פרק 5: טורי חזקות

טור חזקות הוא טור של פונקציות בצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ או $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

טור חזקות במשתנה $x-x_0$; טור חזקות במשתנה x

דוגמאות

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n!}$

נסמן את תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ב-I

טענה $\begin{cases} x\in I \\ |y|<x \end{cases} \Rightarrow y\in I$

הוכחה $x\in I \Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס

$\Rightarrow$ $\{a_n x^n\}$ סדרה חסומה $\left(\begin{matrix}\exists M\,\forall n \\ |a_n x^n|<M\end{matrix}\right)$

$\Rightarrow |a_n y^n| = |a_n x^n|\cdot|y/x|^n < M\cdot|y/x|^n$

$|y|<x \Rightarrow$ $\sum|y/x|^n$ מתכנס $\Rightarrow$ $\sum a_n y^n$ מתכנס

$\Rightarrow y\in I$

הגדרה $R\equiv\sup_{x\in I}|x|$ נקרא **רדיוס ההתכנסות** של הטור

מסקנה $|x|<R \Rightarrow$ טור מתכנס

$|x|>R \Rightarrow$ טור מתבדר

ולכן $\{x \mid |x|<R\}\subseteq I\subseteq\{x \mid |x|\le R\}$

א) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$: $a_n=1$ לכל n

$R=1$

$I=\{x \mid |x|<1\}$

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ $\quad a_n=\frac{1}{n}$

$R=1$

$I=\{x \mid |x|\le 1, x\ne 1\}$

ג) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ $\quad a_n=n!$

$R=0$

$I=\{0\}$

ד) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ $\quad a_n=1/n!$

$R=\infty$

$I=\mathbb{R}$

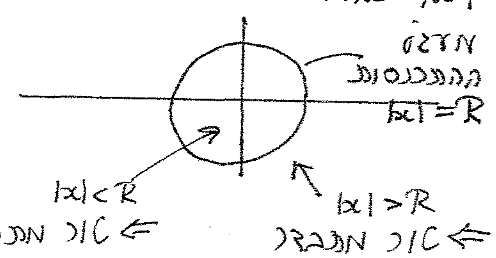
טענה אם $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ קיים, אז $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

הוכחה נסמן את $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ ב-a

לכן $a|x| = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}$

$R=1/a \Leftarrow \begin{cases} a|x|<1 \Rightarrow \text{טור מתכנס} \\ a|x|>1 \Rightarrow \text{טור מתבדר}\end{cases}$

הערה: כל שכתוב בדף זה תקף לטורים עם מקדמים a_n מרוכבים וגם כאשר x מספר מרוכב.



טענה אם $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ קיים אז הוא שווה ל-R

הוכחה נסמן את $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ב-b

אז $\frac{x}{b} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right|$

ה) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$: $a_n=\begin{cases}1 & \text{זוגי } n \\ 0 & \text{אי זוגי } n\end{cases}$

$\sqrt[n]{a_n}=\begin{cases}1 & \text{זוגי } n \\ 0 & \text{אי זוגי } n\end{cases}$

לכן $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ לא קיים

אבל $\limsup\sqrt[n]{|a_n|}=1$

$I=\{x \mid |x|<1\}$, $R=1$

משפט במקרה כללי, $R=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$

> תהי (b_n) סדרה, ההגדרה של $\limsup b_n$ היא $\sup\{b \mid$ קיימת תת סדרה של (b_n) שמתכנסת ל-$b\}$

ו) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}/n$: $I=\{x \mid |x^2|\le 1, x^2\ne 1\}$

$=\{x \mid |x|\le 1, x\ne 1,-1\}$

נניח ש- R הוא רדיוס ההתכנסות של $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

טענה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס במ"ש בתחום $|x|\le r$ לכל $R>r$

הוכחה $r<R \Leftarrow$ קיים s, $r<s<R$

$s\in I \Leftarrow \sum a_n s^n$ מתכנס

$\Leftarrow (a_n s^n)$ חסומה $(\exists M\, \forall n\ |a_n s^n|<M)$

$|x|\le r \Leftarrow |a_n x^n| = |a_n s^n|\cdot|x/s|^n \le M|r/s|^n$

$\sum (r/s)^n$ מתכנס $\xLeftarrow{\text{מבחן Weierstrass}}$ $\sum a_n x^n$ מתכנס במ"ש בתחום $|x|\le r$ □

