פתרונות לתרגילים על פרק 2

1. א. סדר 1, ליניארית והומוגנית
ב. סדר 1, ליניארית ואי-הומוגנית
ג. סדר 1, לא ליניארית
ד. סדר 2, ליניארית
ה. סדר 2, לא ליניארית
ו. סדר 1, לא ליניארית

---

2. א. $x_{n+1} = 3x_n \Rightarrow x_n = A\cdot 3^n$

ב. $x_{n+1} = n^2 x_n \Rightarrow$

$$x_n = (n-1)^2 x_{n-1} = (n-1)^2(n-2)^2 x_{n-2} = (n-1)^2(n-2)^2\cdots 1^2 x_1$$

$$x_n = [(n-1)!]^2\cdot C$$

ג. $x_{n+1} = x_n^3 \Rightarrow$

$$x_1 = x_0^3$$
$$x_2 = x_1^3 = (x_0^3)^3 = x_0^9$$
$$x_3 = x_2^3 = (x_0^9)^3 = x_0^{27}$$
$$x_n = (x_0)^{3^n}$$

ד. $x_{n+1} = x_n + n \Rightarrow$

$$x_1 = x_0 + 0 = x_0$$
$$x_2 = x_1 + 1 = x_0 + 1$$
$$x_3 = x_2 + 2 = x_0 + (1+2)$$
$$\cdots\ x_n = x_{n-1} + (n-1) \cdots = x_0 + (1+2+\cdots+(n-1))$$
$$= \tfrac{1}{2}n(n-1) + x_0$$

ה. $x_{n+1} = (1+\frac{1}{n})x_n + n^2 - 1 \Rightarrow$ ($a_n = x_n/n$)

$$a_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left((1+1/n)x_n + n^2 - 1\right) = 1/n\, x_n + (n-1) = a_n + (n-1)$$

$$\Rightarrow a_n = a_{n-1} + (n-2) = a_{n-2} + (n-3) + (n-2)$$
$$\vdots$$
$$= a_1 + 0 + 1 + \cdots + (n-2) = C + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

$$\Rightarrow x_n = n a_n = Cn + \tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)$$

③ א. אם $A2^n + B3^n = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} A+B=0 & n=0 \\ 2A+3B=0 & n=1 \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow A=B=0$ ✓

<u>הערה</u> להוכיח שקבוצה של סדרות בלתי תלויים לינארית, מספיק למצוא ראש של הסידרה (או כמה ערכים של n) כך שמקבלים וקטורים בלתי תלוים לינארית

$\{(2^n),(3^n)\} \xleftarrow[n=1]{n=0} \{\binom{1}{2},\binom{1}{3}\}$ בלתי תלוים לינארית $\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\right)$

ב. $\{(n),(2^n)\} \xleftarrow[n=1]{n=0} \{\binom{0}{1},\binom{1}{2}\}$ בלתי תלוים לינארית $\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0\right)$

$\Rightarrow \{(n),(2^n)\}$ בלתי תלוים לינארית

ג. $\{(n),(2^n-1)\} \xleftarrow[n=1]{n=0} \{\binom{0}{1},\binom{0}{1}\}$!

$\xleftarrow[n=2]{n=0} \{\binom{0}{2},\binom{0}{3}\}$ בלתי תלוים לינארית

$\Rightarrow \{(n),(2^n-1)\}$ בלתי תלוים לינארית.

ד. $\{(1),(n),(2^n)\} \xleftarrow[\substack{n=1 \\ n=2}]{n=0} \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right\}$ בלתי תלוים לינארית

$$\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\right)$$

$\Rightarrow \{(1),(n),(2^n)\}$ בלתי תלוים לינארית

---

④ א. $(2^n),(3^n) \Rightarrow$ נוסחת נסיגה עם מקדמים קבועים

$\lambda=2,3$ שורשים של המשוואה האופינית

$\Rightarrow$ משוואה אופינית $(\lambda-2)(\lambda-3)=0 = \lambda^2-5\lambda+6$ $(\lambda^2=5\lambda-6)$

נוסחת נסיגה: $\underline{\underline{x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n}}$

