.6 א)

$$y''' - y\cdot y'' = \sin x \cdot (y')^2 \quad \underset{\substack{y_1=y\\ y_2=y'\\ y_3=y''}}{\Longleftrightarrow} \quad \left.\begin{aligned} y_1' &= y_2\\ y_2' &= y_3\\ y_3' &= y_1 y_3 + y_2^2 \sin x \end{aligned}\right\}$$

ב)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 5y - 2x - 3\dot{x}\dot{y} + \sin t \\ \ddot{y} = x - 3y + \dot{y} - \cos t \end{cases} \quad \underset{\substack{x_1=x\\ x_2=\dot{x}\\ x_3=y\\ x_4=\dot{y}}}{\Longleftrightarrow} \quad \left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= 5x_3 - 2x_1 - 3x_2x_4 + \sin t\\ \dot{x}_3 &= x_4\\ \dot{x}_4 &= x_1 - 3x_3 + x_4 - \cos t \end{aligned}\right\}$$

ג)

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\end{pmatrix} = -\frac{m}{(x^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} - \frac{M}{((x-a)^2+y^2)^{3/2}}\begin{pmatrix}x-a\\ y\end{pmatrix} \quad \underset{\substack{x_1=x\\ x_2=\dot{x}\\ x_3=y\\ x_4=\dot{y}}}{\Longleftrightarrow} \quad \left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\frac{mx}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{M(x-a)}{((x-a)^2+y^2)^{3/2}}\\ \dot{x}_3 &= x_4\\ \dot{x}_4 &= -\frac{my}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{My}{((x-a)^2+y^2)^{3/2}} \end{aligned}\right\}$$

.7

$y = x^2$: $\begin{cases} y' = 2x \\ y'' = 2 \end{cases} \Rightarrow$

$(x^2-2x)y'' + (2-x^2)y' + (2x-2)y$
$= 2(x^2-2x) + 2x(2-x^2) + x^2(2x-2) = 0$ ✓

$y = e^x$: $y' = y'' = e^x \Rightarrow$

$(x^2-2x)y'' + (2-x^2)y' + (2x-2)y$
$= e^x(x^2-2x+2-x^2+2x-2) = 0$ ✓

משוואה לינארית והומוגנית $\Leftarrow$ מרחב של פתרונות מרחב וקטורי דו-מימדי

x^2, e^x פתרונות בלתי תלויים לינארית $\Rightarrow$ מרחב פתרונות $= \langle \{x^2, e^x\} \rangle$

$\Rightarrow$ הפתרון הכללי הוא $\underline{\underline{y = Ax^2 + Be^x}}$

א) $y(1) = 1,\ y'(1) = 3 \Rightarrow$ $y = Ax^2 + Be^x$: $1 = A + Be$; $y' = 2Ax + Be^x$: $3 = 2A + Be$ $\Rightarrow$ $A = 2$, $B = -1/e$

$y = 2x^2 + e^{x-1}$

ב) $y(0), y(1) = 1$ — לא תנאי התחלה $\Leftarrow$ לא בטוח להיות פתרון יחיד)

$\Rightarrow$ $y(0) = 1$: $1 = B$; $y(1) = 1$: $1 = A + Be$ $\Rightarrow$ $A = 1-e$, $B = 1$

$y = (1-e)x^2 + e^x$

ג) $y(0) = 1, y'(0) = 2$ — תנאי התחלה בנקודה סינגולרית: המקדמים במשוואה הם $\frac{2-x^2}{x^2-2x}$, $\frac{2x-2}{x^2-2x}$ $(x \neq 0, 2)$

$\Rightarrow$ $y(0) = 1$: $1 = B$; $y'(0) = 2$: $2 = B$

אין פתרון!

8. א)

$$x=At^2+B\sin t \iff W(x,t^2,\sin t) = \begin{vmatrix} x & t^2 & \sin t\\ \dot x & 2t & \cos t \\ \ddot x & 2 & -\sin t\end{vmatrix}=0$$

$\Leftarrow$ $0=\ddot x(t^2\cos t-2t\sin t)+\dot x(2\sin t+t^2\sin t)+x(-2t\sin t-2\cos t)$

ב) $\frac{1}{x}, x$ בצורה x^λ.

לכן מספיק משוואה בצורה $x^2y''+Axy'+By=0$

כאשר למשוואה האופיינית יש שורשים $\lambda=1,-1$

$\Leftarrow$ משוואה האופיינית היא $(\lambda-1)(\lambda+1)=0 = \lambda^2-1$

$\Leftarrow$ משוואה דיפרנציאלית היא $x^2y''+xy'-y=0$

$\lambda(\lambda-1)+\lambda-1=0$

דרך אחרת:
$$W(y,x,1/x)=\begin{vmatrix} y & x & 1/x\\ y' & 1 & -1/x^2 \\ y'' & 0 & 2/x^3\end{vmatrix}$$

$$= y''(-2/x)+y'(-2/x^2)+y(2/x^3)$$

$\Leftarrow$ $-\frac{2}{x}y''-\frac{2}{x^2}y'+\frac{2}{x^3}y=0 \iff x^2y''+xy'-y=0$

ג) e^{2x}, xe^{2x} פתרונות של מד"ר עם מקדמים קבועים

כאשר משוואה אופיינית עם שורש $\lambda=2$ כפול

$(\lambda-2)^2=0 \Rightarrow \lambda^2-4\lambda+4=0$

$y''-4y'+4y=0$

ד) e^{2x}, x^2e^{2x} פתרונות של מד"ר עם מקדמים קבועים

כאשר משוואה אופיינית עם שורש $\lambda=2$ עם כפלות 3

$(\lambda-2)^3=0 \Rightarrow \lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8=0$

$y'''-6y''+12y'-8y=0$ אבל גם xe^{2x} פתרון

אם נניח פתרונות $Ae^{2x}+Bx^2e^{2x}$ ושלא יהיה עוד פתרונות,

אי אפשר עם מד"ר עם מקדמים קבועים.

המשך של 8ב ...

$$W(y, e^{2x}, x^2e^{2x}) = \begin{vmatrix} y & e^{2x} & x^2e^{2x} \\ y' & 2e^{2x} & (2x^2+2x)e^{2x} \\ y'' & 4e^{2x} & (4x^2+8x+2)e^{2x} \end{vmatrix} = 0$$ דרך אחרת.

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 2 & 2(x^2+x) \\ y'' & 4 & 4x^2+8x+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2x^2+2x-2)y'' - (4x^2+8x-2)y' + (8x+4)y = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(x^2+x-1)y'' - (2x^2+4x-1)y' + (4x+2)y = 0}}$$

---

9. א)

$$W(x, e^x, x^2) = \begin{vmatrix} x & e^x & x^2 \\ 1 & e^x & 2x \\ 0 & e^x & 2 \end{vmatrix}$$

$$= e^x \begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ 1 & 1 & 2x \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = e^x[2(x-1)-(2x^2-x^2)]$$

$$= \underline{\underline{e^x(2x-2-x^2)}}$$

ב)

$W(x, e^x, x-e^x) = 0 \leftarrow$ יש תלויות ליניאריות!

$x = e^x + (x-e^x)$

$$W(x, e^x, x-e^x) = \begin{vmatrix} x & e^x & x-e^x \\ 1 & e^x & 1-e^x \\ 0 & e^x & -e^x \end{vmatrix} = 0$$ דרך אחרת:

$C_1 = C_2 + C_3$

---

10. א) $y''-4y'-5y=0$ משוואה אופיינית $\lambda^2-4\lambda-5=0$

$(\lambda+1)(\lambda-5)=0$

$\lambda = -1, 5$

$$\Rightarrow \quad y = Ae^{-x} + Be^{5x}$$

$$y' = -Ae^{-x} + 5Be^{5x}$$

$$y(0) = y'(0) = 3 \Rightarrow \left.\begin{aligned} 3 &= A + B \\ 3 &= -A + 5B \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow A = 2,\ B = 1$$

$$\underline{\underline{y = 2e^{-x} + e^{5x}}}$$

המשך של שאלה 10 ...