טענה אם קיימת נקודה x_0 כך ש- $|x_0|=R$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ מתבדר, אז $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ לא מתכנס במ"ש בתחום $|x|<R$

הוכחה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ מתבדר $\xLeftarrow{\text{קריטריון קושי}}$ $\exists\varepsilon>0\ \forall N\ \exists m,n>N$

$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k x_0^k\right| > \varepsilon$

לטורים של מספרים

$\exists x: |x|<R$ $\Leftarrow$

$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k x^k\right| > \varepsilon$

$\boxed{\text{אם לא, אז לכל } x,\ |x|<R,\ \left|\sum_{k=m}^{n} a_k x^k\right| \le \varepsilon \text{ פונק' רציפה. כאשר } x\to x_0 \text{ דרך ערכי } x \text{ כך ש- } |x|<R \text{ מקבלים סתירה}}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\xLeftarrow{\text{קריטריון קושי}}$ לא מתכנס במ"ש בתחום $|x|<R$

להתכנסות במ"ש □

טענה $R\in I \Leftarrow$ טור מתכנס במ"ש בקטע $[0,R]$

הוכחה $a_n x^n = \underbrace{(a_n R^n)}_{\sum a_n R^n \text{ מתכנס}}\ \underbrace{(x/R)^n}_{\text{סדרה מונוטונית וחסומה במשותף}}$

$\xLeftarrow{\text{מבחן Abel}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס במ"ש על $[0,R]$ □

מסקנה ⊛ הסכום $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ רציפה ב- $\{x \mid |x|<R\}$

⊛ אם $R\in I$, אז f רציפה משמאל ב- $x=R$

⊛ לטורים $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ יש אותו רדיוס ההתכנסות

⊛ f גזירה, אינסוף פעמים בנקודות ב- $|x|<R$

דוגמאות

א) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n} x^n$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$

$\Leftarrow R=1$

צריך לבדוק $x=\pm1$: $I=[-1,1)$

ב) $\sum_{n=0}^{\infty} (7^n+3^n) x^{3n}$: $\sqrt[3n]{7^n+3^n} \to \sqrt[3]{7}$

$R = 1/\sqrt[3]{7}$

$|x| = 1/\sqrt[3]{7} \Leftarrow |a_n| = 1+(3/7)^n \not\to 0$

לכן $I=\{x \mid |x|<1/\sqrt[3]{7}\}$

ג) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n/n^2\,(x+1)^n$: $\sqrt[n]{3^n/n^2} \to 3$

$R = 1/3$

$|x+1| = 1/3 \Leftarrow |3^n/n^2\,(x+1)^n| = 1/n^2$

לכן $I=\{x \mid |x+1|\le 1/3\}$

התכנסות במ"ש:

א) כן ב- $[-r,r]$ לכל $r<1$

כן ב- $[-1,0)$

לא ב- $(-1,1)$

ב) לא ב- $(-1/\sqrt[3]{7},\ 1/\sqrt[3]{7})$

כן ב- $[-r,r]$ לכל $r<1/\sqrt[3]{7}$

ג) כן ב- $[-4/3,-2/3]$

טורי Taylor

א) $\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2-\cdots$

$\ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\cdots$

$\frac{\ln(1+t)}{t} = 1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}-\cdots$

$\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}dt = x-\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}-\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2}$

ב) $\frac{x}{1+x-2x^2} = \frac{x}{(1+2x)(1-x)} = -\frac{1/3}{1+2x}+\frac{1/3}{1-x}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}(1-(-2)^n)\,x^n$

ג) $\sin 3x + x\cos 3x$

$= \left(3x-\frac{(3x)^3}{3!}+\cdots\right) + x\left(1-\frac{(3x)^2}{2!}+\cdots\right)$

⊛ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס ל- $f(x)$ $\Leftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ מתכנס ל- $\int_0^x f(t)dt$

⊛ $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ מתכנס ל- g $\Leftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס ל- f ו- $(g=f')$

⊛ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור Taylor של f.