ב. $(2^n),(n2^n) \Rightarrow \lambda=2$ שורש כפול של המשוואה האופינית

$\Leftarrow$ משוואה אופינית $(\lambda-2)^2=0 = \lambda^2-4\lambda+4$ $(\lambda^2=4\lambda-4)$

נוסחת נסיגה: $\underline{\underline{x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n}}$

ג. $(2^n),(1),(n) \Rightarrow \lambda=1,2$ שורשים של המשוואה האופינית ($\lambda=1$ שורש כפול)

1^n, $n\cdot 1^n$

$\Leftarrow$ משוואה אופינית $(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$

$(\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda-2) = \lambda^3-4\lambda^2+5\lambda+2$

$\lambda^3 = 4\lambda^2-5\lambda-2 \Rightarrow$ נוסחת נסיגה: $\underline{\underline{x_{n+3} = 4x_{n+2} - 5x_{n+1} - 2x_n}}$

המשך של ④ ...

3. $(n), (3^n)$: אי אפשר שלנוסחה נסיגה ליניארית והומוגנית עם מקדמים קבועים, קבוצת הפתרונות היא $\langle (n), (3^n) \rangle = \{(An + B\cdot 3^n) \mid A,B\in\mathbb{R}\}$
אבל $\langle (1),(n),(3^n) \rangle$ היא קבוצת הפתרונות של הנוסחה הנסיגה
שמשוואת אופיינית שלה: $(\lambda-1)^2(\lambda-3) = 0$ (שורשים 1 כפול, 3)

$$(\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3 = 0$$

כלומר:

$$x_{n+3} = 5x_{n+2} - 7x_{n+1} + 3x_n$$

למצוא נוסחה נסיגה ליניארית עם קבוצת פתרונות $\langle (n), (3^n) \rangle$
(בו-מימדי $\Leftarrow k=2$) אפשר לכתוב:

$$\begin{vmatrix} x_n & x_{n+1} & x_{n+2} \\ n & n+1 & n+2 \\ 3^n & 3^{n+1} & 3^{n+2} \end{vmatrix} = 0$$

ביטוי ליניארי והומוגני ב- x_n, x_{n+1}, x_{n+2}
נעשה מתאפס כאשר $x_n = n$
או $x_n = 3^n$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_n & x_{n+1} & x_{n+2} \\ n & n+1 & n+2 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} n & n+1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} x_{n+2} - \begin{vmatrix} n & n+2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} x_{n+1} + \begin{vmatrix} n+1 & n+2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} x_n = 0$$

$$\Rightarrow (2n-1)\, x_{n+2} - (8n-2)\, x_{n+1} + (6n+3)\, x_n = 0$$

$$\Rightarrow x_{n+2} = \frac{8n-2}{2n-1} x_{n+1} - \frac{6n+3}{2n-1} x_n$$

בדיקה: (n) :

$$n+2 \overset{?}{=} \frac{8n-2}{2n-1}(n+1) - \frac{6n+3}{2n-1}\cdot n$$

$$= \frac{(8n-2)(n+1) - (6n+3)n}{2n-1}$$

$$= \frac{8n^2+6n-2-6n^2-3n}{2n-1} = \frac{2n^2+3n-2}{2n-1} = n+2 \checkmark$$

(3^n) :

$$3^{n+2} \overset{?}{=} \frac{8n-2}{2n-1} 3^{n+1} - \frac{6n+3}{2n-1} 3^n$$

$$= \frac{3^n}{2n-1}\left((8n-2)3 - (6n+3)\right) = \frac{3^n}{2n-1}(18n-9) = 9\cdot 3^n \checkmark$$

המשך של ④ ...

ה. : $(n!), (1)$ $k=2$

$$\begin{vmatrix} x_n & x_{n+1} & x_{n+2} \\ n! & (n+1)! & (n+2)! \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x_n & x_{n+1} & x_{n+2} \\ 1 & n+1 & (n+1)(n+2) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_n \begin{vmatrix} n+1 & (n+1)(n+2) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - x_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & (n+1)(n+2) \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + x_{n+2} \begin{vmatrix} 1 & n+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -x_n (n+1)^2 + x_{n+1}(n^2+3n+1) - n x_{n+2} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_{n+2} = (n+3+1/n)x_{n+1} - 1/n\,(n+1)^2 x_n}}$$

