 2t)\\ &\quad-2(e^t\sin 2t+te^t\sin 2t+2te^t\cos 2t)+5te^t\sin 2t\\ &=\underline{\underline{4e^t\cos 2t}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad S\left(\tfrac{1}{4}te^t\sin 2t\right)=e^t\cos 2t$$

$y=\frac{t}{5}+\frac{2}{25}+\frac{1}{4}te^t\sin 2t$ פתרון פרטי

$\underline{y=e^t(A\cos 2t+B\sin 2t)+\frac{t}{5}+\frac{2}{25}+\frac{1}{4}te^t\sin 2t}$: פתרון כללי

המשך של (ג24) ...

<u>דרך אחרת:</u> $e^t\cos 2t = \mathcal{R}(e^{(1+2i)t})$

$(1+2i)$ פתרון של המשוואה האופיינית, לכן נעשה פתרון פרטי

ל- $S(y)=e^{(1+2i)t}$ בצורה $y = Ate^{(1+2i)t}$

$$\Rightarrow \dot y = A\left(e^{(1+2i)t} + (1+2i)te^{(1+2i)t}\right)$$

$$\ddot y = A\left(2e^{(1+2i)t}(1+2i) + (1+2i)^2te^{(1+2i)t}\right)$$

$$\Rightarrow \ddot y - 2\dot y + 5y = Ae^{(1+2i)t}\left\{(2(1+2i)+(1+2i)^2t) - 2(1+(1+2i)t) + 5t\right\}$$

$$= Ae^{(1+2i)t}\{4i + (\underbrace{(1+2i)^2}_{-3+4i}\underbrace{-2(1+2i)}_{-2-4i}\underbrace{+5}_{+5})t\}$$

$$= 4iAe^{(1+2i)t}$$

$$4iA = 1 \Rightarrow A = 1/4i = -i/4$$

לכן $y=-i/4\ te^{(1+2i)t}$ פתרון פרטי של $S(y)=e^{(1+2i)t}$

(החלק הממשי) $\Leftarrow$ $y=\mathcal{R}(-\frac{i}{4}te^{(1+2i)t})$ פתרון פרטי של $S(y)=e^t\cos 2t$

$$= t/4\ e^t\sin 2t$$

ה. $\ddot y + 2\dot y - 8y = te^{2t}+t^2$ $\Leftarrow$ (3)

$$y = Ae^{2t} + Be^{-4t} + \tfrac{1}{12}t^2e^{2t} - \tfrac{1}{36}te^{2t} - 1/8\ t^2 - 1/16\ t - 3/64$$

$$\dot y = 2Ae^{2t} - 4Be^{-4t} + 1/6\ t^2e^{2t} + 1/9\ te^{2t} - 1/36\ e^{2t} - 1/4\ t - 1/16$$

$$\Rightarrow y(0) = A + B - 3/64 = -3/32 \Rightarrow A+B = -3/64$$

$$\dot y(0) = 2A - 4B \underbrace{- 1/36 - 1/16}_{-13/144} = 1/288 \Rightarrow 2A-4B = \tfrac{13}{144} + \tfrac{1}{288} = \tfrac{27}{288} = \tfrac{3}{32}$$

$$\Rightarrow A = -1/64,\quad B = -1/32$$

$$\underline{\underline{y = -1/64\ e^{2t} - 1/32\ e^{-4t} + t^2/12\ e^{2t} - t/36\ e^{2t} - t^2/8 - t/16 - 3/64}}$$

<u>ו.</u> $\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix}e^t\\ t\end{pmatrix}$

משוואה הומוגנית: $\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

$$(\lambda-4)(\lambda+1) = \lambda^2-3\lambda-4 = \begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$\lambda = 4,\ -1$

$\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix}3 & 3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0}$

$\underline{v} \parallel \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\underline{v} \parallel \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $e^{4t}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\ e^{-t}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ פתרונות

$\Phi^{-1} = e^{-3t}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}e^{-t} & e^{-t}\\ -2e^{4t} & 3e^{4t}\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ מטריצה בסיסית $\Phi = \begin{pmatrix}3e^{4t} & -e^{-t}\\ 2e^{4t} & e^{-t}\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$

$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix}e^{-4t} & e^{-4t}\\ -2e^{t} & 3e^{t}\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\det\Phi = 5e^{3t}$

המשך של (124) ...

