פתרונות לתרגילים על פרק 3

1. א. סדר 2, מעלה 1, לינארית ואי-הומוגנית.
   ב. סדר 1, מעלה 2
   ג. משוואה דיפרנציאלית חלקית, לינארית ואי-הומוגנית
   ד. סדר 2, מעלה 1, לינארית והומוגנית

---

2. א. בת-הפרדה

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} y^{2/3} = x + \text{קבוע}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = \pm\left(\frac{2x}{3} + C\right)^{3/2}}}$$

בדוק! $y' = \pm \frac{3}{2}\left(\frac{2x}{3} + C\right)^{1/2} \cdot \frac{2}{3}$ ✓

ב. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ בת-הפרדה

$$\Rightarrow \int y\,dy = \int x\,dx$$

$$\Rightarrow y^2/2 = x^2/2 + \text{קבוע}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = \pm\sqrt{(x^2 + a)}}}$$

בדוק!

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{2}(x^2+a)^{-1/2} \cdot 2x$$

$$= \pm x/\sqrt{(x^2+a^2)} = \frac{x}{y} \ ✓$$

ג. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-5}{x^2}$ בת-הפרדה $\int \frac{dy}{y-5} = \int \frac{dx}{x^2} + \text{קבוע}$

$$\ln|y-5| = -1/x + \text{קבוע}$$

$$y - 5 = Ce^{-1/x}$$

$$\underline{\underline{y = 5 + Ce^{-1/x}}}$$

בדוק!

$$y' = C \cdot e^{-1/x} \cdot (1/x^2)$$

$$= \frac{y-5}{x^2} \ ✓$$

המשך של (2ג) ...

דרך אחרת

$\frac{dy}{dx} = \frac{y-5}{x^2}$ ליניארית $y' - \frac{1}{x^2} y = \frac{-5}{x^2}$

$\mu = e^{\int P}$: $\mu(x) = e^{-\int dx/x^2} = e^{1/x}$ (x קבוע)

$e^{1/x} y' - 1/x^2 \, e^{1/x} y = -5/x^2 \, e^{1/x}$

$\Rightarrow d/dx \, (e^{1/x} y) = -5/x^2 \, e^{1/x}$

$\Rightarrow e^{1/x} y = \int -5/x^2 \, e^{1/x} \, dx$

$= 5e^{1/x} +$ קבוע

$\Rightarrow \underline{\underline{y = 5 + Ce^{-1/x}}}$

ד. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{y/x}$ הומוגנית $y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}x + v$

$\frac{dv}{dx} x + v = v + e^v$

$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = e^v$ בתר הפרדה

$\Rightarrow \int \frac{dv}{e^v} = \int \frac{dx}{x} +$ קבוע

$\Rightarrow -e^{-v} = \ln x +$ קבוע

$\Rightarrow v = -\ln(C - \ln x)$

$\Rightarrow y = vx = \underline{\underline{-x \ln(C - \ln x)}}$

בדוק!

$y' = -\ln(C - \ln x)$

$\quad -x \cdot \frac{1}{C - \ln x} \cdot (-1/x)$

$= -\ln(C - \ln x) + \frac{1}{C - \ln x}$

$= y/x + e^{y/x}$ ✓

ה. $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^3}{x^3 + xy^2}$ הומוגנית $y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} x + v$

$\frac{dv}{dx} x + v = \frac{2y^3}{x^3 + xy^2} = \frac{2y^3/x^3}{1 + y^2/x^2} = \frac{2v^3}{1+v^2}$

$\Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{2v^3}{1+v^2} - v = \frac{v^3 - v}{1+v^2}$

$\Rightarrow \int \frac{1+v^2}{v^3 - v} dv = \int \frac{dx}{x} +$ קבוע

צריך לפרק לשברים חלקיים

3-3 פ

המשך של (2ב) ...

$$v^3-v=v(v^2-1)=v(v-1)(v+1) \Rightarrow \frac{1+v^2}{v^3-v}=\frac{A}{v}+\frac{B}{v-1}+\frac{C}{v+1}$$

$$1+v^2=A(v^2-1)+Bv(v+1)+Cv(v-1)$$

$$\left.\begin{aligned} v=0: &\quad 1=-A \\ v=1: &\quad 2=2B \\ v=-1: &\quad 2=2C \end{aligned}\right\}$$

$$A=-1,\ B=C=1$$

$$\frac{1+v^2}{v^3-v}=-\frac{1}{v}+\frac{1}{v-1}+\frac{1}{v+1}$$

$$\Rightarrow \int\frac{1+v^2}{v^3-v}\,dv=-\ln|v|+\ln|v-1|+\ln|v+1|+\text{קבוע}$$

