פרק 6: טורי פורייה

תזכורת: גאומטריה במרחב: מכפלה פנימית

מרחב: V = מרחב וקטורי (על $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$)
וקטורים $\underline{a}$ עם פעולות $+, \cdot$ ... $\underline{a}+\underline{b},\ \lambda\underline{a}$

מכפלה פנימית inner product: העתקה $\langle\ ,\ \rangle$:

$$\begin{cases} V\times V \to \mathbb{C} \text{ (או } \mathbb{R}\text{)} \\ \underline{a},\underline{b} \mapsto \langle \underline{a},\underline{b}\rangle \end{cases}$$

כך ש-

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{סימטריה} & \langle \underline{b},\underline{a}\rangle = \overline{\langle \underline{a},\underline{b}\rangle} \\ \text{לינאריות} & \langle \underline{a}+\underline{b},\underline{c}\rangle = \langle \underline{a},\underline{c}\rangle + \langle \underline{b},\underline{c}\rangle \\ & \langle \lambda\underline{a},\underline{b}\rangle = \lambda\langle \underline{a},\underline{b}\rangle \\ \text{חיוביות} & \langle \underline{a},\underline{a}\rangle \geq 0,\ \langle \underline{a},\underline{a}\rangle \in \mathbb{R} \\ & \langle \underline{a},\underline{a}\rangle = 0 \Rightarrow \underline{a} = \underline{0} \end{array}}$$

נורמה $\|\underline{a}\| \equiv \sqrt{(\langle \underline{a},\underline{a}\rangle)} \in \mathbb{R}^+$

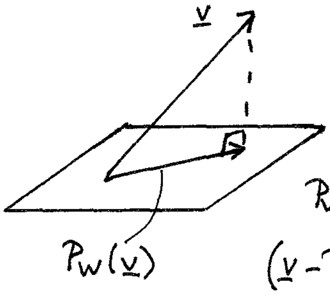
$\underline{a} \perp \underline{b}$ ($\underline{a},\underline{b}$ נצבים) אם"ם $\langle \underline{a},\underline{b}\rangle = 0$

מרחק $d(\underline{a},\underline{b}) = \|\underline{a}-\underline{b}\|$

קו ישר תת מרחב חד-מימדי $\{\lambda\underline{a} \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$
או הזזה שלו $\{\lambda\underline{a}+\underline{b} \mid \lambda\in\mathbb{R}\}$

מישור דו-מימדי $\{\lambda\underline{a}+\mu\underline{b}+\underline{c} \mid \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$

זווית בין $\underline{a},\underline{b}$: $\cos\theta = \dfrac{\langle \underline{a},\underline{b}\rangle}{\|\underline{a}\|\cdot\|\underline{b}\|}$
(למרחב על $\mathbb{R}$)



אם $W \subset V$ תת-מרחב סוף מימדי
אפשר להגדיר **הטלה** (אורתוגונלית) projection $P_W: V \to W$
כך ש- $(\underline{v}-P_W(\underline{v})) \perp W$

אם $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ בסיס ל- W
נגדיר מטריצה

$$G = \begin{pmatrix} \langle \underline{w}_1,\underline{w}_1\rangle & \cdots & \langle \underline{w}_n,\underline{w}_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \underline{w}_1,\underline{w}_n\rangle & \cdots & \langle \underline{w}_n,\underline{w}_n\rangle \end{pmatrix}$$

מטריצת Gramm

הקואורדינטות של $P_W(\underline{v})$ ביחס לבסיס $\{\underline{w}_i\}_{i=1}^n$ ב- W הן:

$$G^{-1} * \begin{pmatrix} \langle \underline{v},\underline{w}_1\rangle \\ \vdots \\ \langle \underline{v},\underline{w}_n\rangle \end{pmatrix}$$

כפל מטריצות

דוגמאות

א. $V=\mathbb{R}^n$, $\langle \underline{a},\underline{b}\rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$

ב. $V=\mathbb{C}^n$, $\langle \underline{a},\underline{b}\rangle = \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i$

הערה אם V על $\mathbb{R}$, אז גם המכפלה פנימית היא העתקה $\underline{a},\underline{b} \mapsto \langle \underline{a},\underline{b}\rangle \in \mathbb{R}$

הערה לפעמים מגדירים את מרחב מכפלה פנימית (על $\mathbb{C}$) כך ש- $\langle \underline{a},\lambda\underline{b}\rangle = \lambda\langle \underline{a},\underline{b}\rangle$
במקום $\langle \underline{a},\lambda\underline{b}\rangle = \bar{\lambda}\langle \underline{a},\underline{b}\rangle$ כמו כאן.

$$\langle \underline{a},\lambda\underline{b}\rangle = \overline{\langle \lambda\underline{b},\underline{a}\rangle} = \overline{\lambda\langle \underline{b},\underline{a}\rangle} = \bar{\lambda}\langle \underline{a},\underline{b}\rangle$$

ג. $V = C^0([0,1])$, $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$
מרחב של פונקציות רציפות על $[0,1]$

$$\|e^x\|^2 = \int_0^1 e^x \cdot e^x\,dx = \left[\tfrac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2-1}{2}$$

$$\langle 1,x\rangle = \int_0^1 1\cdot x\,dx = \tfrac{1}{2}$$

$$\angle(1,x) = \cos^{-1}\left(\frac{\langle 1,x\rangle}{\|1\|\cdot\|x\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1/2}{1\cdot 1/\sqrt{3}}\right) = \pi/6$$

$$\left.\begin{array}{l} \|1\|^2 = \int_0^1 1\,dx = 1 \\ \|x\|^2 = \int_0^1 x^2\,dx = 1/3 \end{array}\right\}$$

$$\langle 1,x-\tfrac{1}{2}\rangle = \langle 1,x\rangle - \tfrac{1}{2}\langle 1,1\rangle = 0 \Rightarrow 1 \perp (x-\tfrac{1}{2})$$

בסיס אורתוגונלי orthogonal basis הוא בסיס כך שכל זוג איברים נצבים. **בסיס אורתונורמלי** orthonormal basis הוא בסיס אורתוגונלי כך שכל איבר הוא וקטור יחידה (נורמה 1)

$\{\underline{w}_i\}_{i=1}^n$ אורתונורמלי $\iff \langle \underline{w}_i,\underline{w}_j\rangle = \delta_{ij}$

לבסיס אורתוגונלי מטריצת Gramm אלכסונית

לבסיס אורתונורמלי מטריצת Gramm היא I_n

הסבר

$$P_W(\underline{v}) = a_1\underline{w}_1 + \cdots + a_n\underline{w}_n$$

$$\iff \langle \underline{v}-(a_1\underline{w}_1+\cdots+a_n\underline{w}_n), \underline{w}_i\rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\iff \langle \underline{v},\underline{w}_i\rangle = a_1\langle \underline{w}_1,\underline{w}_i\rangle + \cdots + a_n\langle \underline{w}_n,\underline{w}_i\rangle$$

$$\iff \begin{pmatrix} \langle \underline{v},\underline{w}_1\rangle \\ \vdots \\ \langle \underline{v},\underline{w}_n\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \underline{w}_1,\underline{w}_1\rangle & \cdots & \langle \underline{w}_n,\underline{w}_1\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \underline{w}_1,\underline{w}_n\rangle & \cdots & \langle \underline{w}_n,\underline{w}_n\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = G\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