פתרון למשוואה $\underline{\dot{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}$ הוא $\underline{x} = \underline{\Phi} \cdot \left(\int \underline{\Phi}^{-1} \underline{b} \; dt\right)$

$\underline{b} = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} \Leftarrow$ פתרון פרטי

$$\underline{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{4t} & -e^{-t} \\ 2e^{4t} & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \int \begin{pmatrix} e^{-4t} & e^{-4t} \\ -2e^{t} & 3e^{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} dt$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{4t} & -e^{-t} \\ 2e^{4t} & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \int \begin{pmatrix} e^{-3t} + te^{-4t} \\ -2e^{2t} + 3te^{t} \end{pmatrix} dt$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3e^{4t} & -e^{-t} \\ 2e^{4t} & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} -\frac{t}{4}e^{-4t} - \frac{1}{16}e^{-4t} - \frac{1}{3}e^{-3t} \\ 3te^{t} - 3e^{t} - e^{2t} \end{pmatrix} + \text{קבוע} \right)$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -\frac{15t}{4} + \frac{45}{16} \\ -\frac{5}{3}e^t + \frac{5t}{2} - \frac{25}{8} \end{pmatrix}$$

פתרון כללי:

$$\underline{x}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -3t/4 + 9/16 \\ -\frac{1}{3}e^t + t/2 - 5/8 \end{pmatrix}}_{\text{פתרון פרטי}} + Ae^{4t}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + Be^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

בדיקת פתרון פרטי:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\underline{x} = \begin{pmatrix} -e^t - 3/4 \\ -\frac{1}{3}e^t - t + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\dot{x}} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\underline{x} = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

ג. $\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$

משוואה הומוגנית: $\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\underline{x}$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Leftarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda = \pm i \qquad \begin{pmatrix} 1-i & 2 \\ -1 & -1-i \end{pmatrix}\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} \parallel \begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{it}\begin{pmatrix} 1+i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-\sin t + \cos t) + i(\cos t + \sin t) \\ -\cos t - i\sin t \end{pmatrix}$$

$$\underline{\Phi}^{-1} = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t - \sin t \\ \cos t & -\sin t + \cos t \end{pmatrix} \Leftarrow \underline{\Phi} = \begin{pmatrix} -\sin t + \cos t & \cos t + \sin t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}$$

$$(\det \underline{\Phi} = 1)$$

פתרון פרטי: $\underline{x}(t) = \underline{\Phi}\left(\int \underline{\Phi}^{-1}\underline{b} \; dt\right)$

$$\int \underline{\Phi}^{-1}\underline{b}\, dt = \int \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t - \sin t \\ \cos t & -\sin t + \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} dt = \int \begin{pmatrix} \sin^2 t \\ 1 - \sin t \cos t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t/2 - \frac{1}{4}\sin 2t \\ t + \frac{1}{4}\cos 2t \end{pmatrix} + \text{קבוע}$$

פתרון פרטי:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t + \cos t & \cos t + \sin t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t/2 - \frac{1}{4}\sin 2t \\ t + \frac{1}{4}\cos 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(\frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t) + \frac{1}{4}(\cos t - \sin t) \\ t(-\frac{1}{2}\cos t - \sin t) + \frac{1}{4}\sin t \end{pmatrix}$$

פתרון כללי:

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} t(\frac{3}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t) + \frac{1}{4}(\cos t - \sin t) \\ t(-\frac{1}{2}\cos t - \sin t) + \frac{1}{4}\sin t \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} -\sin t + \cos t \\ -\cos t \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$$

בדיקה:

$$\underline{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} t(-\frac{3}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t) + \frac{5}{4}\cos t + \frac{1}{4}\sin t \\ t(\frac{1}{2}\sin t - \cos t) - \frac{1}{4}\cos t - \sin t \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} -\cos t - \sin t \\ \sin t \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\underline{x} = \begin{pmatrix} t(-\frac{3}{2}\sin t + \frac{1}{2}\cos t) + \frac{1}{4}\cos t + \frac{1}{4}\sin t \\ t(\frac{1}{2}\sin t - \cos t) - \frac{1}{4}\cos t \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} -\sin t - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\dot{x}}(t) - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\underline{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

המשך של (24) ...

ח. $\dot{x} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}\csc t\\ \sec t\end{pmatrix}$

$\Leftarrow (3)$ $\Phi = \begin{pmatrix}-\sin t+\cos t & \cos t+\sin t\\ -\cos t & -\sin t\end{pmatrix}$, $\Phi^{-1} = \begin{pmatrix}-\sin t & -\cos t-\sin t\\ \cos t & -\sin t+\cos t\end{pmatrix}$

פתרון פרטי:

$$x(t) = \Phi\cdot\left(\int \Phi^{-1} b\, dt\right)$$
$$= \Phi\cdot\int \begin{pmatrix}-\sin t & -\cos t-\sin t\\ \cos t & -\sin t+\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\csc t\\ \sec t\end{pmatrix} dt$$
$$= \Phi\cdot\int \begin{pmatrix}-2-\tan t\\ \cot t-\tan t+1\end{pmatrix} dt$$
$$= \Phi\cdot\begin{pmatrix}-2t+\ln(\cos t)\\ \ln(\sin t)+\ln(\cos t)+t\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}t(3\sin t-\cos t)+2\cos t\ln(\cos t)+(\cos t+\sin t)\ln(\sin t)\\ t(2\cos t-\sin t)-(\cos t+\sin t)\ln(\cos t)-(\sin t)\ln(\sin t)\end{pmatrix}}}$$