בדיקה: (1) : $1 \overset{?}{=} (n+3+1/n) - \underbrace{\tfrac{1}{n}(n+1)^2}_{(n+2+1/n)}$ ✓

$(n!)$: $(n+2)! \overset{?}{=} (n+3+1/n)(n+1)! - 1/n\,(n+1)^2 n!$

$$= n!\,[(n+3+1/n)(n+1) - 1/n\,(n^2+2n+1)]$$

$$= n!\,[n^2+4n+4+1/n - n - 2 - 1/n]$$

$$= n!\,(n^2+3n+2) = n!\,(n+1)(n+2) \checkmark$$

ו. : $(2^n), (n!), (1)$

$$\begin{vmatrix} x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & x_{n+3} \\ 2^n & 2^{n+1} & 2^{n+2} & 2^{n+3} \\ n! & (n+1)! & (n+2)! & (n+3)! \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\begin{vmatrix} x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & x_{n+3} \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & n+1 & (n+1)(n+2) & (n+1)(n+2)(n+3) \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0}}$$

(5) א.

$x_{n+1} = n x_n + n!$ ליניארית, אי-הומוגנית

הומוגנית: $x_{n+1} = n x_n$, פתרון כללי $x_n = A(n-1)!$

פתרון פרטי: $x_n = n!$ $(n+1)! = n \cdot n! + n!$

⇐ פתרון כללי: $x_n = n! + A(n-1)!$

ב. $x_{n+1} = 2x_n + 1$

הומוגנית: $x_{n+1} = 2x_n$, פתרון כללי $x_n = A \cdot 2^n$

פתרון פרטי: נימוש $x_n = c$ ⇐ $c = 2c + 1$ ⇐ $c = -1$
$(x_{n+1} = 2x_n + 1)$

לכן $x_n = -1$ פתרון

⇐ פתרון כללי: $x_n = A \cdot 2^n - 1$

ג. $x_{n+2} = 4x_{n+1} + 5x_n$ ליניארית והומוגנית, מקדמים קבועים

משוואה אופיינית: $\lambda^2 = 4\lambda + 5$

$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$

$(\lambda + 1)(\lambda - 5) = 0$

$\lambda = -1, 5$

⇐ פתרון כללי $x_n = A(-1)^n + B \cdot 5^n$

ד. $x_{n+2} = 4x_{n+1} + 5x_n + 5^n - n$ ליניארית, אי-הומוגנית

הומוגנית: $x_{n+2} = 4x_{n+1} + 5x_n$, ⇐(ג) פתרון כללי $x_n = A(-1)^n + B \cdot 5^n$

פתרון פרטי $x_{n+2} - 4x_{n+1} - 5x_n = 5^n - n$

העתקה S כאן היא: $S: (x_n) \to (x_{n+2} - 4x_{n+1} - 5x_n)$

$-n$: $S(n) = (n+2-4(n+1)-5n) = (-2-8n)$

$S(1) = (1-4-5) = (-8)$

$\Rightarrow S(n - \frac{1}{4}) = (-8n)$

$\Rightarrow S(\frac{n}{8} - \frac{1}{32}) = (n)$ .... א"ז $x_n = \frac{n}{8} - \frac{1}{32}$ פתרון פרטי של $x_{n+2} - 4x_{n+1} - 5x_n = -n$

בדוק! $\left(\frac{n+2}{8} - \frac{1}{32}\right) - 4\left(\frac{n+1}{8} - \frac{1}{32}\right) - 5\left(\frac{n}{8} - \frac{1}{32}\right)$

$= n(1/8 - 4/8 - 5/8) + (2/8 - 1/32 - 4/8 + 4/32 + 5/32) = -n$ ✓

המשך של (25) ...