דוגמאות של הטלות

ב- $C^0([0,1])$ $\quad a(x)=e^x$

א. $W=\langle\{1\}\rangle$ (מרחב של פונקציות קבועות)

$$G=(1)\Rightarrow P_W(a)=\langle e^x,1\rangle\cdot 1=(e-1)$$

ב. $W=\langle\{1,x\}\rangle$ (מרחב של פונקציות ליניאריות $a+bx$)

$$G=\begin{pmatrix}\langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle\\ \langle 1,x\rangle & \langle x,x\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\int_0^1 1\cdot 1\,dx & \int_0^1 x\,dx\\ \int_0^1 x\,dx & \int_0^1 x^2\,dx\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac12\\ \frac12 & \frac13\end{pmatrix}$$

$$\langle e^x,1\rangle=\int_0^1 e^x\,dx=(e-1)$$

$$\langle e^x,x\rangle=\int_0^1 xe^x\,dx=[(x-1)e^x]_0^1=1$$

$$P_W(a)=\left[\begin{pmatrix}1 & \frac12\\ \frac12 & \frac13\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}e-1\\ 1\end{pmatrix}\right]_{\{1,x\}}=\left[\begin{pmatrix}4 & -6\\ -6 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e-1\\ 1\end{pmatrix}\right]_{\{1,x\}}$$

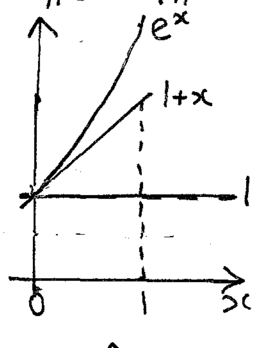
$$=\underline{\underline{(4e-10)+(-6e+18)x}}$$

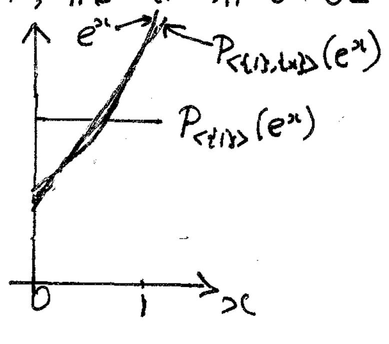
$\|e^x-(e-1)\|\sim 0.492 \leftarrow$ קירוב ע"י הטלה על $\langle\{1\}\rangle$

$\|e^x-((4e-10)+(18-6e)x)\|\sim 0.0628 \leftarrow$ קירוב ע"י הטלה על $\langle\{1,x\}\rangle$

הערה הפולינומים Taylor סביב 0 ל-a הרבה יותר רחוק מ-a מההטלות:

$\|e^x-1\|\sim 1.481$, $\|e^x-(1+x)\|\sim 0.302$





פולינום Taylor נותן קירוב הטוב ביותר בסביבה של נקודה אחת $(x=0)$

הטלה ← קירובים הטובים ביותר על כל הקטע $[0,1]$ ביחס למרחק ($\|f-g\|^2=\int_0^1(f(x)-g(x))^2dx$)

ב- $\mathbb{R}^3$ $\quad \underline{a}=\begin{pmatrix}8\\8\\10\end{pmatrix}$

א. $W=\langle\{\underline{f}_1\}\rangle$ $\quad \underline{f}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

$$G=(10)\Rightarrow P_{\langle\{f_1\}\rangle}(\underline{a})=\frac{1}{10}\langle \underline{a},\underline{f}_1\rangle\,\underline{f}_1$$

$$=3.8\,\underline{f}_1=\underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\3.8\\11.4\end{pmatrix}}}$$

ב. $W=\langle\{\underline{f}_1,\underline{f}_2\}\rangle$ $\quad \underbrace{\underline{f}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\ \underline{f}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}}$

$$G=\begin{pmatrix}10 & 6\\ 6 & 8\end{pmatrix}$$

$$G^{-1}\begin{pmatrix}\langle \underline{a},\underline{f}_1\rangle\\ \langle \underline{a},\underline{f}_2\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 6\\ 6 & 8\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}38\\36\end{pmatrix}=\frac{1}{44}\begin{pmatrix}8 & -6\\ -6 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}38\\36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

$$P_{\langle\{f_1,f_2\}\rangle}(\underline{a})=2\underline{f}_1+3\underline{f}_2=\underline{\underline{\begin{pmatrix}6\\2\\12\end{pmatrix}}}$$

$P_W(\underline{a})$ נותן את הקירוב הכי טוב ל-$\underline{a}$ מבתוך המרחב W.

$$\|\underline{a}-P_{\langle\{f_1\}\rangle}(\underline{a})\|=\left\|\begin{pmatrix}8\\8\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\3.8\\11.4\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}8\\4.2\\-1.4\end{pmatrix}\right\|\sim 9.14$$

$$\|\underline{a}-P_{\langle\{f_1,f_2\}\rangle}(\underline{a})\|=\left\|\begin{pmatrix}8\\8\\10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6\\2\\12\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}2\\6\\-2\end{pmatrix}\right\|\sim 6.63$$

קירוב יותר טוב

במקרה שבסיס $\{\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_n\}$ של W הוא אורתוגונלי:

$$G=\begin{pmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \langle e_n,e_n\rangle\end{pmatrix}$$

$$G^{-1}\begin{pmatrix}\langle a,e_1\rangle\\ \vdots\\ \langle a,e_n\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\langle e_1,e_1\rangle} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\langle e_n,e_n\rangle}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\langle a,e_1\rangle\\ \vdots\\ \langle a,e_n\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\langle a,e_1\rangle}{\langle e_1,e_1\rangle}\\ \vdots\\ \frac{\langle a,e_n\rangle}{\langle e_n,e_n\rangle}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_W(\underline{a})=\overbrace{\frac{\langle \underline{a},\underline{e}_1\rangle}{\langle \underline{e}_1,\underline{e}_1\rangle}}^{a_1}\underline{e}_1+\dots+\overbrace{\frac{\langle \underline{a},\underline{e}_n\rangle}{\langle \underline{e}_n,\underline{e}_n\rangle}}^{a_n}\underline{e}_n$$

$$\|\underline{a}-P_W(\underline{a})\|^2=\langle \underline{a}-P_W(\underline{a}),\underline{a}-P_W(\underline{a})\rangle$$

$$=\langle \underline{a},\underline{a}\rangle-2\underbrace{\langle \underline{a},P_W(\underline{a})\rangle+\langle P_W(\underline{a}),P_W(\underline{a})\rangle}_{\text{שווים}}$$

$$=\|\underline{a}\|^2-\|P_W(\underline{a})\|^2$$

$$\underline{\underline{\|\underline{a}\|^2\geq\|P_W(\underline{a})\|^2=\sum_{i=1}^n\frac{\langle \underline{a},\underline{e}_i\rangle^2}{\langle \underline{e}_i,\underline{e}_i\rangle}=\sum_{i=1}^n a_i^2\|\underline{e}_i\|^2}}$$