ב) $y''+4y'+8y=0$ משוואה אופיינית $\lambda^2+4\lambda+8=0$

$(\lambda+2)^2+4=0$

$\lambda=-2\pm2i$

פתרונות $e^{(-2+2i)x}, e^{(-2-2i)x}$

או $e^{-2x}\cos 2x, e^{-2x}\sin 2x$

פתרון כללי: $\underline{\underline{y=e^{-2x}(A\cos 2x+B\sin 2x)}}$

ג) $y''=4y$ משוואה אופיינית $\lambda^2=4 \Rightarrow \lambda=\pm2$

$y=Ae^{2x}+Be^{-2x}$

$y(0)=y(\pi)=1 \Rightarrow \begin{cases} 1=A+B \\ 1=e^{2\pi}A+e^{-2\pi}B \end{cases}$

$\Rightarrow A=\dfrac{e^{2\pi}-1}{e^{4\pi}-1}=\dfrac{1}{e^{2\pi}+1}$

$B=\dfrac{e^{2\pi}}{e^{2\pi}+1}$

$\Leftarrow \underline{\underline{y(x)=\dfrac{e^{2x}+e^{2(\pi-x)}}{e^{2\pi}+1}}}$

הערה התנאי כאן לא תנאי התחלה (ב"צ ערכים של y,y' בזמן ~~אחד~~) אלא תנאי שפה: הערכים של y boundary value problem BVP בשתי נקודות $x=0,\pi$

משפט Picard לא יגיד לנו כלום על קיום ויחידות במקרה כזה

ד) $x^2y''+xy'-4y=0$ משוואה אופיינית $\lambda(\lambda-1)+\lambda-4=0$

$\lambda^2=4$

$\lambda=\pm2$

$\underline{\underline{y(x)=Ax^2+B/x^2}}$

ה) $x^2y''+xy'+4y=0$ משוואה אופיינית $\lambda(\lambda-1)+\lambda+4=0$

$\lambda^2=-4$

$\lambda=\pm2i \rightsquigarrow$ פתרונות x^{2i}, x^{-2i} ($x^{2i}=e^{2i\ln x}$, $x^{-2i}=e^{-2i\ln x}$) $\rightsquigarrow \underline{\underline{y(x)=A\cos(2\ln x)+B\sin(2\ln x)}}$

---

1) $x^2y''+xy'-4y=0,\ y(1)=2,\ y'(1)=0$

ד $\Rightarrow \begin{cases} y(x)=Ax^2+B/x^2 \\ y'(x)=2Ax-2B/x^3 \end{cases}$

$y(1)=2 \Rightarrow 2=A+B$

$y'(1)=0 \Rightarrow 0=2A-2B$

$A=B=1 \Rightarrow \underline{\underline{y=x^2+1/x^2}}$

המשך של (10) ...

5) $$x^2y''+xy'+4y=0$$

(ז) $\Leftarrow$ $y(x)=A\cos(2\ln x)+B\sin(2\ln x)$

$$y'(x)=\frac{-2A}{x}\sin(2\ln x)+\frac{2B}{x}\cos(2\ln x)$$

$$y(1)=1 \Rightarrow 1=A$$
$$y'(1)=-6 \Rightarrow -6=2B$$

$$A=1,\ B=-3 \Rightarrow \underline{\underline{y=\cos(2\ln x)-3\sin(2\ln x)}}$$

ח) $y''+4y=0$ משוואה אופיינית $\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda=\pm 2i$

$$y=A\cos 2x+B\sin 2x$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=1 \Rightarrow 1=A \\ y(\pi)=1 \Rightarrow 1=A \end{array}\right\}$$ לכן תנאי התחלה!

מספר אינסופי של פתרונות

$$\underline{\underline{y=\cos 2x+B\sin 2x}}$$

---

11. א.

$$y''-2y'\tan x-y=0$$

$$y=v\sec x \Rightarrow y'=v'\sec x+v\sec x\tan x$$

$$\Rightarrow y''=v''\sec x+2v'\sec x\tan x+v(\sec^3 x+\sec x\tan^2 x)$$

$$\Rightarrow y''-2y'\tan x-y$$
$$=v''\sec x+v'(2\sec x\tan x-2\sec x\tan x)$$
$$+v(\sec^3 x+\sec x\tan^2 x-2\sec x\tan^2 x-\sec x)$$
$$=v''\sec x$$

$$\Rightarrow v''=0 \Rightarrow v=Ax+B$$
$$\Rightarrow \underline{\underline{y=Ax\sec x+B\sec x}}$$

ב.

$$y''-y'\tan x-y\sec^2 x=0$$

$y=v\sec x$ (כמו ב-(א))

$$\Rightarrow y''-y'\tan x-y\sec^2 x$$
$$=v''\sec x+v'(2\sec x\tan x-\sec x\tan x)$$
$$+v(\sec^3 x+\sec x\tan^2 x-\sec x\tan^2 x-\sec^3 x)$$
$$=v''\sec x+v'\sec x\tan x$$

$$\Rightarrow v''+v'\tan x=0$$
$$\Rightarrow \frac{v''}{v'}=-\tan x$$
$$\Rightarrow \int\frac{v''}{v'}dx=-\int\tan x+C \Rightarrow \ln v'=\ln(\cos x)+C$$

המשך של ⑪ⓑ.

$\Rightarrow \quad v' = \cos x \cdot$ קבוע

$\Rightarrow \quad v = A\sin x + B$

$\Rightarrow \quad y = (A\sin x + B)\sec x = \underline{\underline{A\tan x + B\sec x}}$

ג. $$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$$

$$y' = xv' + v \quad \Leftarrow \quad y = xv$$
$$y'' = xv'' + 2v'$$

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = (1-x^2)xv'' + (2(1-x^2) - 2x\cdot x)v' + (-2x+2x)v$$

$$\Rightarrow \quad x(1-x^2)v'' + (2-4x^2)v' = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v''}{v'} = \frac{4x^2-2}{x(1-x^2)} = \frac{2x}{1-x^2} - \frac{2}{x}$$

$\overset{\int}{\Rightarrow} \quad \ln v' = -\ln(1-x^2) - 2\ln x +$ קבוע

$$\Rightarrow \quad v' = \frac{C}{x^2(1-x^2)}$$

$$= \frac{C}{x^2} + \frac{C}{1-x^2}$$

$\Rightarrow \quad v = -C/x + C/2 \underbrace{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}_{(\tanh^{-1} x)} +$ קבוע

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y = -C + \frac{Cx}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + Dx}}$$

ד. $$xy'' - y' + 4x^3y = 0$$

$$y' = \sin(x^2)v' + 2x\cos(x^2)v \quad \Leftarrow \quad y = \sin(x^2)\,v$$
$$y'' = \sin(x^2)v'' + 4x\cos(x^2)v'$$
$$+ (2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2))v$$

$$\Rightarrow xy'' - y' + 4x^3y = x\sin(x^2)v'' + (4x^2\cos(x^2) - \sin(x^2))v'$$
$$+ (2x\cos(x^2) - 4x^3\sin(x^2) - 2x\cos(x^2) + 4x^3\sin(x^2))V$$

$$\Rightarrow \quad x\sin(x^2)v'' + (4x^2\cos(x^2) - \sin(x^2))v' = 0$$

$$\Rightarrow \quad v'' + (4x\cot(x^2) - 1/x)v' = 0$$

$$\Rightarrow \quad v''/v' = 1/x - 4x\cot(x^2)$$

$\overset{\int}{\Rightarrow} \quad \ln v' = \int \frac{1}{x} - 4x\cot(x^2)\,dx +$ קבוע