$\underline{5^n}$:

$$S(5^n) = 0$$
$$S(n5^n) = ((n+2)5^{n+2} - 4(n+1)5^{n+1} - 5n5^n)$$
$$= (5^{n+1}(5n+10-4n-4-n)) = (6\cdot 5^{n+1})$$
$$\Rightarrow S(\tfrac{1}{30} n5^n) = (5^n) \quad \dots \quad x_n = \tfrac{1}{30} n 5^n$$

לכ"ל פתרון פרטי

$$\Leftarrow \quad x_n = A(-1)^n + B\cdot 5^n + \frac{n}{8} - \frac{1}{32} + \frac{n}{30}\cdot 5^n$$

דרך אחרת למציאת פתרון פרטי:

$\underline{-n}$: ניחוש $x_n = Cn + D$

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} - 5x_n = -n \Rightarrow (C(n+2)+D) - 4(C(n+1)+D) - 5(Cn+D) = -n$$

מקדם של n: $C - 4C - 5C = -1 \Rightarrow C = 1/8$

מקדם של 1: $2C + D - 4(C+D) - 5D = 0 \Rightarrow -2C - 8D = 0 \Rightarrow D = -1/32$.

פתרון פרטי $x_n = n/8 - 1/32$

$\underline{5^n}$: $\lambda = 5$ שורש של משוואה אופיינית

ניחוש: $x_n = En5^n$

$$x_{n+2} - 4x_{n+1} - 5x_n = 5^n \Rightarrow E(n+2)5^{n+2} - 4E(n+1)5^{n+1} - 5En5^n = 5^n$$
$$\Rightarrow E\cdot 5^{n+1}[5(n+2) - 4(n+1) - n] = 5^n$$
$$\Rightarrow E\cdot 5^{n+1}\cdot 6 = 5^n$$
$$\Rightarrow E = 1/30$$

פתרון פרטי $x_n = n/30 \cdot 5^n$

ה. $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n + n\cdot 2^n + 3^n + 5$

הומוגנית: $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 9x_n$ (*)

משוואה אופיינית: $\lambda^2 = 6\lambda - 9 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$

$\lambda = 3$ כפול

פתרון כללי: $x_n = (An+B)3^n$

פתרון פרטי: $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = n\cdot 2^n + 3^n + 5$

ניחושים:

$n\cdot 2^n$: $x_n = (Cn+D)2^n$

3^n : $x_n = En^2 3^n$

5 : $x_n = F$

המשך של (כב) ...

$: \underline{n\cdot 2^n}$ $\quad x_n=(Cn+D)\cdot 2^n$

$x_{n+2}-6x_{n+1}+9x_n=n\cdot 2^n: \quad (C(n+2)+D)2^{n+2}-6(C(n+1)+D)2^{n+1}+9(Cn+D)2^n\overset{?}{=}n\cdot 2^n$

$\Rightarrow \quad (C(n+2)+D)\cdot 4-6(C(n+1)+D)2+9(Cn+D)\overset{?}{=}n$

מקדם של n : $4C-12C+9C=1 \Rightarrow C=1$

מקדם של 1 : $4(2C+D)-12(C+D)+9D=0 \Rightarrow D=4$

קיבלנו $x_n=(x+4)\cdot 2^n$ כפתרון פרטי ל- $x_{n+2}-6x_{n+1}+9x_n=n\cdot 2^n$

$:\underline{3^n}$ $\quad x_n=En^2 3^n$

$x_{n+2}-6x_{n+1}+9x_n=3^n: \quad E(n+2)^2 3^{n+2}-6E(n+1)^2 3^{n+1}+9En^2 3^n\overset{?}{=}3^n$

$\Rightarrow \quad E(n+2)^2\cdot 9-6E(n+1)^2\cdot 3+9En^2\overset{?}{=}1$

$\Rightarrow 9E(n^2+4n+4)-18E(n^2+2n+1)+9En^2\overset{?}{=}1$

$\Rightarrow \quad 18E=1 \Rightarrow E=1/18$

קיבלנו $x_n=n^2\cdot 3^n/18$

$:\underline{5}$ $\quad x_n=F$

$x_{n+2}-6x_{n+1}+9x_n=5 \quad : \quad F-6F+9F=5 \Rightarrow F=5/4$

פתרון כללי: $\underline{x_n=(An+B)3^n+(x+4)2^n+\frac{n^2}{18}3^n+\frac{5}{4}}$

<u>דרך אחרת למציאת פתרון פרטי:</u>

רוצים פתרון פרטי ל- $S(x_n)=(n\cdot 2^n+3^n+5)$ כאשר $S(x_n)=(x_{n+2}-6x_{n+1}+9x_n)$