$\|\underline{\varepsilon}\|^2=$ הפרש

$\underline{\varepsilon}=$ אנכית

א"י שיוויון Bessel

<u>הערה</u> נניח ש- $\{\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_{m+1}\}$ וקטורים אורתוגונלים.

$$P_{\langle\{\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m\}\rangle}(\underline{a}) = \frac{\langle \underline{a},\underline{e}_1\rangle}{\langle \underline{e}_1,\underline{e}_1\rangle}\underline{e}_1 + \cdots + \frac{\langle \underline{a},\underline{e}_m\rangle}{\langle \underline{e}_m,\underline{e}_m\rangle}\underline{e}_m$$

קירוב יותר טוב $\longrightarrow$ $$P_{\langle\{\underline{e}_1,\dots,\underline{e}_m,\underline{e}_{m+1}\}\rangle}(\underline{a}) = \frac{\langle \underline{a},\underline{e}_1\rangle}{\langle \underline{e}_1,\underline{e}_1\rangle}\underline{e}_1 + \cdots + \frac{\langle \underline{a},\underline{e}_m\rangle}{\langle \underline{e}_m,\underline{e}_m\rangle}\underline{e}_m + \frac{\langle \underline{a},\underline{e}_{m+1}\rangle}{\langle \underline{e}_{m+1},\underline{e}_{m+1}\rangle}\underline{e}_{m+1}$$

$\uparrow \quad \dots \quad \uparrow$

אותם מקדמים

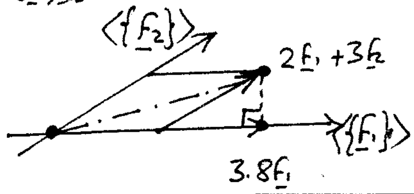
<u>דוגמאות</u> $\underline{a} = \begin{pmatrix}8\\8\\10\end{pmatrix}$

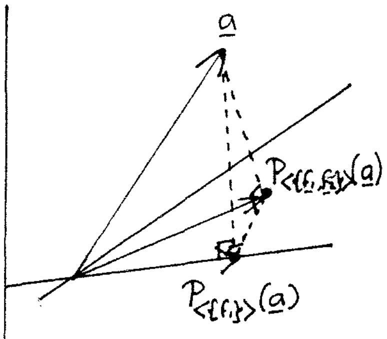
① (לא אורתוגונלי)

$$\underline{f}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\quad \underline{f}_2 = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$P_{\langle\{\underline{f}_1\}\rangle}(\underline{a}) = 3.8\underline{f}_1$$

$$P_{\langle\{\underline{f}_1,\underline{f}_2\}\rangle}(\underline{a}) = 2\underline{f}_1 + 3\underline{f}_2$$



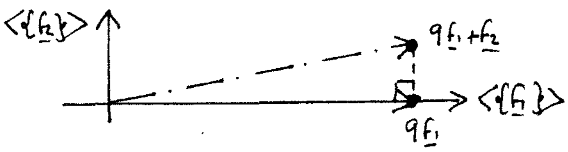


② (אורתוגונלי)

$$\underline{f}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \underline{f}_2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\+1\end{pmatrix}$$

$$P_{\langle\{\underline{f}_1\}\rangle}(\underline{a}) = 9\underline{f}_1 = \begin{pmatrix}0\\9\\9\end{pmatrix}$$

$$P_{\langle\{\underline{f}_1,\underline{f}_2\}\rangle}(\underline{a}) = 9\underline{f}_1 + \underline{f}_2 = \begin{pmatrix}0\\8\\10\end{pmatrix}$$



<u>הגדרה</u> תהי $\{e_i\}$ סדרה של <u>וקטורים אורתוגונלים</u> במרחב מכפלה פנימית V $\quad (\langle e_i,e_j\rangle=0$ לכל $i\neq j)$

את הטור $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\langle a,e_i\rangle}{\langle e_i,e_i\rangle}e_i$ נקרא <u>טור פורייה</u> (Fourier series) לוקטור a לפי בסיס $\{e_i\}$

<u>דוגמא</u> נגדיר מכפלה פנימית על פונקציות בקטע $[0,2\pi]$. ע"י

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

<u>טור פורייה</u> לפונקציה $f(x)$ לפי $\{e_i\}$ הוא:

$$\sum_j \frac{\langle f,e_j\rangle}{\langle e_j,e_j\rangle}e_j = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

כאשר

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$b_n = \underbrace{\frac{1}{\pi}}_{\frac{1}{\langle e_j,e_j\rangle}}\underbrace{\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx}_{\langle f,e_j\rangle}$$

אי שיוויון Bessel:

$$\underbrace{\|f\|^2}_{\int_0^{2\pi}f(x)^2dx} \geq \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2\pi + b_n^2\pi)$$

לכן $\{e_i\} = \{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\dots\}$ וקטורים אורתוגונלים.

<u>הוכחה</u>

$$\langle\cos mx,\cos nx\rangle_{m\neq n} = \int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx = \int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right]_0^{2\pi} = 0$$

גם צריך לבדוק - ש $\langle\cos mx,\sin nx\rangle = 0$ (לכל m,n)

$\langle\sin mx,\sin nx\rangle = 0 \quad (m\neq n)$

□

$$\langle 1,1\rangle = \int_0^{2\pi}1\cdot1\,dx = 2\pi$$

$$\langle\cos nx,\cos nx\rangle = \int_0^{2\pi}\cos^2 nx\,dx = \int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}(1+\cos 2nx)\,dx = \pi$$

$$\langle\sin nx,\sin nx\rangle = \int_0^{2\pi}\sin^2 nx\,dx = \int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}(1-\cos 2nx)\,dx = \pi$$

<u>דוגמא</u> $f(x) = x$ לפי מכפלת הנ"ל

טור פורייה: $\boxed{\pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx}$

אי שיוויון Bessel: $\boxed{\underbrace{8\pi^3/3}_{\|f\|^2} \geq \pi^2\cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\pi}$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\,dx = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[x\int\sin nx\,dx - \iint\sin nx\,dx\,dx\right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}$$

תכונות של טורי פורייה

$f(x)$ פונקציה על $[0,2\pi]$ ⟵ טור פורייה

$$S^f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{\langle f, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)dx}{2\pi}$$

$$a_n = \frac{\langle f, \cos nx\rangle}{\langle \cos nx, \cos nx\rangle} = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx}{\pi}$$

$$b_n = \frac{\langle f, \sin nx\rangle}{\langle \sin nx, \sin nx\rangle} = \frac{\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx}{\pi}$$