$= \ln x - \underset{\substack{(u=x^2) \\ du = 2x\,dx}}{\int 2\cot u\,du} +$ קבוע

$= \ln x - 2\ln(\sin \underset{x^2}{u}) +$ קבוע

$\Rightarrow \quad v' = \frac{x}{(\sin(x^2))^2} \cdot$ קבוע

המשך של (ז) ...

$$\Rightarrow \quad v = A\int \frac{x}{(\sin(x^2))^2}\,dx + B$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{du}{\sin^2 u} + B \qquad \begin{matrix} u=x^2 \\ du = 2x\,dx \end{matrix}$$

$$= -\frac{A}{2}\cot u + B$$

$$= -\frac{A}{2}\cot(x^2) + B$$

$$\Rightarrow \quad y = v\sin(x^2) = \underline{\underline{B\sin(x^2) + C\cos(x^2)}} \qquad \left(C = -\frac{A}{2}\right)$$

ה. $y'' + a(xy'+y) = 0$

$$y' = e^{-ax^2/2}v' - axe^{-ax^2/2}v \Leftarrow \quad y = e^{-ax^2/2}v$$

$$y'' = e^{-ax^2/2}v'' - 2axe^{-ax^2/2}v' + \left(a^2x^2e^{-ax^2/2} - ae^{-ax^2/2}\right)v \Leftarrow$$

$$\Rightarrow y'' + a(xy'+y) = e^{-ax^2/2}v'' + \left(-2axe^{-ax^2/2} + axe^{-ax^2/2}\right)v'$$
$$+ \left(a^2x^2e^{-ax^2/2} - ae^{-ax^2/2} + ax(-axe^{-ax^2/2}) + ae^{-ax^2/2}\right)v$$

$$\Rightarrow \quad e^{-ax^2/2}v'' - axe^{-ax^2/2}v' = 0$$

$$\Rightarrow \quad v'' = axv'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v''}{v'} = ax$$

$$\Rightarrow \quad \ln v' = \int ax\,dx = \frac{1}{2}ax^2 + \text{קבוע}$$

$$\Rightarrow \quad v' = Ae^{\frac{1}{2}ax^2}$$

$$\Rightarrow \quad v = A\int e^{\frac{1}{2}ax^2}dx + \text{קבוע}$$

$$= A\int_0^x e^{\frac{1}{2}au^2}du + B$$

$$\Rightarrow \quad y = ve^{-ax^2/2} = \underline{\underline{A\int_0^x e^{\frac{1}{2}a(u^2-x^2)}du + Be^{-ax^2/2}}}$$

אי אפשר לפתור את האינטגרל בצורה סגורה!

---

12. לפי ההגדרה, $W = W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \quad W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}_{0}$$

נגזרת של דטרמיננטה
היא סכום של דטרמיננטות
שמקבלים כאשר גוזרים את
כל אחת מהשורות

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -py_1'-qy_1 & -py_2'-qy_2 \end{vmatrix}$$

y_1, y_2 פתרונות של $y'' = -py' - qy$

$$(R_2 := R_2 + qR_1) \quad = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -py_1' & -py_2' \end{vmatrix} = -pW$$

$$= -p\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -pW$$

המשך של (12) ...

דרך אחרת לפי ההגדרה, $W=W(y_1,y_2)=y_1y_2'-y_1'y_2$

$$\Rightarrow \quad W'=(y_1y_2''+y_1'y_2')-(y_1'y_2'+y_1''y_2)$$
$$=y_1y_2''-y_1''y_2$$
$$=y_1(-py_2'-qy_2)-(-py_1'-qy_1)y_2$$
$$=-p(y_1y_2'-y_1'y_2)=-pW$$

y_1,y_2 פתרונות $\begin{pmatrix} y_1''=-py_1'-qy_1 \\ y_2''=-py_2'-qy_2 \end{pmatrix}$

<u>הערה</u>: יותר כללי, אם $y_1,\dots,y_n$ פתרונות של המד"ר

$$a_n(x)y^{(n)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

אז ה-Wronskian $W=W(y_1,\dots,y_n)$ מקיים:

$$W'=-\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}W$$

זאת משוואה בת הפרדה לפונקציה W, ולכן אפשר למצוא את W:

$$\frac{W'}{W}=-\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \xRightarrow{\int} \quad \ln W=-\int\frac{a_{n-1}}{a_n}dx+\text{קבוע}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{W=Ce^{-\int a_{n-1}/a_n\,dx}}}$$

(לפעמים משתמשים בזה ... לא בקורס שלנו...)

<u>13.</u> א) נניח ש- $y=xe^{\lambda_1x}$

$$\Leftarrow \quad y'=e^{\lambda_1x}+\lambda_1xe^{\lambda_1x}$$

$$y^{(r)}=x\cdot\lambda_1^re^{\lambda_1x}+r\cdot\lambda_1^{r-1}e^{\lambda_1x} \quad \Leftarrow \text{נוסחת Leibnitz}$$

$$\begin{aligned}a_ny^{(n)}+\dots+a_1y'+a_0y &= a_n\lambda_1^nxe^{\lambda_1x}+\dots+a_1\lambda_1xe^{\lambda_1x}+a_0xe^{\lambda_1x}\\ &\quad +a_nn\lambda_1^{n-1}e^{\lambda_1x}+\dots+a_1e^{\lambda_1x}\\ &=(a_n\lambda_1^n+\dots+a_1\lambda_1+a_0)xe^{\lambda_1x}\\ &\quad +(a_nn\lambda_1^{n-1}+\dots+a_1)e^{\lambda_1x}\\ &=f(\lambda_1)xe^{\lambda_1x}+f'(\lambda_1)e^{\lambda_1x}\\ &=0 \qquad (f(\lambda_1)=f'(\lambda_1)=0 \Leftarrow \lambda_1 \text{ שורש כפול})\end{aligned}$$

ב) $y=e^{\lambda_1x}u \quad \xLeftarrow[\text{Leibnitz}]{\text{נוסחת}}$

$$y^{(m)}=\sum_{r=0}^m\binom{m}{r}\frac{d^{m-r}}{dx^{m-r}}(e^{\lambda_1x})\cdot u^{(r)}$$
$$=\sum_{r=0}^m\binom{m}{r}\lambda_1^{m-r}e^{\lambda_1x}\cdot u^{(r)}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^na_my^{(m)}=\sum_{m=0}^n\left(\sum_{r=0}^ma_m\binom{m}{r}\lambda_1^{m-r}e^{\lambda_1x}u^{(r)}\right)=\sum_{r=0}^n\left(\sum_{m=r}^na_m\binom{m}{r}\lambda_1^{m-r}\right)e^{\lambda_1x}u^{(r)}$$

(1) $\sum_{m=0}^{n} a_m y^{(m)} = 0 \iff \sum_{r=0}^{n} \left(\sum_{m=r}^{n} a_m \binom{m}{r} \lambda_1^{m-r}\right) e^{\lambda_1 x} u^{(r)} = 0$

(לא תלוי ב- m, r)

$$\iff \sum_{r=0}^{n} \underbrace{\left(\sum_{m=r}^{n} a_m \binom{m}{r} \lambda_1^{m-r}\right)}_{} u^{(r)} = 0$$

$$\frac{1}{r!} \sum_{m=r}^{n} a_m\, m(m-1)\cdots(m-r+1)\, \lambda_1^{m-r}$$

$$= 1/r!\ f^{(r)}(\lambda_1) \qquad \begin{cases} f(\lambda) = \sum_{m=0}^{n} a_m \lambda^m \\ \Rightarrow f^{(r)}(\lambda) = \sum_{m=r}^{n} a_m\, m\cdots(m-r+1)\lambda^{m-r} \end{cases}$$

(2) $\iff \sum_{r=0}^{n} \frac{1}{r!} f^{(r)}(\lambda_1)\, u^{(r)} = 0$ ✓

ג) בהנחה ש- $\lambda=\lambda_1$ שורש של f עם ריבוי r

$\Leftarrow$ $f(\lambda_1) = f'(\lambda_1) = \cdots = f^{(r-1)}(\lambda_1) = 0$

$\Leftarrow$ המשוואה דיפרנציאלית ל- u שקבלנו בסעיף (ב) היא

$$\sum_{s=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{s!} f^{(s)}(\lambda_1)}_{=0\ \forall s=0,1,\dots,r-1} u^{(s)} = 0$$

ולכן מתחיל מהנגזרת ה-r פעמים של u.