$$\Rightarrow -\ln|v|+\ln|v-1|+\ln|v+1|=\ln|x|+\text{קבוע}$$

$$\Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{v-1/v}}{\frac{(v-1)(v+1)}{v}}=Cx$$

$$\Rightarrow v^2-1=Cxv$$

$$\Rightarrow v^2-Cxv-1=0$$

$$\Rightarrow v=\tfrac{1}{2}\left(Cx\pm\sqrt{(C^2x^2+4)}\right)$$

רוצים למצוא את v כפונקציה של x

$$\Rightarrow \underline{\underline{y=xv=\tfrac{x}{2}\left(Cx\pm\sqrt{(C^2x^2+4)}\right)}}$$

$$=\tfrac{1}{2}Cx^2\pm\sqrt{(x^2+C^2x^4/4)}$$

רוצים למצוא את y כפונקציה של x

<u>בדיקה</u>

$$y'=Cx\pm\tfrac{1}{2}(x^2+C^2x^4/4)^{-1/2}\cdot(2x+C^2x^3)$$

$$x^3+xy^2=x^3+x\left(\tfrac{1}{4}C^2x^4+x^2+\tfrac{1}{4}C^2x^4\pm Cx^2\sqrt{(x^2+C^2x^4/4)}\right)$$

$$=x\left(\tfrac{1}{2}C^2x^4+2x^2\pm Cx^2\sqrt{(x^2+C^2x^4/4)}\right)$$

$$2y^3\overset{?}{=}(x^3+xy^2)y'=\left(\tfrac{1}{2}C^2x^4+2x^2\pm Cx^2\sqrt{(x^2+C^2x^4/4)}\right)\cdot\left(Cx^2\pm(x^2+C^2x^4/4)^{-1/2}(x^2+C^2x^4/2)\right)$$

$$\times\pm\sqrt{(x^2+C^2x^4/4)} \qquad \times\pm\sqrt{(x^2+C^2x^4/4)}$$

$$2y^3=\underset{2y}{2\left(\tfrac{1}{2}Cx^2\pm\sqrt{(x^2+C^2x^4/4)}\right)}\cdot\underset{y^2}{\left(\tfrac{1}{4}C^2x^4+x^2+\tfrac{1}{4}C^2x^4\pm Cx^2\sqrt{(x^2+C^2x^4/4)}\right)}$$

✓

.1 $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{5x-2y}$ הומוגנית $y = vx$

$$v'x + v = y' = \frac{x+2y}{5x-2y} = \frac{1+2\,y/x}{5-2\,y/x} = \frac{1+2v}{5-2v}$$

$$\Rightarrow \quad v'x = \frac{1+2v}{5-2v} - v = \frac{1+2v-5v+2v^2}{5-2v} = \frac{1-3v+2v^2}{5-2v}$$

$$\Rightarrow \int \frac{5-2v}{1-3v+2v^2}\,dv = \int \frac{dx}{x} + \text{קבוע} \qquad (*)$$

צריך פירוק לשברים חלקיים

$$1-3v+2v^2 = (1-v)(1-2v)$$

$$\frac{5-2v}{1-3v+2v^2} = \frac{A}{1-v} + \frac{B}{1-2v} \iff 5-2v = A(1-2v) + B(1-v)$$

$$\left.\begin{array}{ll} v=1: & 3 = -A \\ v=\tfrac{1}{2}: & 4 = B/2 \end{array}\right\} \Rightarrow A=-3,\ B=8$$

$$\int \frac{5-2v}{1-3v+2v^2}\,dv = \int \frac{-3}{1-v} + \frac{8}{1-2v}\,dv = +3\ln|1-v| - 4\ln|1-2v| + \text{קבוע}$$

$$(*) \Rightarrow \quad 3\ln|1-v| - 4\ln|1-2v| = \ln|x| + \text{קבוע}$$

$$\Rightarrow \quad (1-v)^3/(1-2v)^4 = Ax$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{(1-y/x)^3/(1-2y/x)^4 = Ax}}$$

פתרון עם y $(v = y/x)$

$$\Rightarrow \quad x^3(1-y/x)^3/x^4(1-2y/x)^4 = A$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{(x-y)^3/(x-2y)^4 = A}}$$

פתרון $y=y(x)$ כפונקציה סתומה

$$(x-y)^3 = A(x-2y)^4$$

<u>בדיקה!</u>

$$\frac{d}{dx}: \quad 3(x-y)^2(1-y') = 4A(x-2y)^3(1-2y')$$

$$\Rightarrow 3(x-y)^2(1-y') = 4\cdot\frac{(x-y)^3}{(x-2y)^4}(x-2y)^3(1-2y')$$

$$\Rightarrow 3\,(1-y') = 4\cdot\frac{x-y}{x-2y}\,(1-2y')$$

$$\Rightarrow 3(x-2y)(1-y') = 4(x-y)(1-2y')$$

$$\Rightarrow \big(3(x-2y) - 4(x-y)\big) = \big[3(x-2y) - 8(x-y)\big]\,y'$$

$$\Rightarrow (-x-2y) = (-5x+2y)\,y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x+2y}{5x-2y} \ \checkmark$$

המשך של ② ...