הטלה על $\langle\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos mx, \sin mx\}\rangle$

סכום חלקי

$$S_m^f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m}(a_n\cos nx + b_n \sin nx)$$

פונקציה מחזורית בעלת מחזור 2π

אי שיוון Bessel :

$$\|f\|^2 \geq \|S_m^f\|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2\cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{m}(a_n^2\cdot\pi + b_n^2\cdot\pi)$$

$\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx$, הפרש $= \|\varepsilon_m\|^2$

(א)

$$S_0^f(x) = \frac{a_0}{2} = P_{\langle\{1\}\rangle}(f)$$

פונקציות קבועות

היטל הפונק' קבועה עם ערך (הממוצע של f) $= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$

(ב) $\boxed{f \mapsto S^f \text{ העתקה ליניארית}}$

$S^{f+g} = S^f + S^g$: (טור פורייה של סכום $f+g$ הוא הסכום של טורי פורייה של f ו-g)

$S^{c\cdot f} = c\cdot S^f$ (c מספר קבוע)

$$S^{c\cdot f(x)} = \frac{ca_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(ca_n\cos nx + cb_n\sin nx) \Leftarrow S^f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

$$S^{c+f(x)} = \left(c + \frac{a_0}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

(ג) $\boxed{S^{(f')} = (S^f)'}$ (גזירת של טור פורייה)

f פונק' גזירה, $f(0) = f(2\pi)$ ⇐

$$S^{f'(x)} = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx - na_n\sin nx)$$

<u>הוכחה</u> לפי הגדרה: $S^{f'}$ הוא טור פורייה של f' ; בהגדרה $\frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx + b_n'\sin nx)$

כאשר

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)dx = \frac{1}{\pi}[f(x)]_0^{2\pi} = 0$$

$$a_n' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[f(x)\cos nx - \int(-n\sin nx)f(x)dx\right]_0^{2\pi} = \frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx = nb_n$$

$$b_n' = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx\, dx = \cdots = -na_n$$

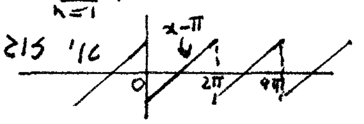
<u>דוגמאות</u>

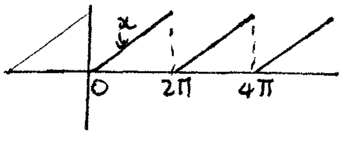
① טור פורייה של $\cos^2 x$ הוא $\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\cos 2x + 0 + 0 + \ldots$

② טור פורייה של x על $[0,2\pi]$ הוא $\pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx$

⇐ טור פורייה של $x-\pi$ על $[0,2\pi]$ הוא $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx$

אי זוגית





התכנסות של טורי פורייה

תהי f פונקציה מחזורית בעלת מחזור 2π וגם f רציפה בחלקים.

משפט 1 אם קיים A כך ש- $\sup\left|\frac{f(x_0+u)+f(x_0-u)-2A}{u}\right| < \infty$ אזי $S_m^f(x_0)\to A$ כאשר $m\to\infty$.

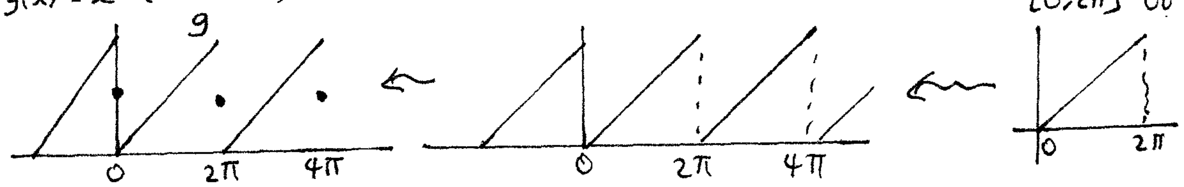
מסקנה f'_-, f'_+ קיימים ב- $x=x_0$ $\Leftarrow$ $S_m^f(x_0)\to\frac{1}{2}(f(x_0+)+f(x_0-))$ כאשר $m\to\infty$

דוגמא $f(x)=x$ על $[0,2\pi]$

פונקציה מחזורית

$g(0)=g(2\pi)=\pi$

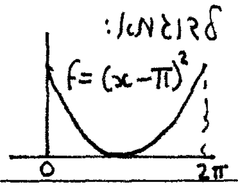
$g(x)=x \quad (0<x<2\pi)$



$$S^f(x) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx \xrightarrow{\text{נקודתית}} g$$

משפט 2 f רציפה על $[0,2\pi]$, $f(0)=f(2\pi)$, f'_-, f'_+ קיימות $\Leftarrow$ $S_m^f \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

לדוגמא:



הערה לכל f, m, S_m^f פונקציה רציפה.
לכן אם f לא רציפה, אז $S_m^f \not\xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

משפט 3 $S_m^f \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ ($\|\cdot\|_2$ הוא הנורמה ממכפלה פנימית $\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi}f(x)g(x)dx$ לכן $\|f\|_2=\sqrt{\int_0^{2\pi}f(x)^2dx}$)

מסקנה (שיוויון Parseval)
$$\|f\|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2(2\pi)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2\cdot\pi+b_n^2\cdot\pi)$$

$$0 = \lim_{m\to\infty}\|\varepsilon_m\|^2 \underset{\text{אי שיוון Bessel}}{=} \text{הפרש}$$

$\varepsilon_m=f-S_m^f\to 0$

דוגמא $f(x)=x$ על $[0,2\pi]$ $\Leftarrow$ $\frac{8\pi^3}{3}=\int_0^{2\pi}x^2dx=\|f\|^2=\pi^2\cdot2\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\pi$

$\Leftarrow$ $\boxed{\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$

הערה f פונקציה מחזורית בעלת מחזור 2π

$\Leftarrow$ $\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx=\int_a^{a+2\pi}f(x)\cos nx\,dx$ לכל a

בפרט כאשר $a=-\pi$, $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$

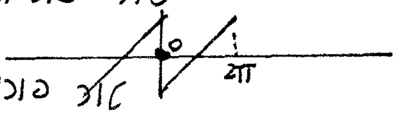
לכן אם f פונקציה אי זוגית ($f(-x)=-f(x)$), אזי $f(x)\cos nx$ גם פונקציה אי זוגית

$\Leftarrow$ $0=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx$ $\Leftarrow$ $a_n=0$

$\Leftarrow$ $S^f=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\sin nx)$

טור פורייה של פונקציה אי זוגית הוא טור בצורה $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$