מכפלה של טורי חזקות

הגדרה טור המכפלה של שני טורי חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ו- $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, הוא $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ כאשר

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

משפט נסמן את רדיוס ההתכנסות של $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ ו- $\sum c_n x^n$ ב- R, R' ו- R''.

לכן $R'' \geq \min(R', R)$

הוכחה כאשר $|x|<R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס (נסמן את הסכום ב- $f(x)$)

כאשר $|x|<R'$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ מתכנס (נסמן את הסכום ב- $g(x)$)

לכן, כאשר $|x|<\min(R,R')$ שני הטורים מתכנסים בהחלט ולכן גם המכפלה מתכנסת בהחלט

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k x^k)(b_{n-k} x^{n-k}) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n = c_n x^n$$

$\Leftarrow$ $\sum c_n x^n$ מתכנס (בהחלט) לכל x כך ש- $|x|<\min(R,R')$

$\Leftarrow$ $R'' \geq \min(R, R')$ □

טורי Taylor

טענה אם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס לפונקציה $f(x)$ כאשר $|x|<R$ $(R>0)$, אז $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$

הוכחה לכל $r<R$ $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ מתכנס במ"ש על $|x| \leq r$

$\Leftarrow$ $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

וגם $f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) a_k x^{k-n}$

כאשר $x=0$, מקבלים: $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$ □

מסקנה f פונקציה וקיים טור חזקות שמתכנס ל- f $\Leftarrow$ ל- f קיים טור חזקות יחיד והוא טור Taylor של f

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \left(a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n$$

דוגמאות

א) $a_n = b_n = 1$ $\Leftarrow$ $c_n = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot 1 = n+1$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ כאשר $|x|<1$

המכפלה של $\sum a_n x^n$ ו- $\sum b_n x^n$ (הוא) $\sum c_n x^n$ כאשר $c_n = n+1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ב) $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$

$(|x|<2)$ $\sum \frac{x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}$

$\Leftarrow$ $(|x|<1)$ $\sum c_n x^n = \frac{1}{(1-x)(2-x)}$

כאשר $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

(גם: $\frac{1}{(1-x)(2-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$)

ג) $f(x) = e^x$ $\rightsquigarrow$ $f^{(n)}(0) = 1$

טור Taylor של f:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

רדיוס ההתכנסות $= \infty$

לכן טור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ מתכנס לכל x

נסמן את הסכום ב- $g(x)$.

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\Leftarrow$ $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = g(x)$

$\frac{d}{dx}(\ln g) = 1$

$g(0) = a_0 = 1$

$g(x) = (\text{קבוע}) \cdot e^x \Rightarrow g(x) = e^x$

$$\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{לכל } x}$$

ד) $f(x) = e^{-1/x^2}$ $\leftarrow$ $f^{(n)}(0) = 0$

$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$

טור Taylor של f הוא $\sum a_n x^n$ כאשר $a_n = 0$ לכל n

אבל $f \neq 0$

ה) נוסחת Taylor (ק"א) $e^x = \sum_{r=0}^{n} \frac{x^r}{r!} + R_n(x)$

כאשר $R_n(x) = e^{\theta} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, $0<\theta<x$

$$|R_n(x)| < e^x \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\Leftarrow$ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ □

דוגמאות

א) חשב את $\int_0^{0.5}\frac{\sin x}{x}dx$ עם דיוק 0.0001 (תרגיל 2א', בן-ציון קון)

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \quad \text{לכל } x$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots \quad \text{לכל } x$$ (ב- $x=0$, ערך $= 1$) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x}dx = t-\frac{t^3}{3\cdot 3!}+\frac{t^5}{5\cdot 5!}-\frac{t^7}{7\cdot 7!}+\cdots \quad \text{לכל } t$$

$$\int_0^{0.5}\frac{\sin x}{x}dx = \frac12-\frac{1}{3\cdot 3!\cdot 2^3}+\frac{1}{5\cdot 5!\cdot 2^5}-\cdots \Leftarrow t=\frac12$$