בדיקה:
$$\dot{x} = \begin{pmatrix}(3\sin t-\cos t)+t(\sin t+3\cos t)+2(-\sin t)\ln(\cos t)+(\cos t-\sin t)\ln(\sin t)-2\sin t+\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t}+\cos t\right)\\ (2\cos t-\sin t)+t(-\cos t-2\sin t)+(\sin t-\cos t)\ln(\cos t)-\cos t\ln(\sin t)+\left(\sin t+\frac{\sin^2 t}{\cos t}\right)-\cos t\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}x = \begin{pmatrix}t(\sin t+3\cos t)-2\sin t\ln(\cos t)+(\cos t-\sin t)\ln(\sin t)\\ t(-\cos t-2\sin t)+(\sin t-\cos t)\ln(\cos t)-\cos t\ln(\sin t)\end{pmatrix} \quad ✓$$

ט. $\dot{x} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}e^{2t}\\ t\end{pmatrix}$

משוואה הומוגנית $\dot{x} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}x$ $\quad \begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2$

$$\lambda=2: \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}v = 0 \Leftarrow v = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}w = v \Leftarrow w = \begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$$

פתרונות $e^{2t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$, $\quad x = te^{2t}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$

מטריצה בסיסית $\Phi = \begin{pmatrix}e^{2t} & e^{2t}(t-1)\\ -e^{2t} & -te^{2t}\end{pmatrix} \Rightarrow \Phi^{-1} = \begin{pmatrix}te^{-2t} & e^{-2t}(t-1)\\ -e^{-2t} & -e^{-2t}\end{pmatrix}$

$$\det\Phi = -e^{4t}$$

פתרון פרטי

$$x(t) = \Phi\cdot\left(\int\Phi^{-1}b\,dt\right) = \Phi\cdot\int e^{-2t}\begin{pmatrix}t & t-1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t}\\ t\end{pmatrix} dt$$
$$= \Phi\cdot\int e^{-2t}\begin{pmatrix}te^{2t}+t^2-t\\ -e^{2t}-t\end{pmatrix} dt$$
$$= \Phi\cdot\int\begin{pmatrix}t+(t^2-t)e^{-2t}\\ -1-te^{-2t}\end{pmatrix} dt$$
$$= \Phi\begin{pmatrix}t^2/2+(t^2/2+t/2)e^{-2t}+(-t/2+1/4)e^{-2t}-1/4\,e^{-2t}\\ -t+t/2\,e^{-2t}+1/4\,e^{-2t}\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & t-1\\ -1 & -t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t^2/2\,e^{2t}-t^2/2\\ -te^{2t}+t/2+1/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(t-t^2/2)e^{2t}-t/4-1/4\\ t^2/2\,e^{2t}-t/4\end{pmatrix}$$

בדיקה!
$$\dot{x} = \begin{pmatrix}(2t-t^2)e^{2t}+(1-t)e^{2t}-1/4\\ t^2e^{2t}+te^{2t}-1/4\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}x = \begin{pmatrix}(t-t^2)e^{2t}-1/4\\ (t+t^2)e^{2t}-t-1/4\end{pmatrix} \quad ✓$$

פתרון כללי:
$$\underline{\underline{x = \begin{pmatrix}(t-t^2/2)e^{2t}-1/4(1+t)+e^{2t}(A+B(t-1))\\ t^2/2\,e^{2t}-t/4-e^{2t}(A+Bt)\end{pmatrix}}}$$

המשך של 24 ...

.1 $t\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix}t\\1-t^2\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\dot{x}} = \frac{1}{t}\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix}1\\1/t-t\end{pmatrix}$

משוואה הומוגנית: $t\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}\underline{x}$: $\begin{vmatrix}2-\lambda&3\\2&1-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-3\lambda-4 = (\lambda-4)(\lambda+1)$

$$\lambda=4 \quad \begin{pmatrix}-2&3\\2&-3\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0} \Rightarrow \underline{v}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\lambda=-1 \quad \begin{pmatrix}3&3\\2&2\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0} \Rightarrow \underline{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

פתרונות $\underline{x} = t^4\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},\ t^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

מטריצה בסיסית: $\Phi = \begin{pmatrix}3t^4 & t^{-1}\\ 2t^4 & -t^{-1}\end{pmatrix} \Rightarrow \det\Phi = -5t^3$

$$\Phi^{-1} = -\frac{1}{5t^3}\begin{pmatrix}-t^{-1} & -t^{-1}\\ -2t^4 & 3t^4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac15 t^{-4} & \frac15 t^{-4}\\ \frac25 t & -\frac35 t\end{pmatrix}$$