לדוגמא $x-\pi$ על $[0,2\pi]$

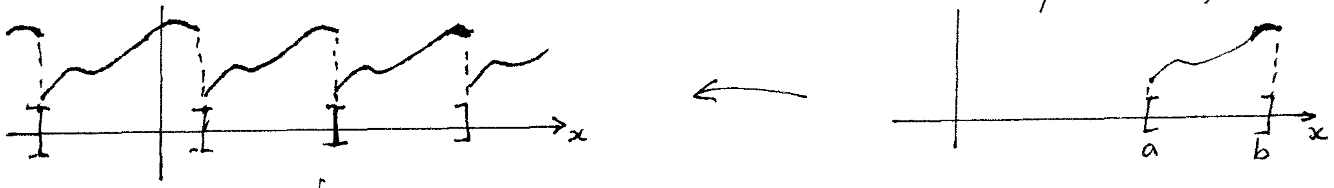


טור פורייה של פונקציה זוגית הוא טור בצורה $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$

טור פורייה על קטע כללי

f פונקציה על קטע $[a,b]$

פונקציה מחזורית בעלת מחזור $b-a$



מערכת אורתוגונלי:

$$e_n = \cos\left(\frac{2\pi n}{b-a}x\right) \quad n \geq 0$$
$$f_n = \sin\left(\frac{2\pi n}{b-a}x\right) \quad n > 0$$

לפי מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$

$$\langle 1,1\rangle = \int_a^b 1\,dx = b-a$$
$$\langle e_n,e_n\rangle = \tfrac{1}{2}(b-a) = \langle f_n,f_n\rangle \quad (n>0)$$
$$\Downarrow$$
$$S^f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \overbrace{\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)}^{e_n} + b_n \overbrace{\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)}^{f_n}\right)$$

$$\frac{\langle f,1\rangle}{\langle 1,1\rangle} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \qquad \frac{\langle f,e_n\rangle}{\langle e_n,e_n\rangle} = \frac{\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)dx}{\frac{1}{2}(b-a)} \qquad \frac{\langle f,f_n\rangle}{\langle f_n,f_n\rangle} = \frac{\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)dx}{\frac{1}{2}(b-a)}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)dx, \quad b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{b-a}\right)dx}$$

שיוויון Parseval: $\int_a^b f(x)^2dx = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\left(\frac{b-a}{2}\right)$

הערה: $t = \frac{2\pi}{b-a}x$

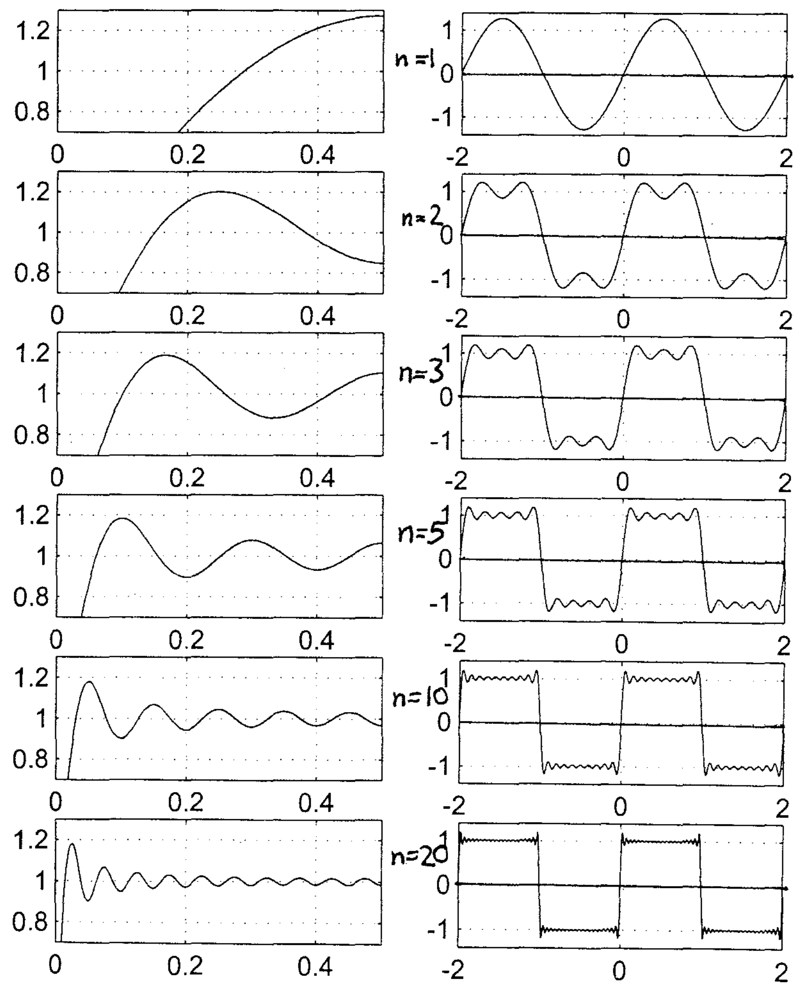
$t \to t+2\pi \Leftrightarrow x \to x+(b-a)$

$g(t) = f(x)$

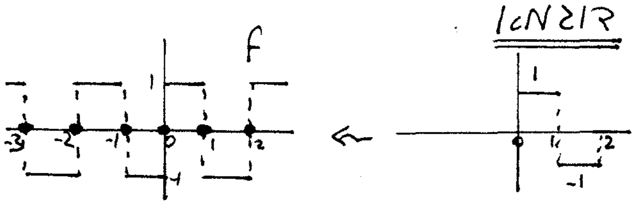
פונקציה מחזורית בעלת מחזור 2π: $\{1, \cos nt, \sin nt\}$

פונקציה מחזורית בעלת מחזור $b-a$: $\{1, e_n, f_n\}$

סכום חלקי: $\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\sin(\pi(2m-1)x)$



דוגמא



$f(x)=1 \quad x\in(0,1)$
$f(x)=-1 \quad x\in(1,2)$

$[a,b]=[-1,1]$
פונקציה אי זוגית

$$\Downarrow$$

$a_n = 0$, לכל n

$$b_n = \frac{2}{1-(-1)}\int_{-1}^{1} f(x)\sin(\underset{2\pi/(b-a)}{\pi} nx)\,dx$$
$$= \int_0^1 \sin \pi nx\,dx - \int_{-1}^0 \sin \pi nx\,dx$$
$$= \left[-\frac{\cos \pi nx}{\pi n}\right]_0^1 - \left[-\frac{\cos \pi nx}{\pi n}\right]_{-1}^0$$
$$= -\frac{1}{\pi n}((-1)^n-1) + \frac{1}{\pi n}(1-(-1)^n)$$
$$= \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n) = \begin{cases} 0 & n \text{ זוגית} \\ \frac{4}{\pi n} & n \text{ אי זוגית} \end{cases}$$

$$\boxed{S^f = \frac{4}{\pi}\left(\sin \pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{5}\sin 5\pi x + \dots\right)}$$