$: \underline{n\cdot 2^n}$ ניחוש של $(x_n)=(2^n),(n2^n)$

$S(2^n)=(2^{n+2}-6\cdot 2^{n+1}+9\cdot 2^n)=((4-12+9)2^n)=(2^n)$

$S(n2^n)=((n+2)2^{n+2}-6(n+1)2^{n+1}+9n2^n)$

$=((4n+8-12n-12+9n)2^n)$

$=((n-4)2^n)$

$\Rightarrow S(n2^n+4\cdot 2^n)=(n2^n)$

חלק ראשון של פתרון פרטי

- - - - - - - - - -

$: \underline{3^n}$ ניחוש $(x_n)=(E\cdot n^2 3^n)$

$S(n^2 3^n)=((n+2)^2 3^{n+2}-6(n+1)^2 3^{n+1}+9n^2 3^n)$

$=(3^{n+2}\underbrace{((n+2)^2-2(n+1)^2+n^2)}_{n^2+4n+4-2n^2-4n-2+n^2})=(2\cdot 3^{n+2})=(18\cdot 3^n)$

$\Rightarrow S(\frac{1}{18}n^2 3^n)=(3^n)$

חלק שני של פתרון פרטי

המשך של (ב5)...

5: ניחוש (קבוע) $(x_n =)$

$$S(1) = (1-6+9) = (4) \Rightarrow S(5/4) = 5.$$

חלק שלישי של פתרון פרטי

$$\underline{\underline{x_n = (n+4)2^n + 1/18\, n^2 3^n + 5/4}}$$ ביחד

---

(1) $x_{n+3} = 2x_n - x_{n+2}$ לינארית והומוגנית

משוואה אופיינית: $\lambda^3 = 2 - \lambda^2$

$$\Leftarrow \quad \lambda^3 + \lambda^2 - 2 = 0$$

$$\Leftarrow \quad (\lambda-1)(\lambda^2 + 2\lambda + 2) = 0$$

$$\Leftarrow \quad \lambda = 1, \ -1 \pm i$$

$$\Leftarrow \quad \underline{\underline{x_n = A + B(-1+i)^n + C(-1-i)^n}}$$

פתרון כללי

---

(3) $x_{n+3} = 2x_n - x_{n+2} + n + (-1)^n$

הומוגנית: $x_n = A + B(-1+i)^n + C(-1-i)^n$

פתרון פרטי ל- $x_{n+3} - 2x_n + x_{n+2} = n + (-1)^n \Longleftrightarrow S(x_n) = (n + (-1)^n)$

כאשר $S(x_n) \equiv (x_{n+3} - 2x_n + x_{n+2})$

n: ניחוש $x_n = (Cn + D)n$

$$S(n) = (n+3 - 2n + n + 2) = (1)$$

$$S(n^2) = ((n+3)^2 - 2n^2 + (n+2)^2) = (10n + 13)$$

$$\Rightarrow S(n^2 - 13n) = (10n) \Rightarrow S\left(\frac{n^2-13n}{10}\right) = (n)$$

חלק ראשון של פתרון פרטי

$(-1)^n$: ניחוש $x_n = E(-1)^n$

$$S((-1)^n) = ((-1)^{n+3} - 2(-1)^n + (-1)^{n+2})$$

$$= ((-1)^n(-1-2+1))$$

$$= (-2(-1)^n) \Rightarrow S(-\tfrac{1}{2}(-1)^n) = ((-1)^n)$$

חלק שני של פתרון פרטי

פתרון כללי:
$$\underline{\underline{x_n = \underbrace{A + B(-1+i)^n + C(-1-i)^n}_{\text{פתרון כללי של נוסחה נסיגה הומוגנית}} + \underbrace{\frac{n^2-13n}{10} - \tfrac{1}{2}(-1)^n}_{\text{פתרון פרטי}}}}$$

המשך של ⑤ ...

ח) זה הנוסחה נסיגה ב-(ב4).