לכל פולינום u ממעלה פחות מ- r, $u^{(r)} = 0$ ולכן היא פתרון

$\Leftarrow$ $u = 1, x, \dots, x^{r-1}$ פתרונות של (2): $\sum_{s=r}^{n} \frac{1}{s!} f^{(s)}(\lambda_1)\, u^{(s)} = 0$

$\Leftarrow$ $y = e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{r-1}e^{\lambda x}$ פתרונות של (1): $\sum_{m=0}^{n} a_m y^{(m)} = 0$

---

14. א) $x = e^t \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{d}{dx} \Rightarrow \dot{y} = xy'$

$= x\frac{d}{dx}$, $\frac{dx}{dt} = e^t = x$

$$\ddot{y} = x\, d/dx\,(xy') = x(xy'' + y') = x^2y'' + xy'$$

$$a_2\ddot{y} + (a_1 - a_2)\dot{y} + a_0 y = 0 \iff a_2(x^2y'' + xy') + (a_1 - a_2)xy' + a_0 y = 0$$

$$\iff a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = 0$$ ✓

המשך של (14)...

ב. המשוואה האופיינית של ①: $a_2\lambda(\lambda-1)+a_1\lambda+a_0=0$

$$a_2\lambda^2+(a_1-a_2)\lambda+a_0=0$$

המשוואה האופיינית של ②: $a_2\lambda^2+(a_1-a_2)\lambda+a_0=0$

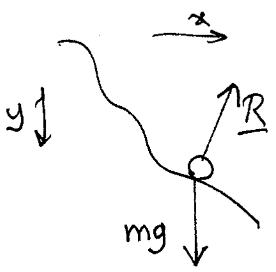
פתרון $y=e^{\lambda t}$ של ② $\xLeftarrow{x=e^t}$ $y=x^\lambda$ של ①

אם λ שורש עם ריבוי

פתרון $y=t^n e^{\lambda t}$ $\xLeftarrow[t=\ln x]{x=e^t}$ $y=(\ln x)^n x^\lambda$ פתרון של ①.

---

15. א.



$$m\frac{d^2}{dt^2}\binom{x}{y}=\binom{0}{mg}+\underline{R} \quad ⊛$$

$\underline{R}$ בכיוון $\perp$ מסלול (מסלול חלק)

המסלול הוא $(x,f(x))$ ולכן בכיוון של קו משיק הוא $(1,f'(x))$. מכפלה פנימית של ⊛ עם $(1,f'(x))$ נותן:

$$\underline{\underline{m\left[\frac{d^2}{dt^2}\binom{x}{y}\right]\cdot\binom{1}{f'(x)}=\binom{0}{mg}\cdot\binom{1}{f'(x)}}}$$ (נזכור $y=f(x)$)

ב.

$$\frac{d^2}{dt^2}\binom{x}{y}=\frac{d^2}{dt^2}\binom{x(t)}{f(x(t))}$$
$$=\frac{d}{dt}\binom{\dot x}{f'(x)\dot x}$$
$$=\binom{\ddot x}{f'(x)\ddot x+f''(x)\dot x^2}$$

כלל השרשרת: $\frac{d}{dt}(f'(x))$
$=\frac{d}{dx}(f'(x))\cdot\frac{dx}{dt}$
$=f''(x)\cdot\dot x$

$$\Rightarrow \binom{\ddot x}{\ddot y}\cdot\binom{1}{f'(x)}=\ddot x+f'(x)(f'(x)\ddot x+f''(x)\dot x^2)$$
$$=(1+f'(x)^2)\ddot x+f'\cdot f''\cdot\dot x^2$$

$$\underline{\underline{(1+(f'(x))^2)\ddot x+f'f''\dot x^2=gf'}}$$ ⇐ המשוואה מסעיף (12)

$\frac{d}{dx}((f')^2)=2f'f''$

$\frac{d}{dt}(\dot x^2)=2\dot x\ddot x \Rightarrow \frac{d}{dx}(\dot x^2)=2\ddot x$

$$\Rightarrow (1+(f')^2)\frac{d}{dx}(\dot x^2)+\frac{d}{dx}((f')^2)\dot x^2=2gf'$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left((1+(f')^2)\dot x^2\right)=2gf'$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} \frac{1}{2}(1+(f')^2)\dot x^2=gf+\text{קבוע}$$

$$\therefore\ \underline{\underline{\frac{1}{2}(1+(f')^2)\dot x^2-gf=\text{קבוע}}}$$ ⟵ שימור האנרגיה

$(1+(f')^2)\dot x^2=\dot x^2+\dot y^2$

המשך של (15)...

ג. תנאי התחלה, $x(0)=\dot{x}(0)=0$ ⇐ $\frac{1}{2}(1+(f')^2)\dot{x}^2 - gf(x) = C = 0$

⇐ $\dot{x} = \sqrt{\frac{2gf}{1+(f')^2}}$

משוואה דיפ' בת-הפרדה

$$\int \sqrt{\frac{1+(f')^2}{2gf}}\,dx = \int dt + \text{קבוע}$$

$$\underline{\underline{\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{1+(f')^2}{2gf}}\,dx}} = \int_0^{T_y} dt = T \qquad (\text{קבוע}=0 \Leftarrow x=0,\ t=0)$$

ד. למסלול ישר, $f(x)=\frac{y_0}{x_0}\cdot x$ ⇐

$$T = \int_0^{x_0}\sqrt{\frac{1+y_0^2/x_0^2}{2g\,y_0/x_0\cdot x}}\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2g x_0 y_0}}\int_0^{x_0} x^{-1/2}\,dx$$

$$= \sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2g x_0 y_0}}\cdot\left[2x^{1/2}\right]_0^{x_0} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2(x_0^2+y_0^2)}{g y_0}}}}$$

ה. אנחנו רוצים למצוא את הפונקציה $f(x)$ כך ש- $f(0)=0$, $f(x_0)=y_0$

ושם הזמן $\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{1+(f')^2}{2gf}}\,dx$ מינימלי. משוואת Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial f} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial f'}\right)$$

כאשר $L(f,f') = \sqrt{\frac{1+(f')^2}{f}}$

$$\left.\begin{aligned}\partial L/\partial f &= -\tfrac{1}{2}(1+(f')^2)^{1/2} f^{-3/2}\\ \partial L/\partial f' &= f'(1+(f')^2)^{-1/2} f^{-1/2}\end{aligned}\right\}$$