שיוויון Parseval: $2 = \int_{-1}^1 f(x)^2dx = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots\right)$

לכן $\frac{\pi^2}{8} = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\dots$

$$S^f \xrightarrow{\text{לפי } 11.11} \begin{cases} 1 & x\in(2k,2k+1) \\ -1 & x\in(2k-1,2k) \\ 0 & x\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

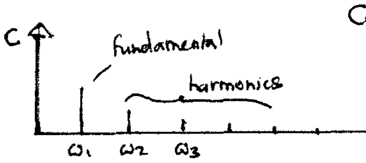
התכנסות נקודתית (אינה במ"ש)

f פונקציה מחזורית (טור פורייה)
Fourier series

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\right)$$

תדר $\omega_n=\frac{2n\pi}{b-a}$

$C_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$



משבן תדרים דיסקרטי

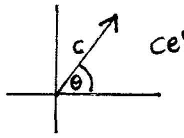
הערה

$$a\cos x+b\sin x=c\cos(x-\theta)$$

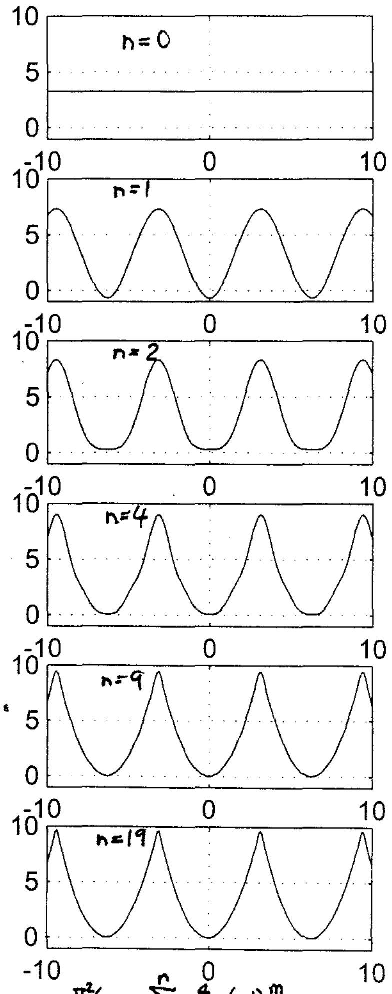
כאשר

אמפליטודה amplitude $c=\sqrt{a^2+b^2}$

פזה phase $\theta=\sin^{-1}b/c=\tan^{-1}b/a$



$ce^{i\theta}=a+ib$ phasor



$\pi^2/3+\sum_{m=1}^{n}\frac{4}{m^2}(-1)^m\cos mx$

טור פורייה לפונקציה x^2 על $[-\pi,\pi]$

f פונקציה אינה מחזורית (התמרת פורייה)
Fourier transform

$$f(x)=\int_0^\infty a(\omega)\cos\omega x\,d\omega+\int_0^\infty b(\omega)\sin\omega x\,d\omega$$

$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\,dx$ $\qquad \omega\leftrightarrow\frac{2n\pi}{b-a}$

$b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x\,dx$ $\qquad d\omega\leftrightarrow\frac{2\pi}{b-a}$

$c(\omega)=\sqrt{a(\omega)^2+b(\omega)^2}$

$a(\omega)\leftrightarrow a_n\cdot\frac{b-a}{2\pi}$

$(a(\omega)^2+b(\omega)^2)\frac{2\pi^2}{(b-a)^2}\leftrightarrow(a_n^2+b_n^2)\frac{b-a}{2}$

$$\pi\int_0^\infty c(\omega)^2d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)^2dx$$

שיוויון Parseval

הגדרה של התמרת פורייה:

הפוכה של התמרת פורייה

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}f(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega}$$

התמרת פורייה

$$\boxed{\mathcal{F}f(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\omega x}\,dx}$$

$\mathcal{F}f(\omega)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}(a(\omega)-ib(\omega))\rightarrow C(\omega)=|\mathcal{F}f(\omega)|=\sqrt{\frac{\pi}{2}}c(\omega)$

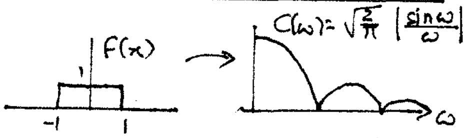
$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

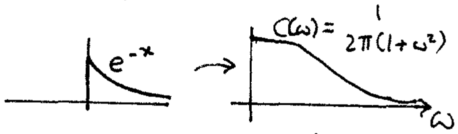
$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$

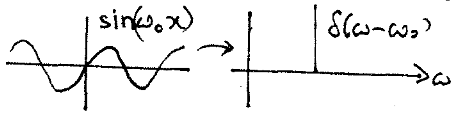
$\sin\theta=-\frac{i}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)^2d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)^2dx}$$

Parseval שיוויון







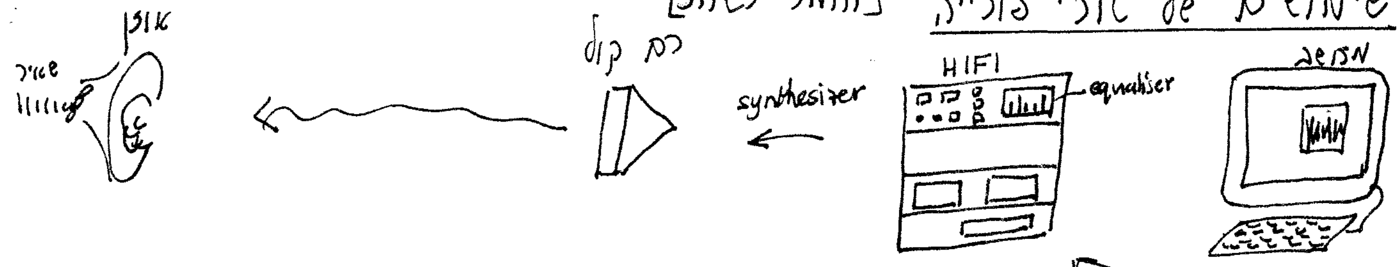
תכונות: ⊛ $\mathcal{F}$ העתקה לינארית

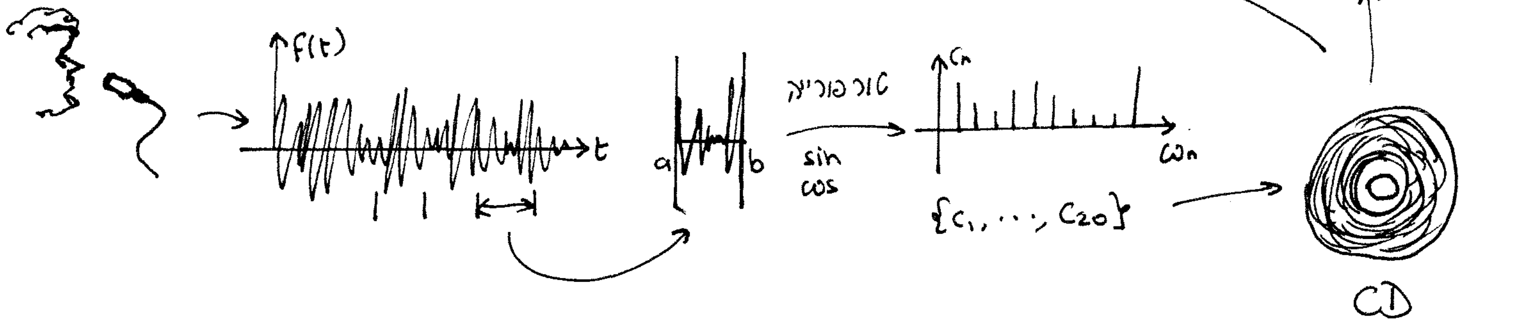
$\mathcal{F}(f+g)=\mathcal{F}f+\mathcal{F}g$