פתרון פרטי:

$$\underline{x} = \Phi\int\Phi^{-1}\underline{b}\,dt = \Phi\cdot\int\begin{pmatrix}\frac15 t^{-4} & \frac15 t^{-4}\\ \frac25 t & -\frac35 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1/t-t\end{pmatrix}dt$$

$$= \Phi\int\begin{pmatrix}\frac15 t^{-4}+\frac15 t^{-5}-\frac15 t^{-3}\\ \frac25 t-\frac35+\frac35 t^2\end{pmatrix}dt$$

$$= \begin{pmatrix}3t^4 & t^{-1}\\ 2t^4 & -t^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac1{15}t^{-3}-\frac1{20}t^{-4}+\frac1{10}t^{-2}\\ \frac15 t^2-\frac35 t+\frac15 t^3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\frac15 t-\frac3{20}+\frac3{10}t^2+\frac15 t-\frac35+\frac15 t^2\\ -\frac2{15}t-\frac1{10}+\frac15 t^2-\frac15 t+\frac35-\frac15 t^2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\frac34+\frac12 t^2\\ -\frac t3+\frac12\end{pmatrix}$$

בדיקה!

$$t\underline{\dot{x}} = t\begin{pmatrix}t\\-\frac13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t^2\\-\frac t3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}\underline{x} = \begin{pmatrix}-\frac32+t^2-t+\frac32\\ -\frac32+t^2-\frac t3+\frac12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t^2-t\\ t^2-\frac t3-1\end{pmatrix}$$

פתרון כללי:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix}-\frac34+\frac{t^2}2 + 3At^4 + \frac Bt\\ -\frac t3+\frac12 + 2At^4 - \frac Bt\end{pmatrix}$$

.25 א. דרך שיטת וואריאציה של פרמטרים, מציאת פתרון בפועל

$$y = v_1y_1+v_2y_2$$

$$y' = v_1y_1'+v_2y_2' + \underbrace{v_1'y_1+v_2'y_2}_{\text{נבחר } = 0}$$

$$y'' = v_1y_1''+v_2y_2''+v_1'y_1'+v_2'y_2'$$

$$y''+ay'+by = v_1'y_1'+v_2'y_2'$$

$y_1''+ay_1'+by_1 = y_2''+ay_2'+by_2 = 0$

מכאן כאילו שמציאת פתרון היא $\left.\begin{matrix}v_1'y_1+v_2'y_2 = 0\\ v_1'y_1'+v_2'y_2' = f\end{matrix}\right\}$

המשך של (25) ...

$$\Leftarrow \begin{cases} v_1' = \dfrac{-y_2\cdot f}{W} \\ v_2' = \dfrac{y_1\cdot f}{W} \end{cases} \quad \text{כאשר} \quad W=W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad v_1(x) = -\int_{x_0}^{x} \frac{y_2(u)f(u)}{W(u)}\,du + \text{קבוע}$$

$$v_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(u)f(u)}{W(u)}\,du + \text{קבוע}$$

$$\Rightarrow y = v_1y_1 + v_2y_2 = \int_{x_0}^{x} -\frac{y_2(u)f(u)}{W(u)}\,y_1(x) + \frac{y_1(u)f(u)}{W(u)}\,y_2(x)\,du + \underbrace{\begin{pmatrix}\text{צירוף} \\ \text{לינארי} \\ \text{של } v_1, v_2\end{pmatrix}}_{\text{פתרון כללי למשוואה ההומוגנית}}$$

$$= \int_{x_0}^{x} \underbrace{K(x,u)}_{\displaystyle \frac{y_1(u)y_2(x) - y_2(u)y_1(x)}{W(u)}} f(u)\,du \quad \checkmark$$

$$K(x,u) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(u) & y_2(u) & y_3(u) \\ y_1'(u) & y_2'(u) & y_3'(u) \\ y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \end{vmatrix}}{W(y_1,y_2,y_3)(u)} \quad (n=3)$$

הערה גם למשוואה מסדר >2, קיים נוסחה לפתרון פרטי לאותו צורה

. ב: משוואה הומוגנית:

$$-xy'' + 2(x-1)y' + (2-x)y = 0$$

פתרון $y_1 = e^x$

$$\begin{cases} y = v\cdot e^x \\ y' = (v+v')e^x \\ y'' = (v+2v'+v'')e^x \end{cases} \Rightarrow -x(v''+2v'+v) + 2(x-1)(v'+v) + (2-x)v = 0$$

$$-xv'' - 2v' = 0$$

$$\frac{v''}{v'} = -2/x$$

$$\ln v' = -2\ln x + \text{קבוע}$$

$$v' = \text{קבוע}/x^2$$

$$v = \text{קבוע}/x$$

פתרון שני: $y_2 = e^x/x$

בדוק: $y_2' = -\dfrac{e^x}{x^2} + \dfrac{e^x}{x} \Rightarrow y_2'' = 2/x^3\, e^x - 2/x^2\, e^x + 1/x\, e^x$

$$-xy_2'' + 2(x-1)y_2' + (2-x)y_2 = e^x\left(-2/x^2 + 2/x - 1 + 2(x-1)(1/x - 1/x^2) + 2/x - 1\right) = 0 \checkmark$$

סעיף (ג) $\Rightarrow$ פתרון פרטי ל- $-xy'' + 2(x-1)y' + (2-x)y = f(x)$

$$\left(\Leftrightarrow y'' + 2(1/x - 1)y' + (1 - 2/x)y = -\frac{f(x)}{x}\right)$$