ג. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+5}{5x-2y+1}$ ⟵ תחת הצבה מתאימה מקבלים משוואה הומוגנית $\frac{dv}{du} = \frac{u+2v}{5u-2v}$

$$\left.\begin{aligned} u &= x-a \\ v &= y-b \end{aligned}\right\}$$

צריך למצוא את הפתרון למשוואות $\left\{\begin{aligned} x+2y+5&=0 \\ 5x-2y+1&=0 \end{aligned}\right.$

$(x=a, y=b)$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x+2y &= -5 \\ 5x-2y &= -1 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad 6x = -6 \quad \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=-2$$

$$a=-1,\ b=-2 \ \therefore \ \left.\begin{aligned} u &= x+1 \\ v &= y+2 \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+2v}{5u-2v} \xrightarrow{\text{סעיף ①}} \frac{(u-v)^3}{(u-2v)^4} = A$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{(x-y-1)^3}{(x-2y-3)^4} = A}}$$

ח. $\frac{dy}{dx} = y\tan x + \cos x$ ⟵ לינארית $\frac{dy}{dx} - \tan x \cdot y = \cos x$

$$\mu = e^{\int P} \Rightarrow \mu(x) = e^{-\int \tan x\,dx} = e^{\ln(\cos x) + \text{קבוע}}$$

$$\cos x \cdot \frac{dy}{dx} - \sin x \cdot y = \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\cos x \cdot y) = \cos^2 x$$

$$\Rightarrow \quad \cos x \cdot y = \int \cos^2 x\,dx$$

$$= \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2x)\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}(x + \underbrace{\tfrac{1}{2}\sin 2x}_{\sin x\cos x}) + \text{קבוע}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \tfrac{1}{2}x\sec x + \tfrac{1}{2}\sin x + C\sec x}}$$

$$y' = \tfrac{1}{2}\sec x + \tfrac{1}{2}x\sec x\tan x$$

בדוק!

$$+ \tfrac{1}{2}\cos x + C\sec x\tan x$$

$$= \tan x(\tfrac{1}{2}x\sec x + \tfrac{1}{2}\sin x + C\sec x) + \underbrace{\left[\tfrac{1}{2}\sec x + \tfrac{1}{2}\cos x - \tfrac{1}{2}\sin x\tan x\right]}_{\cos x}$$

$$\sec x - \sin x\tan x = \frac{1-\sin^2 x}{\cos x} = \cos x$$

ט.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3+2xy}{3xy^2+x^2} \Rightarrow (y^3+2xy)\,dx + (3xy^2+x^2)\,dy = 0$$

$$\partial/\partial y\,(y^3+2xy) = 3y^2+2x = \partial/\partial x\,(3xy^2+x^2)$$

מדוייקת: צריך למצוא פונקציה U כך ש-

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial U}{\partial x} = y^3+2xy \xrightarrow{\int \cdot dx} U = xy^3+x^2y + \left(\text{פונק' של } y\right)\\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y} = 3xy^2+x^2 \longrightarrow \text{פונק' קבוע}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{xy^3+x^2y = C}}$$

י.

$y'+2xy = x^3$ ליניארית $\mu = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}\cdot$ קבוע

$$\Big\downarrow \times e^{x^2}$$

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = x^3e^{x^2} \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = x^3e^{x^2}$$

$$\Rightarrow e^{x^2}y = \underbrace{\int x^3e^{x^2}dx}_{\substack{u=x^2\\ du=2x\,dx}} + \text{קבוע}$$

$$= \int u e^u\cdot\tfrac{1}{2}\,du + \text{קבוע}$$

$$\underset{\text{אינטגרציה בחלקים}}{=} \frac{u}{2}\int e^u du - \int \tfrac{1}{2}\left(\int e^u du\right)du + \text{קבוע}$$

$$= \tfrac{u}{2}e^u - \tfrac{1}{2}e^u + \text{קבוע}$$

$$= \tfrac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + \text{קבוע}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = \tfrac{1}{2}(x^2-1) + Ce^{-x^2}}}$$