לכן התנאי הוא:

$$-\tfrac{1}{2}(1+(f')^2)^{1/2} f^{-3/2} = \frac{d}{dx}\left(f'(1+(f')^2)^{-1/2} f^{-1/2}\right)$$

$$= f''(1+(f')^2)^{-1/2} f^{-1/2} + f'f''\cdot(1+(f')^2)^{-3/2}(-f')f^{-1/2} + f'(1+(f')^2)^{-1/2}\left(-\tfrac{1}{2}f^{-3/2}f'\right)$$

$$\xRightarrow{\times(1+(f')^2)^{3/2}f^{3/2}} -\tfrac{1}{2}(1+(f')^2)^2 = f''f(1+(f')^2) \quad -(f')^2f''f \quad -\tfrac{1}{2}(f')^2(1+(f')^2)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{-\tfrac{1}{2}(1+(f')^2) = f''f}}$$

ו. נסמן את $v=f'$ ⇐ $\frac{dv}{dx}=f''$ ⇐ $-\frac{1}{2}(1+v^2) = f\frac{dv}{dx}$

$$= f\frac{dv}{df}\underbrace{\frac{df}{dx}}_{v} = vf\frac{dv}{df}$$

בת-הפרדה ⇐ $v\frac{dv}{1+v^2} = -\frac{1}{2}\frac{df}{f}$

⇐ $\int\frac{2v\,dv}{1+v^2} = \int -\frac{df}{f} + \text{קבוע}$

$\ln(1+v^2) = -\ln f + \text{קבוע} \Rightarrow f(1+v^2) = \text{קבוע}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(1+(f')^2) = \text{קבוע}}}$$

המשוואה מסעיף (ה) היא מסדר 2 ולא תלוי' ב-x:
$f'' = -\frac{1+f'^2}{2f}$
ולכן אפשר להשתמש בשיטה בדף 3-5 דוגמה 1

פד-27

בהמשך של (15)...

כי k^2 הקבוע חיובי, $\Leftarrow$ $f(1+(f')^2) = k^2$

$\Leftarrow$ $1+(f')^2 = k^2/f$ $\Leftarrow$ $f' = \sqrt{(k^2/f - 1)}$

בר-הפרדה

$$\int \frac{df}{\sqrt{(k^2/f - 1)}} = \int dx + \text{קבוע} \Leftarrow$$

$$\int \sqrt{\frac{f}{k^2-f}}\, df = x + \text{קבוע}$$

הצבה: $f = k^2 \sin^2 u$
$df = 2k^2 \sin u \cos u\, du$

$$\int \sqrt{\frac{f}{k^2-f}}\, df = \int \tan u \cdot 2k^2 \sin u \cos u\, du \Leftarrow$$

$$= \int 2k^2 \sin^2 u\, du$$

$$= \int k^2 (1-\cos 2u)\, du$$

$$= k^2(u - \tfrac{1}{2}\sin 2u) + \text{קבוע}$$

לכן כאשר $f = k^2 \sin^2 u$, $k^2(u - \tfrac{1}{2}\sin 2u) = x + \text{קבוע}$

או כאשר $f = k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, $k^2(\theta/2 - \tfrac{1}{2}\sin\theta) = x + \text{קבוע}$

תנאי התחלה: $f(0)=0 \Rightarrow \underset{x=0}{\theta=0} \Rightarrow \text{קבוע} = 0$

$$\underline{\underline{x = \tfrac{k^2}{2}(\theta - \sin\theta), \quad f(x) = k^2 \sin^2 \theta/2 = \tfrac{k^2}{2}(1-\cos\theta) = y}}$$

לכן הגרף של f הוא נתון בצורה פרמטרית לפי המשוואות הנ"ל
עם פרמטר θ. (cycloid)

<u>הערות</u> * הפרמטר k הוא כך שהגרף עובר בנקודה (x_0, y_0).

* הזמן להגיע מ-$(0,0)$ ל-(x_0,y_0) על ה-cycloid $(\theta=\theta_0)$ הוא

$$T = \int_0^{x_0} \sqrt{\left(\frac{1+(f')^2}{2gf}\right)}\, dx \underset{x\to\theta}{\overset{\text{הצבה}}{=}} \int_0^{\theta_0} \sqrt{\left(\frac{1+(dy/dx)^2}{2gy}\right)} \cdot \frac{dx}{d\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_0} \sqrt{\left(\frac{(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2}{2gy}\right)}\, d\theta$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \tfrac{k^2}{2}(\theta - \sin\theta) \Rightarrow \tfrac{dx}{d\theta} = \tfrac{k^2}{2}(1-\cos\theta) \\ y &= \tfrac{k^2}{2}(1-\cos\theta) \Rightarrow \tfrac{dy}{d\theta} = \tfrac{k^2}{2}\sin\theta \end{aligned}\right\} = \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{k^4/4\ \left((1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right)}{g k^2 (1-\cos\theta)}}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\theta_0} k/2\sqrt{g} \cdot \sqrt{2}\, d\theta$$

$$= \underline{\underline{k\theta_0/\sqrt{2g}}}$$

.16 $x=e^t \Leftarrow \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}:\frac{dx}{dt}$

$\dot{\underline{y}}=\underline{y}'\cdot x$

לכן $\dot{\underline{y}}=\underline{A}\underline{y} \iff x\underline{y}'=\underline{A}\underline{y} \iff \underline{y}'=\frac{1}{x}\underline{A}\underline{y}$

.17 א. $\underline{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$ משוואה אופיינית $\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\2&3-\lambda\end{vmatrix}=0$ $=(\lambda-1)(\lambda-3)+2$

$\overset{\shortparallel}{\lambda^2-4\lambda+5}$

$(\lambda-2)^2+1=0 \Rightarrow \lambda=2\pm i$

$\lambda_1=2+i:\ \begin{pmatrix}-1-i&-1\\2&1-i\end{pmatrix}\underline{v}_1=\underline{0} \Rightarrow \underline{v}_1=\begin{pmatrix}-1\\1+i\end{pmatrix}$.קבוע

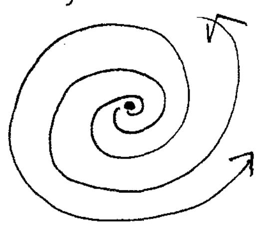
פתרון: $e^{(2+i)t}\begin{pmatrix}-1\\1+i\end{pmatrix}=e^{2t}(\cos t+i\sin t)\begin{pmatrix}-1\\1+i\end{pmatrix}$

$=e^{2t}\begin{pmatrix}-\cos t-i\sin t\\(\cos t-\sin t)+i(\cos t+\sin t)\end{pmatrix}$

פתרונות $\Leftarrow$ $e^{2t}\begin{pmatrix}-\cos t\\\cos t-\sin t\end{pmatrix},\ e^{2t}\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t+\sin t\end{pmatrix}$

החלק הממשי   החלק המדומה

$e^{2t}\Rightarrow$ כיוון חיצוני



נגד השעון $\Leftarrow \cos t\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+\sin t\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$

[אז אפשר לומר: הכיוון מ- $\underline{w}$ ל- $\underline{v}$ כאשר $\underline{v}_1=\underline{v}+i\underline{w}$, $\underline{v}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\underline{w}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$
נגד השעון]

פתרון כללי: $\underline{x}=Ae^{2t}\begin{pmatrix}-\cos t\\\cos t-\sin t\end{pmatrix}+Be^{2t}\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t+\sin t\end{pmatrix}$

ב. $\underline{A}=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$ משוואה אופיינית $\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\2&3-\lambda\end{vmatrix}=0$ $=(\lambda-2)(\lambda-3)-2$

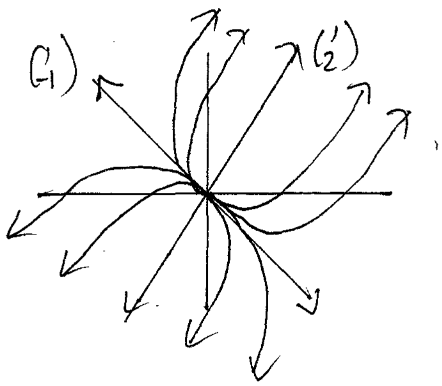
$\overset{\shortparallel}{\lambda^2-5\lambda+4}$

$(\lambda-1)(\lambda-4)=0 \Rightarrow \lambda=1,4$

$\lambda=1\quad \begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0} \Rightarrow \underline{v}\parallel\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\lambda=4\quad \begin{pmatrix}-2&1\\2&-1\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0} \Rightarrow \underline{v}\parallel\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

פתרון כללי $\underline{x}=Ae^{t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+Be^{4t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$



המשך של (17) ...