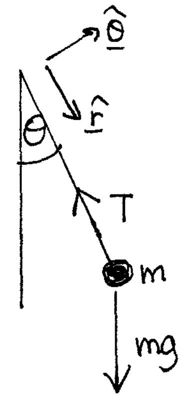
הוא $$y(x) = -\int_{x_0}^{x} K(x,u)\,\frac{f(u)}{u}\,du$$

כאשר: $$K(x,u) = \frac{y_1(u)y_2(x) - y_1(x)y_2(u)}{W(u)}$$

$$= \frac{e^u e^x/x - e^x\cdot e^u/u}{\begin{vmatrix} e^u & e^u/u \\ e^u & e^u(1/u - 1/u^2) \end{vmatrix}} = -u^2e^{-2u}(e^{u+x})(1/x - 1/u)$$

$$= -e^{x-u}(u^2/x - u)$$

פתרון פרטי: $$y(x) = \int_{x_0}^{x} (1 - u/x)\,e^{x-u}\,f(u)\,du$$



26. א.

בקואורדינטות כותביות, צ"א לפי $(\hat r, \hat\theta)$

⊛ $$m \frac{d^2}{dt^2}(l\hat r) = \underbrace{-T\hat r + \begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix}}_{\text{כוח}}$$

אבל $d\hat r/dt = \dot\theta\,\hat\theta$

$$\Leftarrow \quad d^2\hat r/dt^2 = \ddot\theta\,\hat\theta + \dot\theta\, d\hat\theta/dt = \ddot\theta\,\hat\theta - \dot\theta^2\,\hat r$$

מכאן, ⊛ $\Leftarrow$ $$ml(\ddot\theta\,\hat\theta - \dot\theta^2\hat r) = -T\hat r + \begin{pmatrix}0\\-mg\end{pmatrix}$$

רכיבים $\parallel \hat r$: $-ml\dot\theta^2 = -T + mg\cos\theta$

רכיבים $\parallel \hat\theta$: $-ml\ddot\theta = mg\sin\theta$

צ"א ① $T = ml\dot\theta^2 + mg\cos\theta$ נכון כשר המתח בחוט (T) חיובי

② $\ddot\theta = -\frac{g}{l}\sin\theta$

ב.

$$v\frac{dv}{d\theta} = \frac{dv}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dv}{dt} = -\frac{g}{l}\sin\theta \overset{②}{\Leftarrow} v = \dot\theta$$

$$\int v\,dv = \int -\frac{g}{l}\sin\theta\,d\theta + \text{קבוע}$$

$$\Leftarrow \quad \tfrac12 v^2 = \frac{g}{l}\cos\theta + \text{קבוע}\,(C)$$

תנאי התחלה $\theta(0)=0,\ v(0)=\omega \Leftarrow \frac12\omega^2 = \frac{g}{l} + C \Leftarrow C = \frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{l}$

$$\tfrac12(\dot\theta)^2 = \frac{g}{l}\cos\theta + \frac{\omega^2}{2} - \frac{g}{l}$$

$$\Leftarrow \quad \underline{\underline{\dot\theta^2 - \frac{2g}{l}\cos\theta = \omega^2 - \frac{2g}{l}}}$$

ג.

① $\Leftarrow$ $$T = ml\dot\theta^2 + mg\cos\theta$$
$$= ml\left(\frac{2g}{l}\cos\theta + \omega^2 - \frac{2g}{l}\right) + mg\cos\theta$$
$$= \underline{\underline{3mg\cos\theta + (ml\omega^2 - 2mg)}}$$

סעיף ② $\Leftarrow$ הזווית המקסימלי θ_{max} היא כך ש- $\dot\theta = 0$

$$\frac{2g}{l}\cos\theta_{max} = \frac{2g}{l} - \omega^2 \Rightarrow \cos\theta_{max} = 1 - \frac{l\omega^2}{2g} \qquad (\omega^2 < 4g/l)$$

$\omega^2 \geq 4g/l \Leftarrow$ אין θ_{max}

49 - פב

המשך של (26ב) ...

אנחנו רוצים לדעת תנאי על ω כך שלכל ערכים של θ שאפשרי, $T \ge 0$, צ"ל $\cos\theta \ge 2/3 - L\omega^2/3g$