בדיקה

$$y' = x - 2xCe^{-x^2}$$

$$\Rightarrow y'+2xy = x + x(x^2-1) = x^3 \checkmark$$

3. א. $\frac{dx}{dt} = 2x + t$ לינארית $\Leftarrow$ $dx/dt - 2x = t$

קבוע $\mu = e^{-\int 2dt} = e^{-2t}$.

$$e^{-2t}\frac{dx}{dt} - 2e^{-2t}x = te^{-2t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{-2t}x) = te^{-2t}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-2t}x = \int te^{-2t}dt + \text{קבוע}$$

$$= t\int e^{-2t}dt - \int\left(\int e^{-2t}dt\right)dt + \text{קבוע}$$

אינטגרציה בחלקים

$$= -\tfrac{1}{2}te^{-2t} - \tfrac{1}{4}e^{-2t} + \text{קבוע}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x = -\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{4} + Ce^{2t}}}$$

בדוק:

$$\frac{dx}{dt} = -\tfrac{1}{2} \quad + 2Ce^{2t}$$

$$2x = -t - \tfrac{1}{2} + 2Ce^{2t} \quad \checkmark$$

ב. תנאי התחלה $x(0) = A$ $\Leftarrow$ $A = -\tfrac{1}{4} + C$

$$C = A + \tfrac{1}{4}$$

$$\underline{\underline{x(t) = -\tfrac{t}{2} - \tfrac{1}{4} + (A + \tfrac{1}{4})e^{2t}}}$$

ג. $\frac{dx}{dt} = 2x + t$ $\xleftarrow[\text{Euler}]{\text{שיטת}}$ $x_{n+1} = x_n + h\underbrace{(2x_n + nh)}_{\dot{x}(nh) = 2x(nh) + nh}$

($x(nh) \to x_n$)

$x(0) = A \longleftarrow x_0 = A$

נוסחת נסיגה $x_{n+1} = x_n + h(2x_n + nh)$ $\Leftarrow$ $x_{n+1} = (1+2h)x_n + nh^2$

לינארית, אי-הומוגנית — — — — — — — — — —

פתרון כללי

$$x_{n+1} = (1+2h)x_n \quad \Rightarrow \quad x_n = C(1+2h)^n$$

הומוגנית — — — — — — — — — — — — בניק פתרון פרטי 8-:

$$x_{n+1} = (1+2h)x_n + nh^2 \iff \underbrace{x_{n+1} - (1+2h)x_n}_{S(x_n)} = nh^2$$

אופרטור לינארית S על סדרות $\quad S(x_n) = (nh^2)$

המשך של 23 ...

ננסה $x_n = an+b$ (צריך למצוא a,b)

$$x_{n+1}-(1+2h)x_n = (a(n+1)+b)-(1+2h)(an+b)$$
$$= n(a-(1+2h)a) + (a+b-(1+2h)b)$$
$$= \underbrace{-2han + (a-2hb)}_{=\, nh^2}$$

$\Rightarrow$ מקדם של n : $-2ha = h^2 \Rightarrow a = -h/2$

מקדם של 1 : $a-2hb=0 \Rightarrow b = a/2h = -1/4$

מצאנו פתרון פרטי $x_n = -\frac{hn}{2}-\frac{1}{4}$

$\Leftarrow$ פתרון כללי של נוסחת הנסיגה שלנו: $x_n = C(1+2h)^n - \frac{hn}{2} - \frac{1}{4}$

תנאי התחלה $x_0 = A$ $\Leftarrow$ $A = C - \frac{1}{4}$ $\Leftarrow$ $C = A + 1/4$

$$x_n = (A+\tfrac{1}{4})(1+2h)^n - \frac{hn}{2} - \frac{1}{4}$$

דרך אחרת למצוא פתרון פרטי: אנו מניחים שהפתרון בצורה צירוף ליניארי של הסדרות (1), (n).

$$S(n) = (n+1-(1+2h)n) = (1-2hn)$$
$$S(1) = (1-(1+2h)) = (-2h)$$
$$\Rightarrow S(n+\tfrac{1}{2h}) = (-2hn)$$
$$\xrightarrow{\times -h/2} S(-\tfrac{hn}{2}-\tfrac{1}{4}) = (h^2 n)$$

המשך של ③ ...