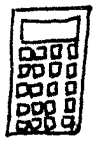
$\mathcal{F}(f')=i\omega\,\mathcal{F}f$ ⊛

$\|\mathcal{F}f\|_2=\|f\|_2$ ⊛

שימושים של טורי פורייה [תומי כשות]







x	$\sin x$
0	⋮
0.01	
0.02	
0.03	
⋮	

→ קירוב $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{10} x^{10}$ → לשמור $a_0, \dots, a_{10}$

סוגים אחרים של מערכות אורתוגונליות

$\{\cos nx, \sin nx\}$

מיתר של גיטרה

$$u = \sum_n a_n \cos \omega_n t \sin \lambda_n x$$

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ \partial u / \partial t = 0, \quad \text{כאשר } t=0 \\ u(0,t) = 0 \quad \text{(קבוע בקצה אחד)} \end{cases}$$

$$u_0(x) = \sum_n a_n \sin \lambda_n x$$

טור פורייה של $u_0(x)$

(פונקציות אורתוגונליות)

פולינום legendre

$$(1-x^2)\frac{d^2\Phi}{dx^2} - 2x\frac{d\Phi}{dx} + n(n+1)\Phi = 0$$

$(-1 \le x \le 1)$

$\Phi = P_n$

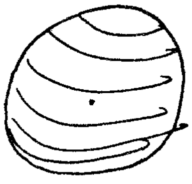
$P_0 = 1$

$P_1 = x$

$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

⋮



$\nabla^2 T = 0$ משוואת Laplace

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\phi)$$

פתרון בעל סימטריה גלילית

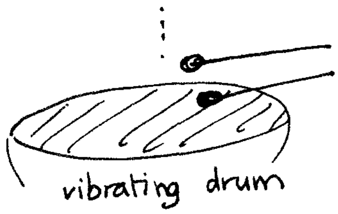
(פולינומים אורתוגונליים

לפי $\left(\int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx\right.$

פונקציות Bessel

$$r^2 R'' + r R' + (\lambda^2 r^2 - n^2) R = 0$$

$$R = J_n(\lambda r), \ Y_n(\lambda r)$$



vibrating drum

$$\nabla^2 u + \lambda^2 u = 0$$

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\lambda r)(A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta)$$

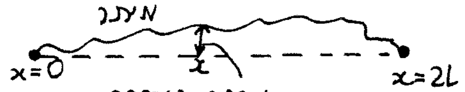
fundamental vibration

שימוש של טורי פורייה למצוא תנודות של כוור בכינור [חומר רשות]

יש מיתר בעלת אורך $2l$, צפיפות ρ ומתיחות T. הוא קבוע בקצוות.

<u>שאלה:</u> אם אנחנו מוזז את מרכז המיתר ב-ε ואחר כך משחרר אותו ברגע $t=0$, אז מה קרה אחר כך? מה מגוון התדרים של הקול?

<u>בעיה מתמטית:</u>



מרחק העתקה (displacement) $u(x,t)$ ברגע t

$u(x,t) =$ (פונקציה של x ו- t) — t: זמן; x: נקודה במיתר

$\partial u/\partial t =$ (מהירות בנקודה x ברגע t)

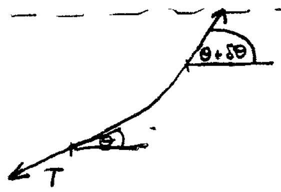
$\partial^2 u/\partial t^2 =$ (תאוצה בנקודה x ברגע t)

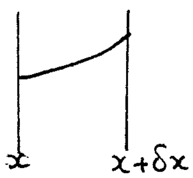
$\partial u/\partial x =$ (שיפוע בנקודה x ברגע t) $= \tan\theta$

השאלה למצוא את $u(x,t)$

<u>משוואה התנועה</u> (equation of motion):

חלק של המיתר:





קומפוננטות בכיוון $\uparrow$:

$$\underbrace{-T\sin\theta + T\sin(\theta+\delta\theta)}_{F} = \underbrace{\rho\,\delta x}_{m}\ \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}_{a}$$

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq T\frac{\partial\theta}{\partial x} \cong \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

θ קטן $\Leftarrow$ $\sin\theta\sim\theta$, $\theta\sim\tan\theta$

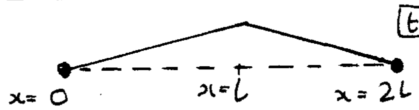
(*) $$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$ כאשר $c=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$

c: "מהירות של גלים"

משוואה גלים (wave equation)

<u>תנאי התחלה</u>

$\boxed{t=0}$



$$\boxed{u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} \varepsilon x/l & 0<x<l \\ \varepsilon(2L-x)/l & l<x<2l \end{cases}}$$

$$\boxed{\partial u/\partial t\,(x,0) = 0}$$

<u>תנאי שפה</u>

$$\boxed{u(0,t) = 0 = u(2L,t)}$$

<u>הערה</u> (א) $u = \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} kx \cdot \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\omega t$ פתרונות של (*) כאשר $\omega = ck$

"stationary waves"

<u>הוכחה:</u> $u=\cos kx\cos\omega t$

$\Rightarrow \partial^2 u/\partial x^2 = -k^2\cos kx\cos\omega t$

$\partial^2 u/\partial t^2 = -\omega^2\cos kx\cos\omega t$

יש פתרון אם $k^2=\omega^2/c^2$ ☐

(ב) u_1, u_2 פתרונות של (*)

$\Leftarrow$ u_1+u_2 פתרון של (*)

וגם au_1 פתרון של (*)

a: מספר קבוע

<u>הוכחה:</u>

$$\begin{cases} \partial^2 u_1/\partial x^2 = 1/c^2\ \partial^2 u_1/\partial t^2 \\ \partial^2 u_2/\partial x^2 = 1/c^2\ \partial^2 u_2/\partial t^2 \end{cases}$$

$$\Leftarrow \begin{cases} \partial^2(u_1+u_2)/\partial x^2 = \frac{1}{c^2}\partial^2(u_1+u_2)/\partial t^2 \\ \partial^2(au_1)/\partial x^2 = \frac{1}{c^2}\partial^2(au_1)/\partial t^2 \end{cases}$$ ☐

$$\boxed{\text{(*) היא משוואה ליניארית}}$$

<u>דוגמה:</u> "travelling waves"

$\cos(kx\pm\omega t) = \cos kx\cos\omega t \mp \sin kx\sin\omega t$

גם פתרון של (*)

פתרון של הבעיה מתמטית (דרך ניחוש!)