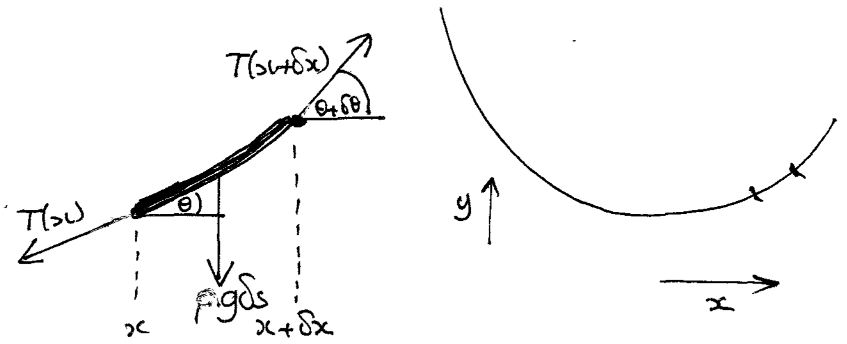
או $\omega^2 < 4g/L$ ולכן $1 - L\omega^2/2g \ge 2/3 - L\omega^2/3g \iff 1/3 \ge L\omega^2/6g \iff \omega^2 \le 2g/L$

או $\omega^2 > 4g/L$ ולכן $-1 \ge 2/3 - L\omega^2/3g \iff 5/3 \le L\omega^2/3g \iff \omega^2 \ge 5g/L$

התנאי: $\omega^2 \le 2g/L$ או $\omega^2 \ge 5g/L$

כאשר $g/L < \omega^2 < 2g/L$, קיים נקודה $\cos\theta_0 = \frac{2}{3} - \frac{L\omega^2}{3g}$ כאשר $T=0$
ואחר כך אני אפשר להשתמש במשוואות התנועה כבתוב בסעיף (ג).

27.



א. על החלק של השרשרת בין x ובין x+δx, יש 3 כוחות בשיווי משקל
$T(x)$, $T(x+\delta x)$ וכוח הכובד $\rho g \delta s$ (על כל האורך של החלק).

רכיב || ציר x: $T(x)\cos\theta = T(x+\delta x)\cos(\theta+\delta\theta)$ ①

רכיב || ציר y: $-T(x)\sin\theta + T(x+\delta x)\sin(\theta+\delta\theta) = \rho g \delta s$ ②

① $\Leftarrow$ $T(x)\cos\theta(x)$ לא תלוי ב- x, נניח $T(x)\cos\theta = T$ $(T(x) = T\sec\theta)$

② $\Leftarrow$ $-T\tan\theta + T\tan(\theta+\delta\theta) = \rho g \delta s$

$\Leftarrow$ $T\,\delta(\tan\theta) = \rho g \delta s$

$$\left\{\begin{aligned} \delta s &= \sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2)} \\ &= \delta x \sqrt{(1+\tan^2\theta)} \\ &= \delta x \sqrt{(1+(dy/dx)^2)} \end{aligned}\right. , \quad \tan\theta = dy/dx \quad \left(\delta(\tan\theta) = d^2y/dx^2\, \delta x\right)$$

ומשום מקבלים $T\, d^2y/dx^2 = \rho g \sqrt{(1+(dy/dx)^2)}$

$$\underline{\underline{y'' = \frac{\rho g}{T}\sqrt{(1+(y')^2)}}}$$

המשך של (27)...

ב. נסמן אות $v = y'$:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\rho g}{T}\sqrt{(1+v^2)}$$

בת - הפרדה

$$\int \frac{dv}{\sqrt{(1+v^2)}} = \int \frac{\rho g}{T}\, dx + \text{קבוע}$$

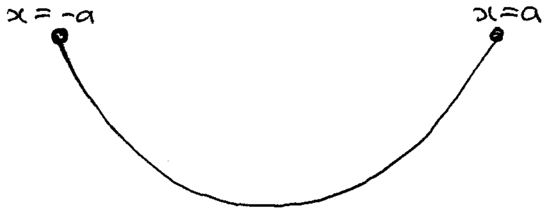
$$\sinh^{-1} v = \rho g x/T + \text{קבוע}$$

$$y' = v = \sinh\left(\frac{\rho g x}{T} + A\right)$$

$$y = T/\rho g \cosh\left(\frac{\rho g x}{T} + A\right) + \text{קבוע}$$

$$\Leftarrow \quad \underline{\underline{\rho g y/T = \cosh(\rho g x/T + A) + B}} \quad (3)$$

ג.



$(\rho = M/L)$

תנאי שפה: $y(a)=y(-a)=0$

במשוואה (3), יש 3 מספרים קבועים (A, B, T)

עוד תנאי: אורך השרשרת הוא L:

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{(1+(y')^2)}\, dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \sqrt{(1+\sinh^2(\frac{\rho g x}{T} + A))}\, dx$$

$$= \int_{-a}^{a} \cosh\left(\frac{\rho g x}{T} + A\right) dx$$

$$= \left[\frac{T}{\rho g}\sinh\left(\frac{\rho g x}{T} + A\right)\right]_{-a}^{a}$$

$$= T/\rho g \left(\sinh\left(A + \frac{\rho g a}{T}\right) - \sinh\left(A - \frac{\rho g a}{T}\right)\right)$$

$$= 2T/\rho g \cosh A \sinh\left(\frac{\rho g a}{T}\right) \quad (4)$$

$$\cosh\left(\frac{\rho g a}{T} + A\right) = \cosh\left(-\frac{\rho g a}{T} + A\right) \quad \Leftarrow \quad y(a)=y(-a)$$