ג. מבוא קירוב לפתרון של ⊛ ע"י שיטת Euler :

$$x(nh) \sim x_n = \left(A+\tfrac{1}{4}\right)(1+2h)^n - \frac{hn}{2} - \frac{1}{4}$$

נ"א בזמן t (אם הוא מחלק ב- h) הקירוב הוא :

$$x(t) \sim (A+1/4)(1+2h)^{t/h} - t/2 - 1/4$$

$$\begin{pmatrix} t=nh \\ n=t/h \end{pmatrix}$$

כאשר משתמשים בשיטת Euler עם צעד h . כאשר $h\to 0$, הקירוב שואף לפתרון אמיתי

$$x(t) = \left(A+\tfrac{1}{4}\right) e^{2t} - t/2 - 1/4$$

<u>הערה</u> : $(1+2h)^{t/h} \xrightarrow{h\to 0} e^{2t}$

$$\overset{\parallel}{\left(1+\tfrac{2t}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} e^{2t}$$

---

4. א. $y = xy' + (y')^2/2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(y')^2 + xy' - y = 0$

$\Rightarrow\; \underline{\underline{y' = -x \pm \sqrt{(x^2+2y)}}}$

ב.

$$\int \frac{dv}{\pm\sqrt{v} - v} \underset{dv=2tdt}{\overset{v=t^2}{=}} \int \frac{2t\,dt}{\pm t - t^2}$$

$$= \int \frac{2\,dt}{\pm 1 - t}$$

$= -2\ln|\pm 1 - t| +$ קבוע

$\overset{t=\sqrt{v}}{=} \underline{\underline{-2\ln|\pm 1 - \sqrt{v}| +}}$ <u>קבוע</u>

ג. $y' = -x \pm \sqrt{(x^2+2y)} \;\underset{\substack{y=x^2u \\ y'=2xu+x^2u'}}{\Longrightarrow}\;$

$2xu + x^2u'$
$= -x \pm \sqrt{(x^2+2x^2u)}$

$\Downarrow$

$2u + xu' = -1 \pm \sqrt{(1+2u)}$

$\Downarrow$

$xu' = -1 - 2u \pm \sqrt{(1+2u)}$ בת-הפרדה

$\Downarrow$

$\int \frac{du}{-1-2u\pm\sqrt{(1+2u)}} = \int \frac{dx}{x} +$ קבוע

המשך של (ג) ...

$v = 1+2u$

$dv = 2du$

$$\int \frac{du}{-1-2u \pm \sqrt{(1+2u)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{-v \pm \sqrt{v}} \overset{(ב)}{=} -\ln\left|\pm 1-\sqrt{v}\right| + \text{קבוע}$$

$$= -\ln\left|\pm 1 - \sqrt{(1+2u)}\right| + \text{קבוע}$$

$$\Longrightarrow \quad -\ln\left|\pm 1-\sqrt{(1+2u)}\right| = \ln|x| + \text{קבוע}$$

$$\Longrightarrow \quad \pm 1 - \sqrt{(1+2u)} = C/x$$

$$\Longrightarrow \quad 1+2u = (\pm 1 - C/x)^2 = 1 + C^2/x^2 \mp 2C/x$$

$$\Longrightarrow \quad u = \mp C/x + C^2/2x^2$$

$$\overset{y=x^2u}{\Longrightarrow} \quad \underline{\underline{y = \mp Cx + C^2/2}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{בדוק!} : \ y' = \mp C,\ \sqrt{x^2+2y} = |x \mp C| \\ \mp C = -x \pm |x \mp C| \Leftrightarrow \pm x > C \end{array}}$$

יש עוד פתרון שנעלם לנו כאשר פתרנו את המשוואה ל- $u(x)$

— $1+2u=0$, $u=-\frac{1}{2}$ קבוע $\overset{y=x^2u}{\Longrightarrow}$ $\underline{\underline{y = -x^2/2}}$ בדוק! $y' = -x$, $\sqrt{x^2+2y} = 0$ ✓

ד. המשוואה ממעלה 2, צ"ל כאשר כתבנו אותה בצורה $y' = f(x,y)$, יש לנו שני פונקציות f (עם סימנים $\pm$)

$f(x,y) = -x \pm \sqrt{(x^2+2y)}$: רציפה בכל נקודה, $x^2+2y \geq 0$

$\partial f/\partial y = \pm \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(x^2+2y)}} \cdot 2$: רציפה בכל נקודה $x^2+2y > 0$

משפט Picard: לכל תנאי התחלה $y(x_0) = y_0$ כאשר $y_0 > -x_0^2/2$ קיים פתרון יחיד בסביבה של $x = x_0$ (אבל צ"ל בדיוק 2 פתרונות ל- $y = xy' + (y')^2/2$ כי יש 2 משוואות)

ה. $y(0)=1$: כל הפתרונות הם

$y = Cx + C^2/2$

$y = -x^2/2$ ← אי אפשר

$y(0) = 1 \Rightarrow 1 = C^2/2 \Rightarrow C = \pm\sqrt{2}$ $\quad \underline{\underline{y = \pm\sqrt{2}\,x + 1}}$

