פרק 7: התמרת Laplace

הגדרה

$$\mathcal{L}(f) \equiv \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

$$\mathcal{L} : \{ \text{פונקציות של } t \} \to \{ \text{פונקציות של } s \}$$

f כך שקיים M,
$0 \leftarrow e^{-Mt} f(t)$
כאשר $t \to \infty$

תכונות

(א) $\mathcal{L}$ העתקה לינארית

$$\mathcal{L}(f+g) = (\mathcal{L}f) + (\mathcal{L}g)$$
$$\mathcal{L}(cf) = c(\mathcal{L}f)$$
c מספר קבוע

(ב) $\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}f - f(0)$

הוכחה:
$$\mathcal{L}(f') = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt$$
אינטגרציה לפי חלקים
$$= \left[e^{-st} f(t) - \int (-se^{-st}) f(t)\,dt \right]_0^\infty$$
$$= -f(0) + s \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}_{\mathcal{L}f}$$

(ג) $\mathcal{L}(e^{at} f) = (\mathcal{L}f)(s-a)$

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt$$

(ד) $\mathcal{L}(tf) = -(\mathcal{L}f)'$

הוכחה
$$\mathcal{L}(tf) = \int_0^\infty e^{-st}\, t f(t)\,dt$$
$$= \int_0^\infty -\tfrac{d}{ds}\left(e^{-st} f(t)\right) dt$$
$$= -\tfrac{d}{ds}\left(\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right) = -(\mathcal{L}f)'$$

דוגמאות

① $\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$

② $\mathcal{L}(e^{at}) \underset{ג}{=} \mathcal{L}(1)\big|_{s-a} = \frac{1}{s-a}$

③ $\mathcal{L}(t) \underset{ד}{=} -\mathcal{L}(1)' = 1/s^2$

④ $\mathcal{L}(t^2) \underset{ד}{=} -\mathcal{L}(t)' = 2/s^3$

⑤ $\mathcal{L}(t^n) = n!/s^{n+1}$

⑥ $\mathcal{L}(t^n e^{at}) \underset{ג}{=} \mathcal{L}(t^n)\big|_{s-a} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$

$$\mathcal{L}(e^{ikt}) \underset{②}{=} \frac{1}{s-ik} = \frac{s+ik}{(s-ik)(s+ik)} = \frac{s+ik}{s^2+k^2}$$

חלק ממשי

חלק מדומה

$$\mathcal{L}(\cos kt) = \frac{s}{s^2+k^2}$$
$$\mathcal{L}(\sin kt) = \frac{k}{s^2+k^2}$$

⑦
$$\mathcal{L}(e^{at}\cos kt) = \frac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$$
$$\mathcal{L}(e^{at}\sin kt) = \frac{k}{(s-a)^2+k^2}$$

דוגמא
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4s+5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2+1}\right) = e^{-2t}\sin t$$

$\mathcal{L}^{-1}$ היא ההעתקה הפוך של $\mathcal{L}$

איך לפתור משוואות דיפרנציאליות דרך התמרת Laplace?

דוגמא ① $y' - 3y = e^{2t}$ כאשר $y(0) = 1$

התמרת laplace

$$\mathcal{L}y' = s\mathcal{L}y - y(0) = s\mathcal{L}y - 1$$

$$(s\mathcal{L}y - 1) - 3\mathcal{L}y = \frac{1}{s-2}$$
$$\Downarrow$$
$$(s-3)\mathcal{L}y = 1 + \frac{1}{s-2} = \frac{s-1}{s-2}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{L}y = \frac{s-1}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3}$$

כאשר $s-1 = A(s-3) + B(s-2)$

או

$s=2 \Rightarrow 1 = -A$

$s=3 \Rightarrow 2 = B$

או

$1 = A + B$ (מקדם של s)

$-1 = -3A - 2B$ (מקדם של 1)