$$\cosh\left(\frac{\rho g a}{T} + A\right) - \cosh\left(-\frac{\rho g a}{T} + A\right) = 0 \quad \Leftarrow$$

$$2\sinh\frac{\rho g a}{T} \sinh A = 0 \quad \Leftarrow$$

(כצפוי מסימטריה) $A = 0 \Leftarrow \sinh A = 0 \Leftarrow$

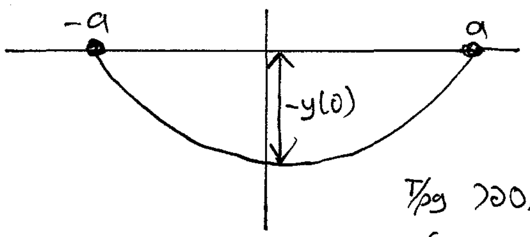
$$\underline{\underline{\rho g L/2T = \sinh(\rho g a/T)}} \quad \Leftarrow (4)$$

T -פתרון יחיד ל $\Leftarrow L \geq 2a$

$$y(x) = T/\rho g \left(\cosh(\rho g x/T) - \cosh(\rho g a/T)\right) \quad \Leftarrow (3) \quad (y(a)=0)$$

המשך של (דבג) ...

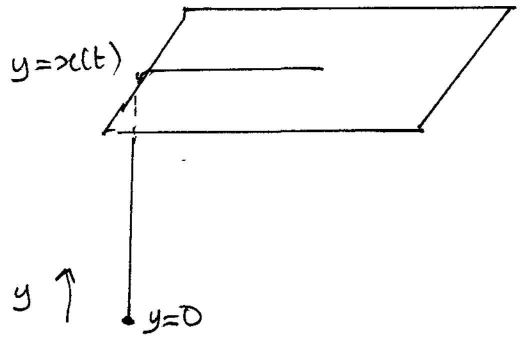
באמצע השרשרת, $\underline{\underline{-y(0) = T/\rho g\left(\cosh\left(\frac{\rho g a}{T}\right)-1\right)}}$



<u>הערה</u> לכן הצורה של השרשרת הוא הצורה של הפונקציה $\cosh x$ עד כדי הזזות ומתיחה (פי אותו מספר $T/\rho g$ בכיוונים x,y)

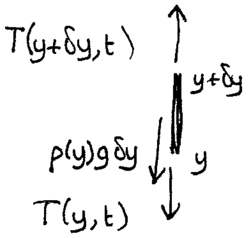
<u>הערה</u> בשאלה (כפ), יש דוגמה פיזית של בעיית שפה $(y(a)=y(-a)=0)$ במקרה יש פתרון יחיד, אבל זה לא תמיד נכון.

<u>28.</u>



<u>א.</u> כוחות על חלק קטן $[y,y+\delta y]$

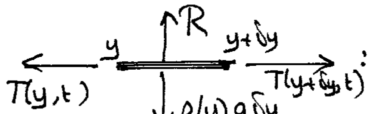
<u>$y<x(t)$</u>:



$$(\rho(y)\,\delta y)\,\ddot{x} = \rho(y) g\,\delta y + T(y,t) - T(y+\delta y,t)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\partial T/\partial y = g\rho(y) - \ddot{x}\rho(y)}}$$

<u>$y>x(t)$</u>:



$$(\rho(y)\,\delta y)\,\ddot{x} = T(y,t) - T(y+\delta y,t)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\partial T/\partial y = -\ddot{x}\rho(y)}}$$

בקצוות השרשרת, $\underline{\underline{T(0,t)=T(L,t)=0}}$

$$\left.\begin{array}{l} T(0,t)=0 \\ \partial T/\partial y = (g-\ddot{x})\rho(y) \quad y<x(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad T(y,t) = (g-\ddot{x})\left(\int_0^y \rho\right) \qquad y<x(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} T(L,t)=0 \\ \partial T/\partial y = -\ddot{x}\rho(y) \quad y>x(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad T(y,t) = \ddot{x}\left(\int_y^L \rho\right) \qquad y>x(t)$$

רציפות ב- $y=x(t)$ $\Rightarrow \quad (g-\ddot{x})\left(\int_0^x \rho\right) = \ddot{x}\left(\int_x^L \rho\right) \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{g\left(\int_0^x \rho\right) = \ddot{x}\underbrace{\left(\int_0^L \rho\right)}_{M}}}$

המשך של (28) ...