ו. $y(1) = -\frac{1}{2}$: $\underline{\underline{y = -x^2/2}}$ פתרון

$c^2+2c+1=0 \Leftarrow -\frac{1}{2} = C + C^2/2 \Leftarrow y = Cx + C^2/2$

$c = -1 \Rightarrow \underline{\underline{y = -x + \frac{1}{2}}}$

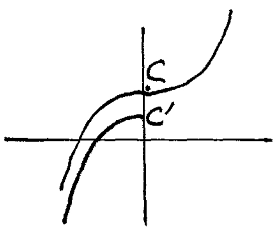
5. א. $\frac{dy}{dx} = |x|$ ← $f(x,y) = |x|$ רציפה, $\partial f / \partial y = 0$ רציפה ⇐ אין תנאי על (x_0, y_0)

$y(x) = \int |x|\, dx \quad \Leftarrow \quad \frac{dy}{dx} = |x|$

$x>0 \quad \int x\,dx = \frac{x^2}{2} +$ קבוע

$x<0 \quad \int -x\,dx = -\frac{x^2}{2} +$ קבוע

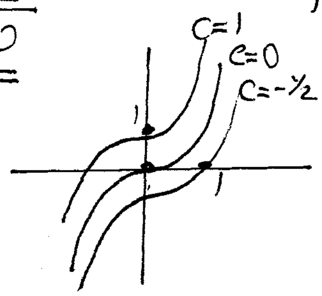
$$\Rightarrow \quad y(x) = \begin{cases} x^2/2 + C & x>0 \\ -x^2/2 + C' & x<0 \end{cases}$$



y רציפה ב- $x=0$ ⇐ $C = C'$

פתרון כללי

$$y(x) = \begin{cases} x^2/2 + C & x>0 \\ -x^2/2 + C & x<0 \end{cases}$$



$y(0)=0 \Rightarrow C=0$

$y(0)=1 \Rightarrow C=1$

$y(1)=0 \Rightarrow C=-\frac{1}{2}$

ב. $dy/dx = |y|$ ← $f(x,y) = |y|$ רציפה; $\partial f/\partial y = \begin{cases} 1 & y>0 \\ -1 & y<0 \end{cases}$ רציפה ב- $y \neq 0$ ⇐ $y_0 \neq 0$

[אבל אם משתמשים בתנאי Lipschitz, רואים ש- $||y_1|-|y_2|| \le |y_1 - y_2|$
ולכן אין תנאי על y_0]

$\int \frac{dy}{|y|} = \int dx +$ קבוע

$y>0 \quad \int \frac{dy}{y} = \ln y +$ קבוע

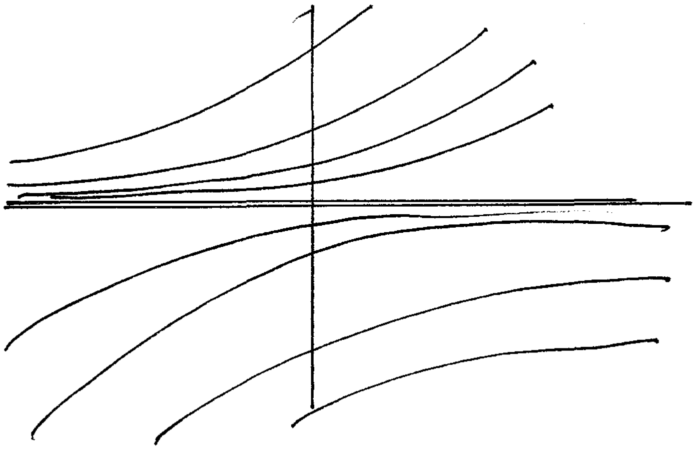
$y<0 \quad -\int \frac{dy}{y} = -\ln(-y) +$ קבוע

$$\Rightarrow \quad x = \begin{cases} \ln y + \text{קבוע} & y>0 \\ -\ln(-y) + \text{קבוע} & y<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} y = Ae^{x} & (A>0) \\ y = -Ae^{-x} & (A>0) \end{cases}$$

המשך של 2ב ...

גם יש פתרון $y=0$.