$\Rightarrow A = -1,\ B = 2$

$$y = -e^{2t} + 2e^{3t} \Leftarrow A=-1,\ B=2$$

תרגיל ② $y''-6y'+9y=t^2e^{3t}$, $y(0)=2,\ y'(0)=6$

$$\mathcal{L}\begin{cases}\mathcal{L}(y')=s\mathcal{L}y-y(0)=s\mathcal{L}y-2\\ \mathcal{L}(y'')=s\mathcal{L}(y')-y'(0)=s^2\mathcal{L}y-2s-6\end{cases}$$

$$(s^2\mathcal{L}y-2s-6)-6(s\mathcal{L}y-2)+9\mathcal{L}y=\frac{2}{(s-3)^3}$$

$$\Downarrow$$

$$(s^2-6s+9)\mathcal{L}y-2s+6=\frac{2}{(s-3)^3}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}y=\frac{1}{(s-3)^2}\left(2s-6+\frac{2}{(s-3)^3}\right)=\frac{2}{s-3}+\frac{2}{(s-3)^5}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{y=2e^{3t}+\tfrac{1}{12}t^4e^{3t}}$$

תרגיל ③ $x''+16x=\cos 3t$, $x(0)=0,\ x'(0)=1$

$$\mathcal{L}\begin{cases}\mathcal{L}(x')=s\mathcal{L}x-x(0)=s(\mathcal{L}x)\\ \mathcal{L}(x'')=s\mathcal{L}(x')-x'(0)=s^2(\mathcal{L}x)-1\end{cases}$$

$$(s^2\mathcal{L}x-1)+16(\mathcal{L}x)=\frac{s}{s^2+9}$$

$$(s^2+16)\mathcal{L}x=1+\frac{s}{s^2+9}=\frac{s^2+s+9}{s^2+9}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L}x=\frac{s^2+s+9}{(s^2+9)(s^2+16)}=\frac{As+B}{s^2+9}+\frac{Cs+D}{s^2+16}$$

כאשר $s^2+s+9=(As+B)(s^2+16)+(Cs+D)(s^2+9)$

$$\Leftarrow\begin{cases}0=A+C & (s^3)\\ 1=B+D & (s^2)\\ 1=16A+9C & (s)\\ 9=16B+9D & (1)\end{cases}$$

$\Leftarrow A=\tfrac{1}{7},\ C=-\tfrac{1}{7},\ B=0,\ D=1$

לכן $\mathcal{L}x=\dfrac{s/7}{s^2+9}+\dfrac{-s/7+1}{s^2+16}$

$$\Leftarrow \boxed{x=\tfrac{1}{7}\cos 3t-\tfrac{1}{7}\cos 4t+\tfrac{1}{4}\sin 4t}$$

דרך שלמדנו קודם לפתור ②:

(*) $y''-6y'+9y=t^2e^{3t}$

משוואה הומוגנית $y''-6y'+9y=0$

משוואה אופיינית $\lambda^2-6\lambda+9=0 \Rightarrow \lambda=3$ כפול

פתרון כללי של משוואה הומוגנית: $y=De^{3t}+Ete^{3t}$

פתרון פרטי

$y=(At^2+Bt+C)t^2e^{3t}$

$\lambda=3$ כפילות $=2$

$\Rightarrow y=(At^4+Bt^3+Ct^2)e^{3t}$

$\Rightarrow y'=(At^4+Bt^3+Ct^2)\cdot 3e^{3t}+(4At^3+3Bt^2+2Ct)e^{3t}$

$\Rightarrow y''=(At^4+Bt^3+Ct^2)\cdot 9e^{3t}+6(4At^3+3Bt^2+2Ct)e^{3t}+(12At^2+6Bt+2C)e^{3t}$

$y''-6y'+9y=(12At^2+6Bt+2C)e^{3t}$

פתרון פרטי $\Leftarrow$ $12A=1,\ 6B=0,\ 2C=0$

$\Downarrow$

$A=\tfrac{1}{12},\ B=C=0$

$y=\tfrac{1}{12}t^4e^{3t}$

פתרון כללי של (*) הוא

(#) $y=De^{3t}+Ete^{3t}+\tfrac{1}{12}t^4e^{3t}$

$\Rightarrow y'=3De^{3t}+E(3te^{3t}+e^{3t})+(\tfrac{1}{12}t^4\cdot 3e^{3t}+\tfrac{1}{3}t^3e^{3t})$