טור מהצורה $\sum(-1)^n a_n$ כאשר $a_n\to 0$, a_n מונוטונית

$\Leftarrow$ $|\text{סכום} - \text{סכום חלקי}| < |(\text{איבר ה-}(n+1))|$ ($\sum_{}^{\infty}$, $\sum^{n}$)

$$\left|\int_0^{0.5}\frac{\sin x}{x}dx-\left(\frac12-\frac{1}{3\cdot 3!\cdot 2^3}\right)\right| < \frac{1}{19200} < 0.0001 \Leftarrow 5\cdot 5!\cdot 2^5 = 19200$$

$$\int_0^{0.5}\frac{\sin x}{x}dx \approx \frac12-\frac{1}{3\cdot 3!\cdot 2^3} = 0.4930\dot{5} \quad \Leftarrow$$

הפרש < 0.0001 (תשובה: 0.4931)

ב) נוסחת הבינום: Binomial Theorem

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k \quad \text{כאשר } |x|<1 \quad (*)$$

$$f(x)=(1+x)^\alpha \Rightarrow f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$\Leftarrow$ $f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$ ו- טור Taylor של f הוא צד ימין של $(*)$

$$\binom{\alpha}{k+1}\Big/\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha-k}{k+1}\xrightarrow{k\to\infty}-1 \qquad \boxed{\binom{\alpha}{k}\equiv\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}}$$

$\Leftarrow$ רדיוס ההתכנסות של $(*)$ הוא 1 $R=1$

נסמן את סכום הטור ב- $g(x)$ כאשר $|x|<1$

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k \Rightarrow g'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}kx^{k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha\cdots(\alpha-k+1)}{(k-1)!}x^{k-1}$$

$$(1+x)g'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha\cdots(\alpha-k+1)}{(k-1)!}x^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha\cdots(\alpha-k)}{k!}x^k \quad (k\to k+1)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha\cdot\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k=\alpha g(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\ln g(x))=\frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{1+x}$$

$$\ln g(x) = \text{קבוע} + \alpha\ln(1+x) \xRightarrow{g(0)=1} g(x)=(1+x)^\alpha$$

□

ג)

$$R=1 \qquad \sqrt{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\frac12)(-\frac12)\cdots(\frac32-k)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!}1\cdot 3\cdots(2k-3)x^k \Leftarrow (\alpha=\tfrac12)$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}x^k$$

$$R=1 \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\frac12)\cdots(\frac12-k)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}1\cdot 3\cdots(2k-1)x^k \Leftarrow (\alpha=-\tfrac12)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}x^k$$

טור המכפלה

1

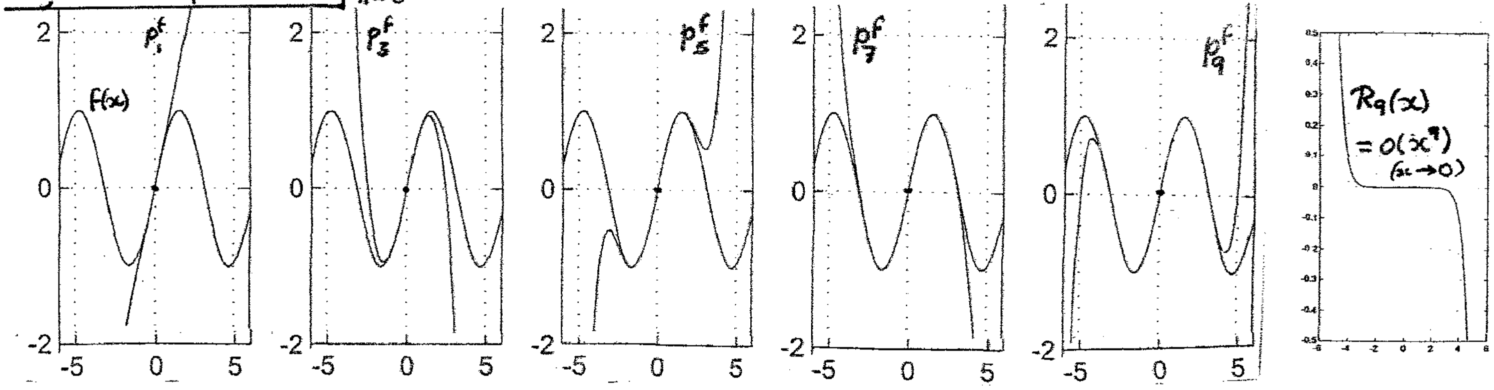
$(R=\infty)$

תמיד $R_{\text{כפל}} \geq \min(R_1,R_2)$ אבל לא תמיד קיים שוויון.