ב: $\rho(y)=\rho=\frac{M}{L}$ קבוע $\Leftarrow$ $M\ddot{x} = g\left(\int_0^x \rho\right) = gMx/L$

$\Leftarrow$ $\ddot{x} = gx/L$

משוואה לינארית והומוגנית עם מקדמים קבועים

$\lambda^2 = g/L \Leftarrow \lambda = \pm\sqrt{g/L}$

פתרון כללי: $\underline{\underline{x(t) = Ae^{\sqrt{g/L}\,t} + Be^{-\sqrt{g/L}\,t}}}$

$x(0)=0$ $(A+B=0)$ $\Leftarrow$ $\underline{\underline{x(t) = C\sinh\sqrt{g/L}\,t}}$

ג: $\dot{x}(0)=v$ $\Leftarrow$ $v = C\sqrt{g/L} \Leftarrow C = v\sqrt{L/g}$

$x(t) = v\sqrt{L/g}\,\sinh\left(\sqrt{g/L}\,t\right)$

$x(t)=L$ $\Leftarrow$ $L = v\sqrt{L/g}\,\sinh\left(\sqrt{g/L}\,t\right)$

$\underline{\underline{t = \sqrt{L/g}\,\sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{gL}}{v}\right)}}$

ד: $\begin{cases} x(0)=a \\ \dot{x}(0)=0 \end{cases}$ $x(t)=Ae^{\sqrt{g/L}\,t}+Be^{-\sqrt{g/L}\,t}$ $\Longleftarrow$ $\begin{matrix} a = A+B \\ 0 = \sqrt{g/L}\,(A-B) \end{matrix}$ $\Leftarrow A=B=a/2$

$x(t) = a\cosh\left(\sqrt{g/L}\,t\right)$

$x(t)=L$ $\Leftarrow$ $L = a\cosh\left(\sqrt{g/L}\,t\right)$

$\underline{\underline{t = \sqrt{L/g}\,\cosh^{-1}(L/a)}}$

הערה: ב-a ו-v קטן, בנוסחאות בסעיפים ג, ד יש $\sinh^{-1}X$ או $\cosh^{-1}X$ כאשר X גדול.

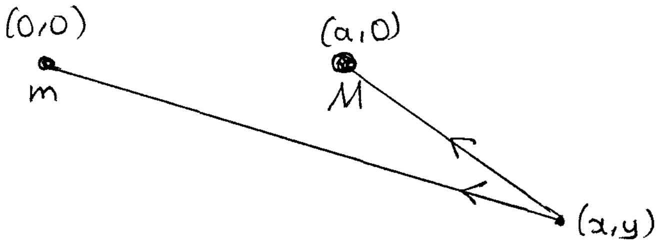
$\cosh Y, \sinh Y \sim \frac{1}{2}e^Y$ (Y גדול)

$\Leftarrow$ $\cosh^{-1}X, \sinh^{-1}X \sim \ln(2X)$ (X גדול)

ג $\Leftarrow$ (v קטן) $t \sim \sqrt{L/g}\,\ln\left(2\sqrt{gL}/v\right)$

ד $\Leftarrow$ (a קטן) $t \sim \sqrt{L/g}\,\ln(2L/a)$

29.



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{m x_1}{(x_1^2+x_3^2)^{3/2}} - \dfrac{M(x_1-a)}{((x_1-a)^2+x_3^2)^{3/2}} \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\dfrac{m x_3}{(x_1^2+x_3^2)^{3/2}} - \dfrac{M x_3}{((x_1-a)^2+x_3^2)^{3/2}} \end{cases} \;\underset{\substack{x_1=x \\ x_2=\dot{x} \\ x_3=y \\ x_4=\dot{y}}}{\Longleftarrow}\; \begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\frac{m}{(x^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - \frac{M}{((x-a)^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x-a\\ y\end{pmatrix}.$$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(t, \underline{x})$$

לא תלוי
ב- t

בקובץ "plmM.m"

```
function dxdt=plmM(t,x,m,M)
dxtwodt=-m*x(1)*(x(1)^2+x(3)^2)^(-1.5)-M*(x(1)-1)*((x(1)-1)^2+x(3)^2)^
(-1.5);
dxfourdt=-m*x(3)*(x(1)^2+x(3)^2)^(-1.5)-M*x(3)*((x(1)-1)^2+x(3)^2)^
(-1.5);
dxdt=[x(2);dxtwodt;x(4);dxfourdt];
```

$(a=1)$

תנאי התחלה

$$\underline{x}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \\ y_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = x_0 \\ y = y_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = w_0 \end{pmatrix}$$

בקובץ "pl.m"

```
function pl(m,M,T,x0,v0,y0,w0)
[tsol,xsol]=ode23(@(t,x)plmM(t,x,m,M),[0 T],[x0,v0,y0,w0]);
plot(xsol(:,1),xsol(:,3));
```

מקבלים גרף של התמונה $(x(t),y(t))$ במישור
כאשר $t\in[0,T]$.

אפשר לעשות:

$pl(1, 10, 10, 2, -1, 0, 2)$

$pl(1, 10, 10, 2, -1, 0, 4)$

$$pl(1, \underbrace{10}_{M=10m}, \underbrace{10}_{T}, \underbrace{2, -1}_{\binom{x_0}{y_0}=\binom{2}{-1}}, \underbrace{0,\ 3}_{\binom{\dot{x}_0}{\dot{y}_0}=\binom{0}{v}})$$

$v=2,3,4$

ומקבלים תמונות שונות!