אנחנו מעניינים בפתרונות כך ש- $u(0,t)=0=u(2L,t)$ לכל t

(תנאי שפה)

$\Leftarrow \quad u(x,t)=\sin kx\cdot {\cos \atop \sin}\,\omega t$ מתאים

מתאים כאשר $\sin 2Lk=0$

$\Rightarrow 2Lk=n\pi$

$\Rightarrow k=n\pi/2L\,,\quad \omega=ck=n\pi c/2L$

$$u=\boxed{\sin\frac{n\pi x}{2L}\cdot{\cos\atop\sin}\frac{n\pi ct}{2L}}$$ n מספר טבעי

פתרונות של ⊛, תנאי שפה

אנחנו מעניינים בפתרונות כך ש- $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$ $\Leftarrow$ $\sin\frac{n\pi x}{2L}\cdot\cos\frac{n\pi ct}{2L}$ מתאים

משוואה ליניארית $\Leftarrow$

$$⊕\ \boxed{u=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{2L}\cdot\cos\frac{n\pi ct}{2L}}$$

הוא פתרון של ⊛, תנאי שפה, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0$,

לכל מקדמים קבועים b_n

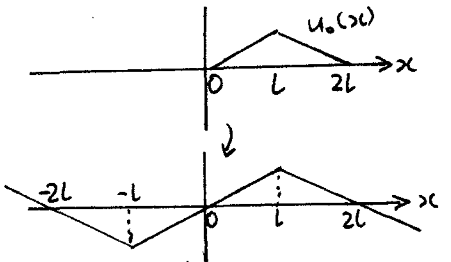
תנאי התחלה: $u(x,0)=u_0(x)$: אם נמצא b_n כך ש-: $0<x<2L$

$$u_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{2L}$$

אז ⊕ יהיה הפתרון שלנו לכל הבעיה מתמטית

טור של sin $\sum b_n\sin\frac{n\pi x}{2L}$

$\Leftarrow$ פונקציה אי זוגית



מחזור $=4L$

טור פורייה:

$$b_n=\frac{1}{2L}\int_{-2L}^{2L}u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{2L}dx$$
$$=\frac{1}{L}\int_0^{2L}u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{2L}dx$$
$$=\frac{1}{L}\left(\int_0^L\frac{\varepsilon x}{L}\sin\frac{n\pi x}{2L}dx+\int_L^{2L}\frac{\varepsilon(2L-x)}{L}\sin\frac{n\pi x}{2L}dx\right)\quad y=2L-x$$
$$=\frac{1}{L}\left(\int_0^L\frac{\varepsilon x}{L}\sin\frac{n\pi x}{2L}dx+\int_0^L\frac{\varepsilon y}{L}\sin\left(n\pi-\frac{n\pi y}{2L}\right)dy\right)$$
$$=\frac{\varepsilon}{L^2}\left(1-(-1)^n\right)\int_0^L x\sin\frac{n\pi x}{2L}dx$$
$$=\begin{cases}0 & (\text{n זוגית})\\ 2\varepsilon/L^2\left[x\left(-\frac{2L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2L}\right)-\int\left(-\frac{2L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2L}\right)dx\right]_0^L & (\text{n אי זוגית})\end{cases}$$
$$=\begin{cases}0 & (\text{n זוגית})\\ \frac{2\varepsilon}{L^2}\left(\frac{2L}{n\pi}\right)^2\left[\sin\frac{n\pi x}{2L}\right]_0^L=\frac{8\varepsilon}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} & (\text{n אי זוגית})\end{cases}$$

$\xLeftarrow[m\geq 0]{n=2m+1}$

$$\boxed{u_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{8\varepsilon(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2L}}$$

פתרון סופי $\rightarrow$

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{8\varepsilon(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2}\cos\frac{\pi(2m+1)ct}{2L}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2L}}\Leftarrow ⊕$$

$$\partial u/\partial t=\sum_{m=0}^{\infty}-\frac{4\varepsilon(-1)^m}{\pi L(2m+1)}c\sin\frac{\pi(2m+1)ct}{2L}\sin\frac{\pi(2m+1)x}{2L}$$
$$\partial u/\partial x=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4\varepsilon(-1)^m}{\pi L(2m+1)}\cos\frac{\pi(2m+1)ct}{2L}\cos\frac{\pi(2m+1)x}{2L}$$

potential energy
אנרגיה פוטנציאלית $\displaystyle\int_0^{2L}\tfrac12\rho(\partial u/\partial t)^2dx=\sum_{m=0}^{\infty}\frac12\left(\frac{4\varepsilon}{\pi L(2m+1)}\right)^2\rho c^2\left(\sin\frac{\pi(2m+1)ct}{2L}\right)^2 L$

kinetic energy
אנרגיה קינטית $\displaystyle\int_0^{2L}\tfrac12 T(\partial u/\partial x)^2dx=\sum_{m=0}^{\infty}\frac12\left(\frac{4\varepsilon}{\pi L(2m+1)}\right)^2 T\left(\cos\frac{\pi(2m+1)ct}{2L}\right)^2 L$

שיוויון Parseval

סכום קבועה (לא תלוי ב-t) אנרגיה $\displaystyle=\sum_{m=0}^{\infty}\frac12\left(\frac{4\varepsilon}{\pi L(2m+1)}\right)^2 T\quad L$

הוכחה

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{2L}\tfrac12\rho\left(\tfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2dx+\int_0^{2L}\tfrac12 T\left(\tfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx\right)=\int_0^{2L}\frac{\partial}{\partial t}\left(\tfrac12\rho\left(\tfrac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\tfrac12 T\left(\tfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)dx$$
$$=\int_0^{2L}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+T\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\right)dx$$
$$=\int_0^{2L}T\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+T\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial t}\,dx$$
$$=\int_0^{2L}\partial/\partial x\left(T\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx=\left[T\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^{2L}=0$$

$⊛\Rightarrow\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$

$\partial u/\partial t=0\Leftarrow x=0,2L$

$\Leftarrow\ \int_0^{2L}\frac12\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dx+\int_0^{2L}\frac12 T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx$

$\boxed{\text{conservation of energy}}$ לא תלוי ב-t.

f רציפה בנגזרות $\Leftarrow$ $\displaystyle\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)dx=\int_a^b\frac{\partial f}{\partial t}dx$