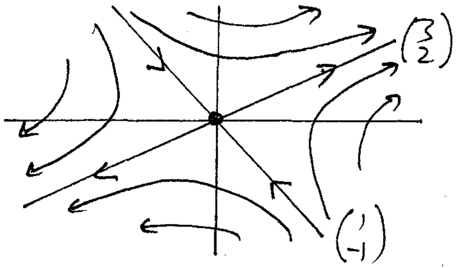
ג. $\underline{A}=\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}$ משוואה אופיינית $\begin{vmatrix}2-\lambda&3\\2&1-\lambda\end{vmatrix}=0 = (\lambda-1)(\lambda-2)-6$

$= \lambda^2-3\lambda-4$

$= (\lambda-4)(\lambda+1) \Rightarrow \lambda=4,-1$

$\lambda=4 \quad \begin{pmatrix}-2&3\\2&-3\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0} \Rightarrow \underline{v}\parallel\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$\lambda=-1 \quad \begin{pmatrix}3&3\\2&2\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0} \Rightarrow \underline{v}\parallel\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$



(אוכף)

פתרון כללי: $\underline{\underline{x=Ae^{4t}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+Be^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}}$

ד. $\underline{A}=\begin{pmatrix}2&-5/4\\5&-2\end{pmatrix}$ משוואה אופיינית $\begin{vmatrix}2-\lambda&-5/4\\5&-2-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftarrow \lambda^2-4+\frac{25}{4}=0$

$\lambda^2+9/4=0 \Rightarrow \lambda=\pm 3/2\, i$

$\lambda_1=\frac{3}{2}i: \begin{pmatrix}2-3/2\,i&-5/4\\5&-2-3/2\,i\end{pmatrix}\underline{v}_1=\underline{0} \Rightarrow \underline{v}_1\parallel\begin{pmatrix}4+3i\\10\end{pmatrix}\parallel\begin{pmatrix}2+3/2\,i\\5\end{pmatrix}$

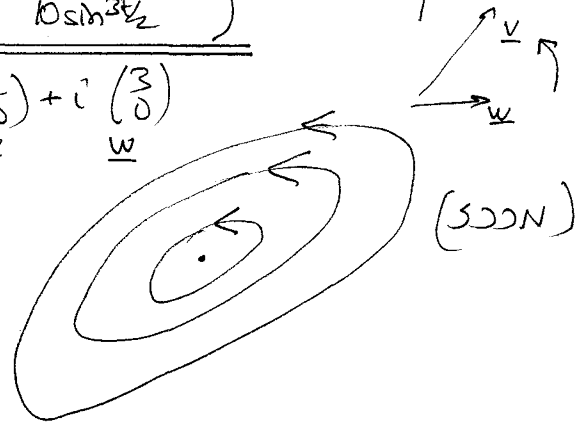
$e^{3it/2}\begin{pmatrix}4+3i\\10\end{pmatrix}=\left(\cos\frac{3t}{2}+i\sin\frac{3t}{2}\right)\begin{pmatrix}4+3i\\10\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}(4\cos 3t/2-3\sin 3t/2)+i(4\sin 3t/2+3\cos 3t/2)\\10\cos 3t/2+10i\sin 3t/2\end{pmatrix}$

לכן יש 2 פתרונות $\begin{pmatrix}4\cos 3t/2-3\sin 3t/2\\10\cos 3t/2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4\sin 3t/2+3\cos 3t/2\\10\sin 3t/2\end{pmatrix}$

פתרון כללי $\underline{\underline{x=A\begin{pmatrix}4\cos 3t/2-3\sin 3t/2\\10\cos 3t/2\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}4\sin 3t/2+3\cos 3t/2\\10\sin 3t/2\end{pmatrix}}}$

$\underline{v}_1=\underline{v}+i\underline{w}=\begin{pmatrix}4+3i\\10\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}}_{\underline{v}}+i\underbrace{\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}}_{\underline{w}}$



(מרכז)

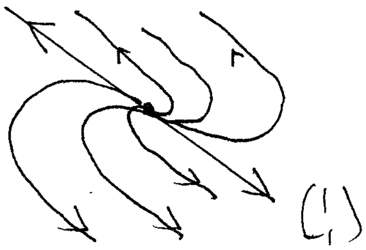
ה. $\underline{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}$ משוואה אופיינית $\begin{vmatrix}2-\lambda&-1\\1&4-\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftarrow (\lambda-2)(\lambda-4)+1=0$

$\lambda^2-6\lambda+9=0$

$(\lambda-3)^2=0 \Rightarrow \lambda=3$

$\lambda=3: \begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0} \Rightarrow \underline{v}\parallel\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

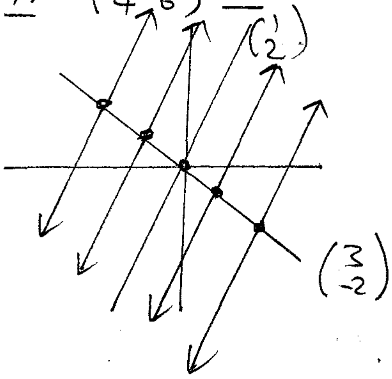
$\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\underline{w}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \Leftarrow \underline{w}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$



פתרון הכללי: $\underline{\underline{x=Ae^{3t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+Be^{3t}\left(t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)}}$

המשך של (17) ...

ו. $\underline{A}=\begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix}$



משוואה אופיינית $\begin{vmatrix}2-\lambda&3\\4&6-\lambda\end{vmatrix}=0$, $(\lambda-2)(\lambda-6)-12=\lambda^2-8\lambda \Rightarrow \lambda=0,8$

$\lambda=0:\ \begin{pmatrix}2&3\\4&6\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0} \Rightarrow \underline{v}\parallel\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

$\lambda=8:\ \begin{pmatrix}-6&3\\4&-2\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0} \Rightarrow \underline{v}\parallel\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

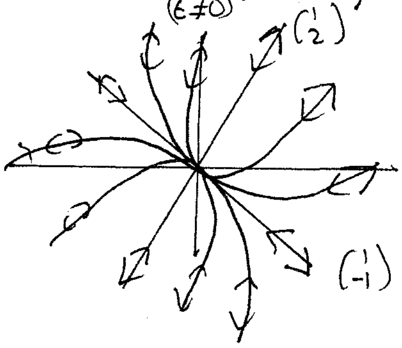
פתרון כללי: $\underline{x}=A\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+Be^{8t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

ז. $\underline{A}=t^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}$ $(t\neq0)$

$\dot{\underline{x}}=\underline{A}\,\underline{x} \Leftrightarrow \frac{d\underline{x}}{du}=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\end{pmatrix}\underline{x}$ כאשר $t=e^u$

(ב) $\Leftarrow$ $\underline{x}=Ae^u\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+Be^{4u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$=At\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+Bt^4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$



הערה: המשוואה תלויה ב-t ולכן התמונות של פתרונות במישור $\underline{x}$ לא חייבות להיות לא תלוי בתנאי התחלה.