$y(0)=2 \Rightarrow 2=D$

$y'(0)=6 \Rightarrow 6=3D+E \Rightarrow 0=E$

לכן $\boxed{y=2e^{3t}+\tfrac{1}{12}t^4e^{3t}}$

ב) $y''-6y'+9y=t^2e^{3t}$, $y(0)=2,\ y(1)=0$

תנאי שפה

(#) הוא פתרון כללי

$y(0)=2 \Rightarrow D=2$

$y(1)=0 \Rightarrow De^3+Ee^3+\tfrac{1}{12}e^3=0$

$\Rightarrow E=-\tfrac{25}{12}$

$$\boxed{y=2e^{3t}-\tfrac{25}{12}te^{3t}+\tfrac{1}{12}t^4e^{3t}}$$

אי אפשר לפתור בעית ערכי שפה

ע״י דרך התמרת Laplace

התמרת Laplace ופונקציות H, δ

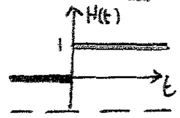
f	$\mathcal{L}f$
1	$1/s$
e^{at}	$1/(s-a)$
t^n	$n!/s^{n+1}$
$\cos kt$	$s/(s^2+k^2)$
$\sin kt$	$k/(s^2+k^2)$
$e^{at}\cos kt$	$(s-a)/((s-a)^2+k^2)$
$e^{at}\sin kt$	$k/((s-a)^2+k^2)$
$t^n e^{at}$	$n!/(s-a)^{n+1}$
$tf(t)$	$-(\mathcal{L}f)'$
$f'(t)$	$s(\mathcal{L}f)-f(0)$
$e^{at}f(t)$	$(\mathcal{L}f)\vert_{s-a}$
$f(t-a)H(t-a)$	$e^{-as}(\mathcal{L}f)$
$H(t-a)$	e^{-as}/s
$\delta(t-a)$	e^{-as}

$\mathcal{L}^{-1}F$	F
$-t(\mathcal{L}^{-1}F)$	$F'(s)$
$(\mathcal{L}^{-1}F)'$	$s\cdot F(s)-(\mathcal{L}^{-1}F)(0)$
$e^{at}(\mathcal{L}^{-1}F)$	$F\vert_{s-a}$
$H(t-a)(\mathcal{L}^{-1}F)\vert_{t-a}$	$e^{-as}F(s)$

$\boxed{\delta \text{"="} H'}$

הגדרה פונקציה H מוגדרת ע"י

$$H(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$$
Heaviside

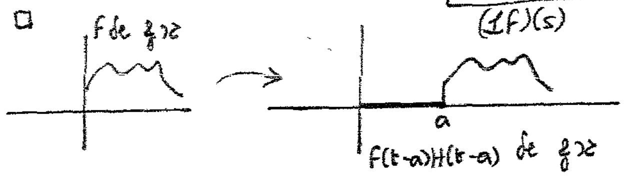


טענה $\mathcal{L}(f(t-a)H(t-a))=e^{-as}\mathcal{L}f$

הוכחה

$$\mathcal{L}(f(t-a)H(t-a))$$
$$=\int_0^\infty f(t-a)H(t-a)e^{-st}\,dt$$
$$=\int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt \underset{t=a+u}{=} \int_0^\infty f(u)e^{-s(a+u)}\,du$$
$$=e^{-as}\underbrace{\int_0^\infty f(u)e^{-su}\,du}_{(\mathcal{L}f)(s)}$$

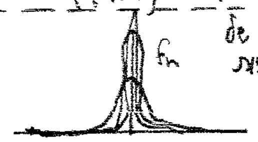
□



הגדרה "פונקציית" δ היא $\delta(x)$ כך ש-

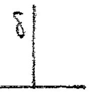
$$(a<0<b)\quad \int_a^b \delta(x)f(x)\,dx=f(0)$$

לכל פונקציה f (δ לא פונקציה!)



סדרת של פונקציות $\{f_n\}$: $f_n=0$ מחוץ לסביבה $[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$, $\int f_n\,dx=1$

לכן $f_n \text{"}\to\text{"} \delta$



משמעות: $\mathcal{L}(f_n\cdot g)\xrightarrow{\text{במ"ש}}\mathcal{L}(\delta\cdot g)$