$y(0)=0 \Rightarrow \underline{y=0}$

$y(0)=1 \Rightarrow \underline{y(x)=e^{x}}$

$y(1)=0 \Rightarrow \underline{y=0}$

---

3) $\frac{dy}{dx}=\sqrt{y}$

$f(x,y)=\sqrt{y}$ רציפה ב- $y\geq 0$

$\partial f/\partial y = \frac{1}{2}y^{-1/2}$ רציפה ב- $y>0$

תנאי $y_0>0$

$\int\frac{dy}{\sqrt{y}}=\int dx$ + קבוע $\Leftarrow$ $2y^{1/2}=x+$ קבוע

$$y=\left(\frac{x}{2}+C\right)^2$$

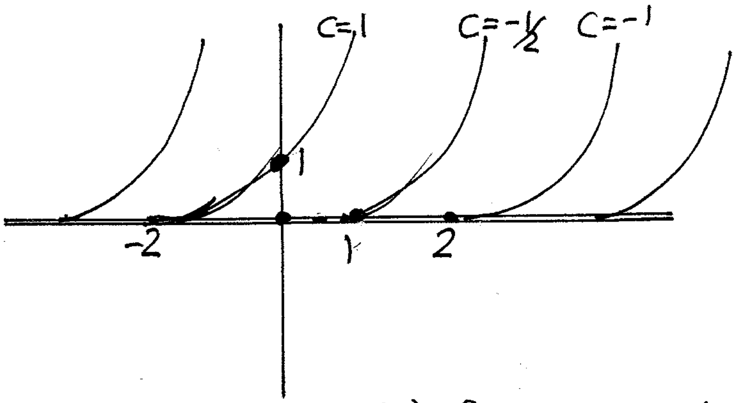
$y' = 2\left(\frac{x}{2}+C\right)\cdot\frac{1}{2}$ בדוק!

$= \frac{x}{2}+C$

$\sqrt{y} = \left|\frac{x}{2}+C\right|$

פתרון כאשר $x\geq -2C$

עוד פתרון: $y=0$



$y(0)=0 \Rightarrow y(x)=0$

או $y(x)=\begin{cases}0 & x<-2C\\ (x/2+C)^2 & x>-2C\end{cases}$

לכל C שלילי אפשרי!

$y(0)=1 \Rightarrow$ הפתרון לא $y=0$

$1=C^2 \Rightarrow C=\pm 1 \Rightarrow y(x)=\begin{cases}(x/2+1)^2 & x>2\\ 0 & x<2\end{cases}$

$C=-1$ אי אפשר

13-3פ המשך של (5ב) ...

$$y(1)=0 \Rightarrow y(x)=0 \quad \forall x$$

או
$$y(x)=\begin{cases}0 & x<-2C\\ \left(\frac{x}{2}+C\right)^2 & x>-2C\end{cases}$$

לכל C כך ש- $1<-2C$ $\left(C<-\frac{1}{2}\right)$

ג: $\frac{dy}{dx}=y^{2/3}$ $\quad f(x,y)=y^{2/3}$ רציפה לכל y

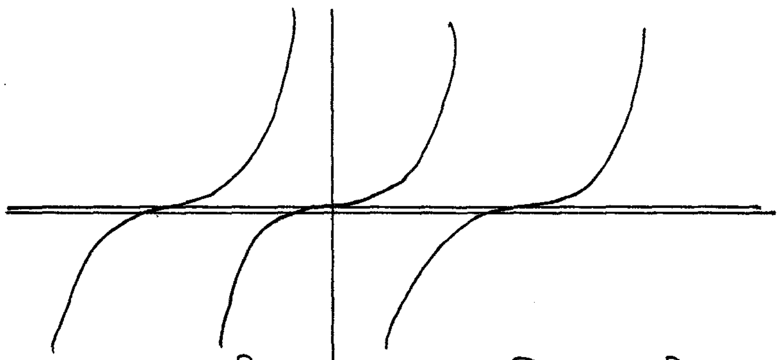
$\partial f/\partial y=\frac{2}{3}y^{-1/3}$ רציפה ל- $y\neq 0$

תנאי $y\neq 0$

$\int\frac{dy}{y^{2/3}}=\int dx+$קבוע $\Leftarrow$ $3y^{1/3}=x+$קבוע

$$y=\frac{1}{27}(x+C)^3$$

גם יש פתרון $y\equiv 0$



גם יש פתרון שאפשר לבנות מחלקים של פתרונות: לדוגמה

$$y(x)=\begin{cases}\frac{1}{27}(x-a)^3 & x<a\\ 0 & a\le x\le b\\ \frac{1}{27}(x-b)^3 & x>b\end{cases}$$

לכל $a\le b$, או

$$y(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \frac{1}{27}(x-a)^3 & x>a\end{cases}$$

או.
$$y(x)=\begin{cases}\frac{1}{27}(x-a)^3 & x<a\\ 0 & x>a\end{cases}$$

או לא $y(x)=0$. (בגלל שהנגזרת של $\frac{1}{27}(x-a)^3$ שווה ל-0 ב- $x=a$ הפונקציות שבנינו הן גזירות)

המשך של 25 ...

תנאי התחלה $y(0)=0$: כל 4 סוגים של פתרון אפשרי ($a\le 0\le b$) בסוג ראשון; $0\ge a$ בסוג שני; $a\le 0$ בסוג שלישי.