---

18. א. (17) $\Leftarrow$ $\underline{x}(0)=A\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $\begin{matrix}-A=1\\A+B=2\end{matrix}$ $\quad \begin{matrix}A=-1\\B=3\end{matrix}$

$\underline{x}(t)=e^{2t}\left(-\begin{pmatrix}-\cos t\\\cos t-\sin t\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t+\sin t\end{pmatrix}\right)=e^{2t}\begin{pmatrix}\cos t-3\sin t\\2\cos t+4\sin t\end{pmatrix}$

ב. $\underline{x}(0)=A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $\begin{matrix}A+B=2\\-A+2B=7\end{matrix}$ $\Leftarrow$ $\begin{matrix}A=-1\\B=3\end{matrix}$

$\underline{x}(t)=-e^t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+3e^{4t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3e^{4t}-e^t\\6e^{4t}+e^t\end{pmatrix}$

ג. $\underline{x}(0)=A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $\begin{matrix}3A+B=2\\2A-B=3\end{matrix}$ $\Leftarrow$ $\begin{matrix}A=1\\B=-1\end{matrix}$

$\underline{x}(t)=e^{4t}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}-e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3e^{4t}-e^{-t}\\2e^{4t}+e^{-t}\end{pmatrix}$

ד. $\underline{x}(0)=A\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $\begin{matrix}4A+3B=-1\\10A\quad=5\end{matrix}$ $\Leftarrow$ $\begin{matrix}A=\frac{1}{2}\\B=-1\end{matrix}$

$\underline{x}(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\cos\frac{3t}{2}-3\sin\frac{3t}{2}\\10\cos\frac{3t}{2}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\sin\frac{3t}{2}+3\cos\frac{3t}{2}\\10\sin\frac{3t}{2}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-\cos\frac{3t}{2}-\frac{11}{2}\sin\frac{3t}{2}\\5\cos\frac{3t}{2}-10\sin\frac{3t}{2}\end{pmatrix}$

31-פב

המשך של (18)...

ה. $\underline{x}(0)=A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \Leftarrow \begin{matrix}A-B=3\\-A=1\end{matrix} \Leftarrow \begin{matrix}A=-1\\B=-4\end{matrix}$

$$\underline{x}(t)=-e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-4e^{3t}\left(t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right)$$
$$=e^{3t}\begin{pmatrix}-1-4(t-1)\\1-4(-t)\end{pmatrix}=\underline{\underline{e^{3t}\begin{pmatrix}3-4t\\1+4t\end{pmatrix}}}$$

ו. $\underline{x}(0)=A\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \Leftarrow \begin{matrix}3A+B=4\\-2A+2B=0\end{matrix} \Leftarrow A=B=1$

$$\underline{x}(t)=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+e^{8t}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}3+e^{8t}\\2e^{8t}-2\end{pmatrix}}}$$

ז. $\underline{x}(1)=A\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \Leftarrow \begin{matrix}A+B=3\\-A+2B=0\end{matrix} \qquad \begin{matrix}A=2\\B=1\end{matrix}$

$$\underline{x}(t)=2t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+t^4\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}2t+t^4\\2t^4-2t\end{pmatrix}}}$$

---

19. א) הרכיבים ב-$\underline{A}(t)*\underline{B}(t)$, הכפל של במטריצות $\underline{A}(t),\underline{B}(t)$, הם סכומים של מכפלות של רכיבים של $\underline{A},\underline{B}$:

$$(\underline{A}(t)*\underline{B}(t))_{ij}=\sum_k (\underline{A})_{ik}(\underline{B})_{kj}$$

ולכן
$$\frac{d}{dt}(\underline{A}(t)*\underline{B}(t))_{ij}=\sum_k \frac{d}{dt}(A_{ik}B_{kj})$$
$$=\sum_k \dot{A}_{ik}B_{kj}+A_{ik}\dot{B}_{kj}$$
$$=(\dot{\underline{A}}*\underline{B}+\underline{A}*\dot{\underline{B}})_{ij}$$

כלו׳
$$\underline{\underline{\frac{d}{dt}(\underline{A}*\underline{B})=\dot{\underline{A}}*\underline{B}+\underline{A}*\dot{\underline{B}}}} \quad \checkmark$$

ב) מסעיף א׳,
$$\frac{d}{dt}(\underline{A}*\underline{B}*\underline{C})=\dot{\underline{A}}*(\underline{B}*\underline{C})+\underline{A}*\frac{d}{dt}(\underline{B}*\underline{C})$$
$$=\dot{\underline{A}}*\underline{B}*\underline{C}+\underline{A}*(\dot{\underline{B}}*\underline{C}+\underline{B}*\dot{\underline{C}})$$
$$=\dot{\underline{A}}*\underline{B}*\underline{C}+\underline{A}*\dot{\underline{B}}*\underline{C}+\underline{A}*\underline{B}*\dot{\underline{C}}$$

הנגזרת של $\underline{A}^n$ הנו הסכום של n איברים, כל אחד מכפלה של n גורמים $\underline{A}$ כאשר במקום אחד מהם, יש את הנגזרת שלו.

אבל $\underline{A}\dot{\underline{A}}=\dot{\underline{A}}\underline{A}$, כל האיברים שווים ל- $\dot{\underline{A}}\underline{A}^{n-1}$

ולכן
$$\underline{\underline{d/dt(\underline{A}^n)=n\dot{\underline{A}}\underline{A}^{n-1}}}$$

n איברים שווים

$\checkmark$

המשך של (18)...

ב) כאשר $\underline{A}=\begin{pmatrix}1&t\\0&t\end{pmatrix} \Leftarrow \underline{A}^2=\begin{pmatrix}1&t\\0&t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\0&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&t+t^2\\0&t^2\end{pmatrix}$

שונים!
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\underline{A}^2) = \begin{pmatrix}0&1+2t\\0&2t\end{pmatrix} \\ 2\dot{\underline{A}}\,\underline{A} = 2\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\0&t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2t\\0&2t\end{pmatrix}\end{cases}$$

ד) נסמן את $\underline{A}^{-1}$ ב- $\underline{B}$. $\underline{A}\,\underline{B}=\underline{I} \Leftarrow \frac{d}{dt}(\underline{A}\,\underline{B})=\underline{0}$

$$\Leftarrow \text{(c) סעיף} \quad \dot{\underline{A}}\,\underline{B}+\underline{A}\,\dot{\underline{B}}=\underline{0}$$
$$\Leftarrow \quad \underline{A}\,\dot{\underline{B}}=-\dot{\underline{A}}\,\underline{B}$$
$$\Leftarrow \quad \dot{\underline{B}}=-\underline{A}^{-1}\dot{\underline{A}}\,\underline{B}$$
$$=-\underline{A}^{-1}\dot{\underline{A}}\,\underline{A}^{-1} \checkmark$$

---

20. א.
$$\exp(t\underline{A}) = \lim_{n\to\infty}(\underline{I}+1/n\cdot t\underline{A})^n$$

נסמן את $\underline{I}+\frac{1}{n}\cdot t\underline{A}$ ב- $\underline{X}(t)$. אנחנו רוצים לגזור את מה שבתוך הגבול של "$\underline{X}(t)^n$". אנחנו יודעים $\dot{\underline{X}}=\frac{1}{n}\underline{A}$ ולכן $\dot{\underline{X}}\,\underline{X}=\underline{X}\,\dot{\underline{X}}$. מ-(19)-(2)

$$\frac{d}{dt}(\underline{X}^n) = n\,\dot{\underline{X}}\,\underline{X}^{n-1}$$
$$= n(\tfrac{1}{n}\underline{A})\underline{X}^{n-1} = \underline{A}\,\underline{X}^{n-1}$$
$$\Leftarrow \quad \frac{d}{dt}(\exp(t\underline{A})) = \lim_{n\to\infty}\frac{d}{dt}(\underline{X}^n)$$
$$= \lim_{n\to\infty}(\underline{A}\,\underbrace{\underline{X}^{n-1}}_{\xrightarrow{n\to\infty}\exp(t\underline{A})}) = \underline{A}\exp(t\underline{A}) \checkmark$$