(n), (3^n) פתרונות $\left\{ k=2 \right.$ ⇐ פתרון כללי $\underline{\underline{x_n = A\cdot 3^n + B\cdot n}}$

---

⑥ א. $x_1 = 4$ (א5) $\Rightarrow x_n = n! + A(n-1)!$

$\overset{n=1}{\Rightarrow}\quad 4 = 1 + A$

$\Rightarrow\quad A = 3\qquad \underline{\underline{x_n = n! + 3(n-1)!}}$

- - - - - - - - - - - - - - -

ב. $x_1 = 3$ (ב5) $\Rightarrow x_n = A\cdot 2^n - 1$

$\overset{n=1}{\Rightarrow}\quad 3 = 2A - 1$

$\Rightarrow\quad A = 2\qquad \underline{\underline{x_n = 2^{n+1} - 1}}$

- - - - - - - - - - - - - - -

ג. $x_0 = x_1 = 1$ (ג5) $\Rightarrow x_n = A(-1)^n + B\cdot 5^n$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow n=0:\ 1 = A + B \\ n=1:\ 1 = -A + 5B \end{array}\right\} \Rightarrow$ סכום $2 = 6B$, $B = \frac{1}{3}$

$A = 1 - B = 2/3$

$\underline{\underline{x_n = 2/3\,(-1)^n + 1/3\, 5^n}}$

- - - - - - - - - - - - - - -

ד. (ד5) $\Rightarrow x_n = A(-1)^n + B\cdot 5^n + n/8 - 1/32 + n/30\cdot 5^n$

$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1 \Rightarrow\ 0 = A + B - 1/32 \\ x_1 = 1 \Rightarrow\ 1 = -A + 5B + 1/8 - 1/32 + 1/6 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow A + B = 1/32 \\ -A + 5B = 71/96 \end{array}\right\} \Rightarrow$ סכום $6B = 74/96 \Rightarrow B = 37/288$

$A = 1/32 - B = -7/72$

$\underline{\underline{x_n = -7/72\,(-1)^n + 37/288\, 5^n + n/8 - 1/32 + n/30\cdot 5^n}}$

- - - - - - - - - - - - - - -

ה. (ה5) $\Rightarrow x_n = (n+4)2^n + 1/18\, n^2 3^n + 5/4 + (An+B)3^n$

$x_0 = 1 \overset{n=0}{\Rightarrow}\quad 1 = 4 + 5/4 + B \Rightarrow B = -17/4$

$x_1 = 2 \overset{n=1}{\Rightarrow}\quad 2 = 10 + 1/6 + 5/4 + (A+B)3$

$\Rightarrow 3(A+B) = -8 - 1/6 - 5/4 = -113/12$

$\Rightarrow\quad A = -113/36 - B = \frac{17}{4} - \frac{113}{36} = \frac{40}{36} = 10/9$

$\underline{\underline{x_n = (n+4)2^n + \tfrac{1}{2}n^2 3^{n-2} + 5/4 + \left(\frac{10n}{9} - \frac{17}{4}\right)3^n}}$

המשך de ⑥ ...

.1

$$⑤_1 \Rightarrow x_n = A + B(-1+i)^n + C(-1-i)^n$$

$$x_0 = 1 \overset{n=0}{\Longrightarrow} 1 = A + B + C \quad ①$$

$$x_1 = 2 \overset{n=1}{\Longrightarrow} 2 = A + (-1+i)B + (-1-i)C \quad ②$$

$$x_2 = 4 \overset{n=2}{\Longrightarrow} 4 = A + (-2i)B + (2i)C \quad ③$$

$$\Rightarrow \quad A + B + C = 1$$

$$②-① \quad (-2+i)B + (-2-i)C = 1 \quad ④$$

$$③-① \quad (-2i-1)B + (2i-1)C = 3 \quad ⑤$$

$$i \cdot ④ \quad (-2i-1)B + (-2i+1)C = i$$

$$\Rightarrow \quad (-2i-1)B = \tfrac{1}{2}(3+i), \quad (2i-1)C = \tfrac{1}{2}(3-i)$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{3+i}{2(-2i-1)} = \frac{(3+i)(2i-1)}{2(5)} = \frac{-5+5i}{10} = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2}$$

$$C = \frac{3-i}{2(2i-1)} = \frac{(3-i)(2i+1)}{2\cdot(-5)} = \frac{5+5i}{-10} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{i}{2}$$