תנאי התחלה $y(0)=1$: סוג ראשון $\frac{1}{27}(-b)^3=1 \Rightarrow b=-3$

$$y(x)=\begin{cases} \frac{1}{27}(x-a)^3 & x<a \\ 0 & a\le x\le -3 \\ \frac{1}{27}(x+3)^3 & x>-3 \end{cases} \qquad (a\le -3)$$

או סוג שני:

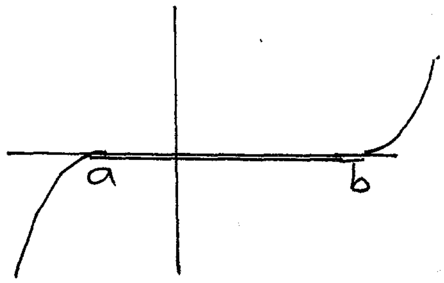
$$y(x)=\begin{cases} 0 & x<-3 \\ \frac{1}{27}(x+3)^3 & x>-3 \end{cases}$$

תנאי התחלה $y(1)=0$: כל 4 סוגים של פתרון אפשרי:

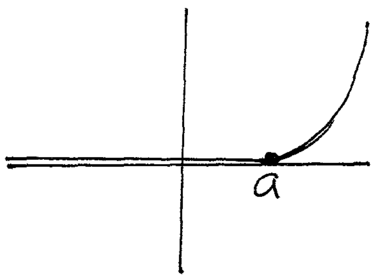
סוג ראשון $a\le 1\le b$

סוג שני $a\ge 1$

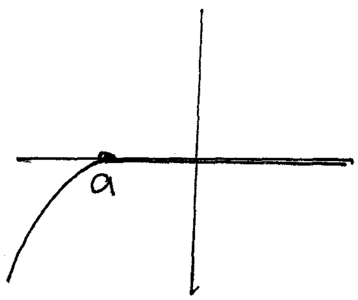
סוג שלישי $a\le 1$.



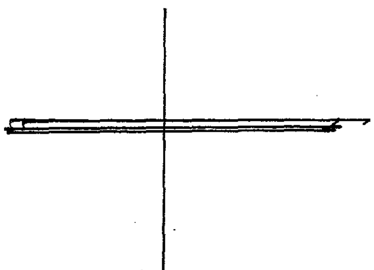
סוג ראשון
$a\le b$



סוג שני



סוג שלישי



סוג רביעי

המשך של (5)...

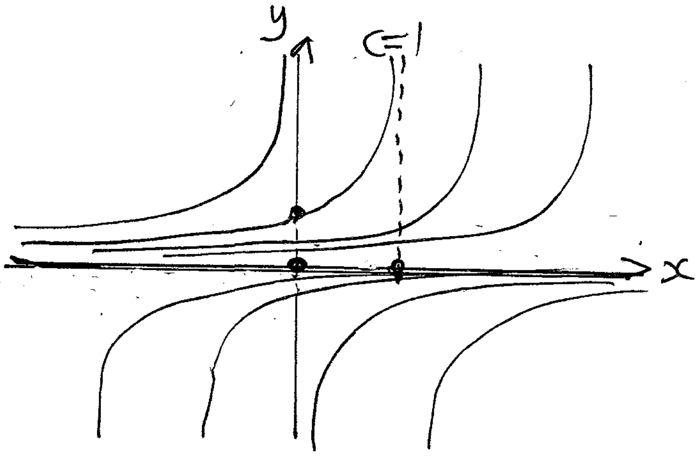
(ה) $\frac{dy}{dx} = y^2$

$\begin{cases} f(x,y)=y^2 \\ \partial f/\partial y = 2y \end{cases}$ רציפות $\Rightarrow$ אין תנאי על (x_0, y_0)

$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx +$ קבוע $\Rightarrow -\frac{1}{y} = x +$ קבוע

$\Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{1}{C-x}}}$

עוד פתרון $\underline{\underline{y = 0}}$



תנאי התחלה $y(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{y \equiv 0}}$

תנאי התחלה $y(0)=1 \Rightarrow 1 = 1/C \Rightarrow C=1$

$\underline{\underline{y = 1/(1-x)}} \quad (x<1)$

תנאי התחלה $y(1)=0 \Rightarrow y \equiv 0$

<u>הערה</u> במקרה הזה, קיים פתרון יחיד שעובר בכל נקודה
אבל הפתרון לא מוגדר על כל x (חוץ מהפתרון $y=0$)
במקרה (ד), הפתרון לא יחיד אם התנאי ההתחלה $y(x_0)=y_0=0$
אבל כל הפתרונות מוגדר על כל $x \in \mathbb{R}$.