ב.
$$\exp(\underline{P}\,\underline{D}\,\underline{P}^{-1}) = \lim_{n\to\infty}(\underline{I}+\tfrac{1}{n}\underline{P}\,\underline{D}\,\underline{P}^{-1})^n$$
$$= \lim_{n\to\infty}(\underline{P}(\underline{I}+1/n\,\underline{D})\underline{P}^{-1})^n$$
$$= \lim_{n\to\infty}\underline{P}(\underline{I}+1/n\,\underline{D})^n\underline{P}^{-1}$$
$$= \underline{P}\exp(\underline{D})\underline{P}^{-1} \checkmark$$

$$(\underline{P}\underline{A}\underline{P}^{-1})^n = (\underline{P}\underline{A}\cancel{\underline{P}^{-1}})(\cancel{\underline{P}}\underline{A}\cancel{\underline{P}^{-1}})\cdots(\cancel{\underline{P}}\underline{A}\underline{P}^{-1}) = \underline{P}\underline{A}^n\underline{P}^{-1}$$

ג. למטריצה אלכסונית $\underline{D}=\begin{pmatrix}a_1&&0\\&\ddots&\\0&&a_r\end{pmatrix}$,

$$\underline{I}+1/n\,\underline{D} = \begin{pmatrix}1+a_1/n&&0\\&\ddots&\\0&&1+a_r/n\end{pmatrix}$$

$$(\underline{I}+1/n\,\underline{D})^n = \begin{pmatrix}(1+a_1/n)^n&&0\\&\ddots&\\0&&(1+a_r/n)^n\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}e^{a_1}&&0\\&\ddots&\\0&&e^{a_r}\end{pmatrix}$$

לכן
$$\exp(\underline{D}) = \begin{pmatrix}e^{a_1}&&0\\&\ddots&\\0&&e^{a_r}\end{pmatrix} \checkmark$$

המשך של (20)...

ב: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ערכים עצמיים :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$
$$\lambda = 2, 3$$

וקטורים עצמיים :

$$\lambda=2: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda=3: \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

לכן $\underline{A} = \underline{P}\,\underline{D}\,\underline{P}^{-1}$ כאשר $\underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

בדיקה!

$$\underline{P}\,\underline{D}\,\underline{P}^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\Leftarrow \quad \exp(t\underline{A}) = \underline{P}\,\exp(t\underline{D})\,\underline{P}^{-1}$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & 2e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

הערה : מכאן, אפשר לכתוב את הפתרון ל- $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x}$ עם תנאי התחלה $\underline{x}(0) = \underline{x_0}$: $\underline{x}(t) = \exp(t\underline{A}) * \underline{x_0}$.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & -e^{2t} + e^{3t} \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2x_0 - y_0)e^{2t} + (y_0 - x_0)e^{3t} \\ (2x_0 - y_0)e^{2t} + 2(y_0 - x_0)e^{3t} \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ צירוף לינארי של $\begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$ (כמו ב-16 הרצאה)

ג.

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ פעמים}} = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c & a \\ 0 & c \end{pmatrix}^n = \left[c\begin{pmatrix} 1 & a/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^n = c^n\begin{pmatrix} 1 & a/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = c^n\begin{pmatrix} 1 & na/c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^n & nac^{n-1} \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$$

$$\exp\left(t\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \exp\begin{pmatrix} t\lambda & t \\ 0 & t\lambda \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty}\left(\underline{I} + \tfrac{1}{n}\begin{pmatrix} t\lambda & t \\ 0 & t\lambda \end{pmatrix}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} 1 + t\lambda/n & t/n \\ 0 & 1 + t\lambda/n \end{pmatrix}^n$$
$$= \lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} (1 + t\lambda/n)^n & n(t/n)(1 + t\lambda/n)^{n-1} \\ 0 & (1 + t\lambda/n)^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & te^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \leftarrow \quad (1 + t\lambda/n)^n \longrightarrow e^{t\lambda}, \quad (1 + t\lambda/n)^{n-1} \longrightarrow e^{t\lambda}$$

המשך של (20)...

1. $\underline{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&3\end{pmatrix}$ ערכים עצמיים $\begin{vmatrix}1-\lambda&-1\\1&3-\lambda\end{vmatrix}=0$

$$\lambda^2-4\lambda+4=0$$

$$\lambda=2$$

וקטור עצמי $\underbrace{\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}}_{\underline{A}-\lambda\underline{I}}\underline{v}=\underline{0}\Rightarrow\underline{v}\,\|\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\underline{w}=\underline{v}\Leftarrow\underline{w}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

לכן $\underline{A}=\underline{P}\,\underline{D}\,\underline{P}^{-1}$ כאשר $\underline{P}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix},\ \underline{D}=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$

בדיקה!

$$\underline{P}\,\underline{D}\,\underline{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&-1\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&3\end{pmatrix}\checkmark$$

$$\Leftarrow\quad \exp(t\underline{A})=\underline{P}\exp(t\underline{D})\,\underline{P}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2t}&te^{2t}\\0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^{2t}&(t-1)e^{2t}\\-e^{2t}&-te^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&-1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}(1-t)e^{2t}&-te^{2t}\\te^{2t}&(1+t)e^{2t}\end{pmatrix}}}$$

<u>הערה</u>: הפתרון הכללי ל- $\dot{\underline{x}}=\underline{A}\underline{x}$ הוא

$$\underline{x}=\exp(t\underline{A})\,\underline{x}_0$$

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}(1-t)&-t\\t&(1+t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=e^{2t}\begin{pmatrix}x_0-(x_0+y_0)t\\y_0+(x_0+y_0)t\end{pmatrix}$$

צירוף ליניארי של $e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ te^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

<u>הגדרה</u> ע"י "Taylor" $\exp(\underline{A})=\underline{I}+\underline{A}+\frac{1}{2!}\underline{A}^2+\dots+\frac{1}{n!}\underline{A}^n+\dots$

צריך להוכיח את התכונות
$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\exp(t\underline{A}))=t\exp(t\underline{A})\\&\exp(\underline{P}\,\underline{D}\,\underline{P}^{-1})=\underline{P}\exp(\underline{D})\,\underline{P}^{-1}\end{aligned}\right\}$$

מההגדרה הזו:

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{I}+t\underline{A}+\frac{1}{2!}(t\underline{A})^2+\dots\right)=\underline{0}+\underline{A}+t\underline{A}^2+\frac{1}{2!}t^2\underline{A}^3+\dots$$

$$=\underline{A}\left(\underline{I}+t\underline{A}+\frac{1}{2!}t^2\underline{A}^2+\dots\right)$$

$$=\underline{A}\exp(t\underline{A})$$

$$\exp(\underline{P}\,\underline{D}\,\underline{P}^{-1})=\underline{I}+\underline{P}\,\underline{D}\,\underline{P}^{-1}+\frac{1}{2!}\underline{P}\,\underline{D}^2\underline{P}^{-1}+\dots+\frac{1}{n!}\underline{P}\,\underline{D}^n\underline{P}^{-1}+\dots$$

$$=\underline{P}\left(\underline{I}+\underline{D}+\frac{1}{2!}\underline{D}^2+\dots+\frac{1}{n!}\underline{D}^n+\dots\right)\underline{P}^{-1}$$

$$=\underline{P}\exp(\underline{D})\,\underline{P}^{-1}.$$