$(B + C = -1)$

$$\Rightarrow \quad A = 1 - B - C = 2$$

$$x_n = 2 + (-\tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2})(-1+i)^n + (-\tfrac{1}{2} - \tfrac{i}{2})(-1-i)^n$$

$$= 2 + \tfrac{1}{2}(-1+i)^{n+1} + \tfrac{1}{2}(-1-i)^{n+1}$$

$$= 2 + \Re\left((-1+i)^{n+1}\right)$$

.ב

$$⑤_3 \Rightarrow x_n = A + B(-1+i)^n + C(-1-i)^n + \frac{n^2-13n}{10} - \tfrac{1}{2}(-1)^n$$

$$x_0 = 1 \overset{n=0}{\Longrightarrow} 1 = A + B + C - \tfrac{1}{2}$$

$$x_1 = 2 \overset{n=1}{\Longrightarrow} 2 = A + (-1+i)B + (-1-i)C - \tfrac{6}{5} + \tfrac{1}{2}$$

$$x_2 = 4 \overset{n=2}{\Longrightarrow} 4 = A + (-2i)B + (2i)C - \tfrac{11}{5} - \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad A + B + C = \tfrac{3}{2}, \quad A + (-1+i)B + (-1-i)C = \tfrac{27}{10}, \quad A - 2iB + 2iC = \tfrac{67}{10}$$

$$\Rightarrow \quad (-2+i)B + (-2-i)C = \tfrac{6}{5}, \quad (-1-2i)B + (-1+2i)C = \tfrac{26}{5}$$

$\times i$:

$$(-1-2i)B + (1-2i)C = \tfrac{6i}{5}$$

$$\Rightarrow \quad (-1-2i)B = \tfrac{13}{5} + \tfrac{3i}{5}, \quad (-1+2i)C = \tfrac{13}{5} - \tfrac{3i}{5}$$

המשך של (3ב)...

$$\Rightarrow \quad B = \frac{13/5 + 3i/5}{-1-2i} = \frac{(13/5 + 3i/5)(1-2i)}{(-1-2i)(1-2i)} = \frac{18/5 - 23i/5}{-5} = -\frac{18}{25} + \frac{23}{25}i$$

$$C = \frac{13/5 - 3i/5}{-1+2i} = -\frac{18}{25} - \frac{23}{25}i$$ ← צמוד

$$A = 3/2 - B - C = 3/2 + 36/25 = 147/50$$

$$\Rightarrow x_n = \frac{147}{50} + \frac{-18+23i}{25}(-1+i)^n + \frac{-18-23i}{25}(-1-i)^n + \frac{n^2-13n}{10} - \frac{1}{2}(-1)^n$$

ח. (5ה) $\Rightarrow x_n = A\cdot 3^n + B\cdot n$

$x_0 = 1 \overset{n=0}{\Rightarrow} 1 = A$

$x_1 = 1 \overset{n=1}{\Rightarrow} 1 = 3A + B \Rightarrow B = -2$

$$x_n = 3^n - 2n$$

---

(7) א.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \underline{A}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n + x_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} = \underline{P}\,\underline{D}\,\underline{P}^{-1}$$

$\underline{P}$ – מכילה של וקטורים עצמיים; $\underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

λ_1, λ_2 ערכים עצמיים, $|\lambda_1| > |\lambda_2|$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}_{\{v_1,v_2\}} = \underline{D}^n \overbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}_{\{v_1,v_2\}}}^{\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}}, \quad \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \underline{P}\,\underline{D}^n\,\underbrace{\underline{P}^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}}_{\text{וקטור קבוע}}$$

$$= \begin{pmatrix} A\lambda_1^n \\ B\lambda_2^n \end{pmatrix} \xrightarrow{A\neq 0} \text{כיוון של } \underline{v}_1 \qquad \underline{D}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

לפי בסיס של וקטורים עצמיים, הקואורדינטות של $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ עוברים $n \to n+1$ תחת $\underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. הכיוון של $\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ נתון לפי וקטור עצמי מתאים לערך עצמי λ_1 רק ש- $|\lambda_1| > |\lambda_2|$

כאן $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \Leftarrow \max|\lambda| = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

$$(\underline{A} - \lambda\underline{I})\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix}\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} \lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

המשך של ⑦ ...