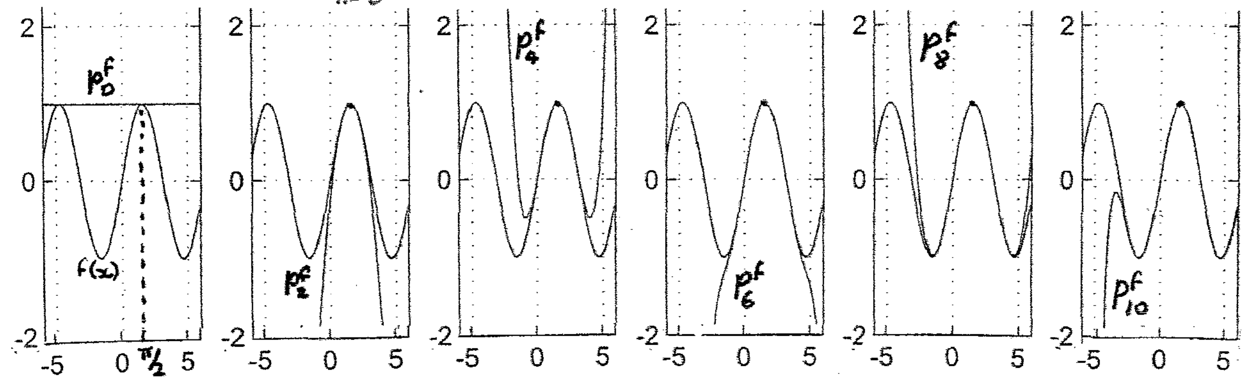
פולינום Taylor = סכום חלקי של טור Taylor

פולינומי Taylor של $f(x)=\sin x$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ טור Taylor : $x_0=0$



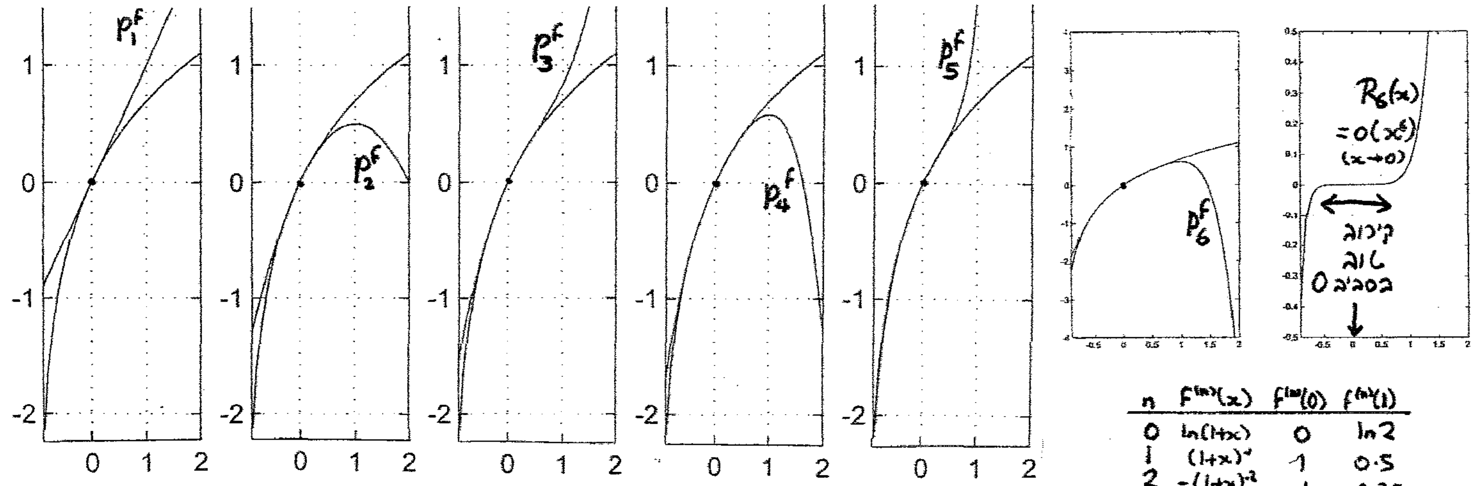
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x-\pi/2)^{2n}$ טור Taylor : $x_0=\pi/2$