לפונקציות טובות g

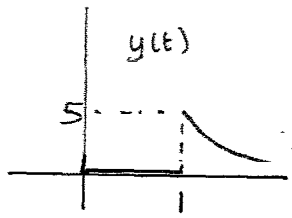
דוגמאות

א) $y'+y=5H(t-1)$, $y(0)=0$

$$=\begin{cases}0 & t<1\\ 5 & t\geq 1\end{cases}$$

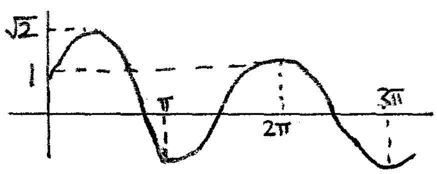
$\mathcal{L}(y')=s\mathcal{L}y$

$$s\mathcal{L}y+\mathcal{L}y=5e^{-s}/s$$
$$\mathcal{L}y=\frac{5e^{-s}}{s(s+1)}$$
$$=5\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)e^{-s}$$
$$y=5H(t-1)\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right)\Big|_{t-1}$$
$$=5H(t-1)(1-e^{-t})\Big|_{t-1}$$
$$\underline{\underline{=5H(t-1)(1-e^{1-t})}}$$
$$=\begin{cases}0 & t<1\\ 5(1-e^{1-t}) & t>1\end{cases}$$



ב) $y''+y=\delta(t-\pi)$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$

$$\mathcal{L}\quad \mathcal{L}(y'')=s^2(\mathcal{L}y)-1-s$$
$$s^2(\mathcal{L}y)-1-s+(\mathcal{L}y)=e^{-\pi s}$$
$$\Leftarrow\quad \mathcal{L}y=\frac{s+1}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}$$
$$\Leftarrow\quad y=\sin t+\cos t+H(t-\pi)(\sin t)\Big|_{t-\pi}$$
$$=\sin t+\cos t-H(t-\pi)(\sin t)$$
$$=\begin{cases}\sin t+\cos t & t<\pi\\ \cos t & t>\pi\end{cases}$$



דוגמאות (3) נניח שפונקציה f מוגדרת ע"י

$$f(t)=\begin{cases}\sin 2t+3 & t<\pi\\ e^{3t} & t>\pi\end{cases}$$

לכן

$$f(t)=(\sin 2t+3)+H(t-\pi)\left(e^{3t}-\sin 2t-3\right)$$

$$\Leftarrow\quad \mathcal{L}f=\frac{2}{s^2+4}+\frac{3}{s}+e^{-\pi s}\mathcal{L}g$$

כאשר $g(t-\pi)=e^{3t}-\sin 2t-3$

לכן $g(t)=e^{3(t+\pi)}-\sin 2t-3$

$$\Leftarrow\quad \mathcal{L}g=\frac{e^{3\pi}}{s-3}-\frac{2}{s^2+4}-\frac{3}{s}$$

$$=\underline{\underline{\left(\frac{2}{s^2+4}+\frac{3}{s}\right)\left(1-e^{-\pi s}\right)+\frac{e^{(3-s)\pi}}{s-3}}}$$

(2)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+e^{-\pi s}}{s^2-1}\right)$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-1}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2-1}e^{-\pi s}\right)$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1/2}{s+1}+\frac{1/2}{s-1}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{1/2}{s-1}-\frac{1/2}{s+1}\right)e^{-\pi s}\right)$$

$$=\left(\tfrac12 e^{-t}+\tfrac12 e^{t}\right)+H(t-\pi)\left(\tfrac12 e^{t}-\tfrac12 e^{-t}\right)\Big|_{t-\pi}$$

$$=\begin{cases}\tfrac12 e^{-t}+\tfrac12 e^{t} & t<\pi\\ \tfrac12 e^{-t}+\tfrac12 e^{t}+\tfrac12 e^{t-\pi}-\tfrac12 e^{\pi-t} & t\geq\pi\end{cases}$$

$$=\underline{\underline{\begin{cases}\tfrac12 e^{-t}+\tfrac12 e^{t} & t<\pi\\ \tfrac12(1-e^{\pi})e^{-t}+\tfrac12(1+e^{-\pi})e^{t} & t>\pi\end{cases}}}$$

"Convolution"