ב:
$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ 5x_{n+1} - 6x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2, 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 3: \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \lambda = 2: \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + B \cdot 3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = 2, x_1 = 5 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = B = 1$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \underbrace{3^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{איבר המוביל}}$$

$$\Rightarrow x_{n+1}/x_n \xrightarrow{n \to \infty} 3$$

ג:
$$x_{n+2} = 6x_n - x_{n+1}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ 6x_n - x_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 6 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2, \underbrace{-3}_{\lambda_1}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + B \cdot (-3)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = 2, x_1 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = B = 1$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-3)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_{n+1}/x_n \xrightarrow{n \to \infty} -3$$

ג.

$$x_{n+2} = 6x_n - x_{n+1}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + B(-3)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$x_0 = 1,\ x_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = 1,\ B = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_{n+1}/x_n \longrightarrow 2}}$$

ה.

$$x_{n+3} = 3x_{n+2} - 4x_n$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ 3x_{n+2} - 4x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} = \underline{A}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ערכים עצמ"ם: $\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0$

$$(3-\lambda)\lambda^2 - 4 = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -4 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$\lambda = -1,\ 2$ כפול

$\lambda = -1$: וקטור עצמ' $\underline{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = 2$: block Jordan, וקטור עצמ' $\underline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \underline{A} = \underline{P}\,\underline{D}\,\underline{P}^{-1}, \quad \underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} - 2\underline{I} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\underline{A} - 2\underline{I})\,\underline{w_1} = \underline{v_1} \Rightarrow \underline{w_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

לפי הבסיס $\{\underline{v_2}, \underline{v_3}, \underline{v_1}\}$, תנאי ההתחלה הוא

$$\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix}x_n\\x_{n+1}\\x_{n+2}\end{pmatrix} = \underline{A}^n\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = \underline{P}\,\underline{D}^n\underline{P}^{-1}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \underline{P}\begin{pmatrix}2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & -1\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \underline{P}\begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1} & \\ & 2^n & \\ & & (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

מקבלים $x_n = -2^n + n2^{n-1} - (-1)^n$ ו- $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to 2$

(איבר המוביל: $n2^{n-1}$)

דרך אחרת (בלי מטריצות)

א. מצאו פתרון כללי $\xleftarrow{\text{תנאי התחלה}}$ לפתרון נוסחה $\rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} x_{n+1}/x_n$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right] \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \to \frac{1+\sqrt5}{2}$$

(איבר המוביל: $\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1}$)

ב. משוואה אופיינית $\lambda^2 = 5\lambda - 6 \Rightarrow \lambda = 2,3$

$$x_n = A\cdot 2^n + B\cdot 3^n \xleftarrow{x_0=2,\ x_1=5} \begin{cases}2 = A+B\\ 5 = 2A+3B\end{cases} \Rightarrow A=B=1 \Rightarrow x_n = 2^n + 3^n \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 3$$

(איבר המוביל: 3^n)

ג. משוואה אופיינית $\lambda^2 = 6-\lambda \Rightarrow \lambda = 2,-3$

$$x_n = A2^n + B(-3)^n \xleftarrow{x_0=2,\ x_1=-1} \begin{cases}2 = A+B\\ -1 = 2A-3B\end{cases} \Rightarrow A=B=1 \Rightarrow x_n = 2^n + (-3)^n \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} -3$$

(איבר המוביל: $(-3)^n$)

ד. $$x_n = A\cdot 2^n + B(-3)^n \xleftarrow{x_0=1,\ x_1=2} \begin{cases}1 = A+B\\ 2 = 2A-3B\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=1\\ B=0\end{cases} \Rightarrow x_n = 2^n \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 2$$

ה. משוואה אופיינית $\lambda^3 = 3\lambda^2 - 4 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1, 2$ (כפול)

$$x_n = A(-1)^n + (Bn+C)2^n \xleftarrow{x_0=0,\ x_1=2,\ x_2=-1} \begin{cases}0 = A+C\\ 2 = -A+2(B+C)\\ -1 = A+4(2B+C)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-1\\ B=-\tfrac12\\ C=1\end{cases} \Rightarrow x_n = (-1)^n + \left(1-\frac{n}{2}\right)2^n \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n} \xrightarrow{n\to\infty} 2$$

(איבר המוביל: $\left(1-\frac{n}{2}\right)2^n$)