הגדרה f,g פונקציות על $(0,\infty)$ $\Leftarrow$ פונקציה $f*g$ מוגדרת ע"י

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)\,du$$

טענה $(\mathcal{L}f)\cdot(\mathcal{L}g)=\mathcal{L}(f*g)$

הוכחה

$$\mathcal{L}(f*g)=\int_0^\infty e^{-st}(f*g)(t)\,dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(u)g(t-u)\,du\right)dt$$

$$=\int_0^\infty\int_u^\infty e^{-st}f(u)g(t-u)\,dt\,du$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}f(u)g(v)\,dv\,du\qquad (t=u+v)$$

$$=\left(\int_0^\infty e^{-su}f(u)\,du\right)\left(\int_0^\infty e^{-sv}g(v)\,dv\right)$$

$$=(\mathcal{L}f)\cdot(\mathcal{L}g)$$

□

דוגמא $t*t=\int_0^t u(t-u)\,du=\left[\frac{tu^2}{2}-\frac{u^3}{3}\right]_0^t=\frac{t^3}{6}$

$\mathcal{L}(t*t)=(\mathcal{L}t)\cdot(\mathcal{L}t)$

$\frac{1}{6}\left(\frac{6}{s^4}\right)=\left(\frac{1}{s^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{s^2}\right)$ ✓

תזכורת:

$$\circledast \quad y'' + 5y' + 6y = f(t)$$

דרך א':

$y(0) = c, \quad y'(0) = d$

$$\Leftarrow \quad \begin{cases} \mathcal{L}(y') = s\mathcal{L}y - c \\ \mathcal{L}(y'') = s^2\mathcal{L}y - cs - d \end{cases}$$

$$(s^2\mathcal{L}y - cs - d) + 5(s\mathcal{L}y - c) + 6\mathcal{L}y = \mathcal{L}f \quad \Leftarrow \circledast$$

$$(s^2+5s+6)\mathcal{L}y = cs + d + 5c + \mathcal{L}f \quad \Leftarrow$$

$$\mathcal{L}y = \underbrace{\frac{cs+d+5c}{s^2+5s+6}}_{\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}} + \underbrace{\frac{\mathcal{L}f}{s^2+5s+6}}_{\left(\frac{1}{s+2}-\frac{1}{s+3}\right)\mathcal{L}f} \quad \Leftarrow$$

$$y = Ae^{-2t} + Be^{-3t} + (e^{-2t} - e^{-3t}) * f \quad \Leftarrow$$

$$= Ae^{-2t} + Be^{-3t} + \int_0^t \left(e^{-2(t-u)} - e^{-3(t-u)}\right) f(u)\,du$$

דרך ב':

משוואה הומוגנית: $y'' + 5y' + 6y = 0$

משוואה אופיינית: $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$

$(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$

$\lambda = -2, -3$

פתרון כללי של משוואה הומוגנית $y = Ae^{-2t} + Be^{-3t}$

פתרון פרטי: $y = e^{-2t}v_1(t) + e^{-3t}v_2(t)$

$$y' = \underbrace{e^{-2t}v_1' + e^{-3t}v_2'}_{\text{נניח } =0} - 2e^{-2t}v_1 - 3e^{-3t}v_2$$

$$y'' = -2e^{-2t}v_1' - 3e^{-3t}v_2' + 4e^{-2t}v_1 + 9e^{-3t}v_2$$

$$y'' + 5y' + 6y = -2e^{-2t}v_1' - 3e^{-3t}v_2'$$

מקבלים פתרון של $\circledast$ כאשר:

$$\left.\begin{aligned} e^{-2t}v_1' + e^{-3t}v_2' &= 0 \\ -2e^{-2t}v_1' - 3e^{-3t}v_2' &= f(t) \end{aligned}\right\}$$

$$\Leftarrow \quad \begin{cases} v_1' = e^{2t} f(t) \\ v_2' = -e^{3t} f(t) \end{cases}$$

$$\Leftarrow \quad \begin{cases} v_1 = \int_0^t e^{2u} f(u)\,du + \text{קבוע} \\ v_2 = -\int_0^t e^{3u} f(u)\,du + \text{קבוע} \end{cases}$$

לכן פתרון כללי של $\circledast$ הוא:

$$y = \overbrace{Ae^{-2t} + Be^{-3t}}^{\text{פתרון כללי של משוואה הומוגנית}} + e^{-2t}\underbrace{\int_0^t e^{2u} f(u)\,du}_{v_1} - e^{-3t}\underbrace{\int_0^t e^{3u} f(u)\,du}_{-v_2}$$

$$= Ae^{-2t} + Be^{-3t} + \int_0^t \left(e^{-2(t-u)} - e^{-3(t-u)}\right) f(u)\,du$$