n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(\pi/2)$
0	$\sin x$	0	1
1	$\cos x$	1	0
2	$-\sin x$	0	-1
3	$-\cos x$	-1	0
4	$\sin x$	0	1
5	$\cos x$	1	0
6	$-\sin x$	0	-1
7	$-\cos x$	-1	0
8	$\sin x$	0	1
9	$\cos x$	1	0
10	$-\sin x$	0	-1

פולינומי Taylor של $f(x)=\log_e(1+x)$

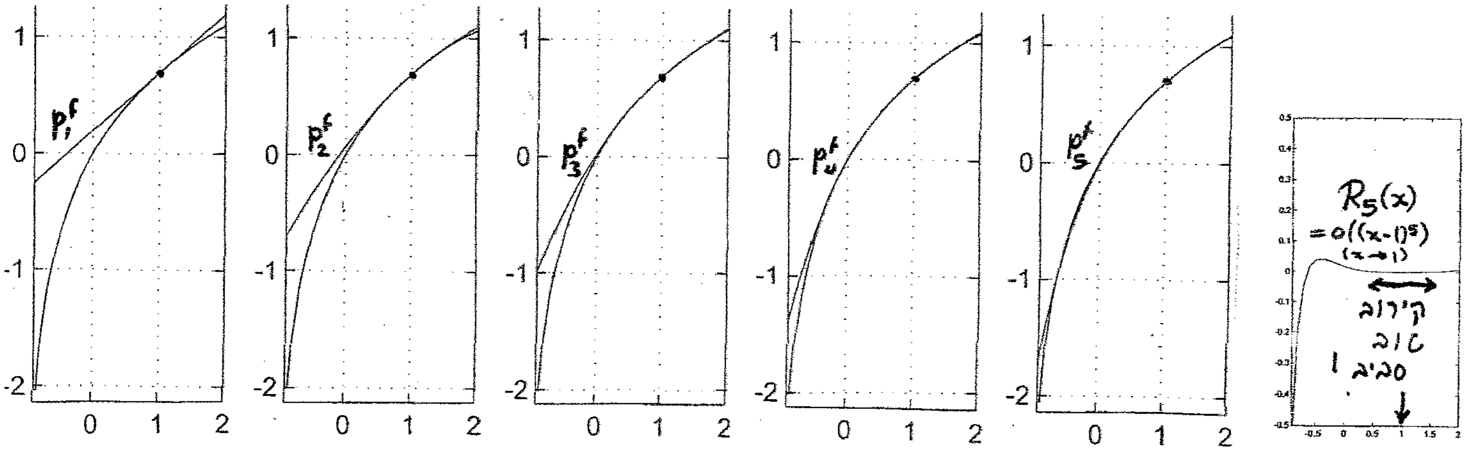
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ טור Taylor : $x_0=0$ (מתכנס כאשר $|x|<1$)



n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$	$f^{(n)}(1)$
0	$\ln(1+x)$	0	$\ln 2$
1	$(1+x)^{-1}$	1	0.5
2	$-(1+x)^{-2}$	-1	-0.25
3	$2(1+x)^{-3}$	2	0.25
4	$-6(1+x)^{-4}$	-6	-0.375
5	$24(1+x)^{-5}$	24	0.75
6	$-120(1+x)^{-6}$	-120	-1.875

$\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\,2^n} (x-1)^n$ טור Taylor : $x_0=1$

(מתכנס כאשר $|x-1|<2$, כלומר $-1<x<3$)



מבוא לשימוש בטורי חזקות לפתרון משוואות דיפרנציאליות לינאריות והומוגניות

משוואה דיפרנציאלית לינארית והומוגנית היא

$$(*) \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

פונקציות של x

אומרים ש- $x = x_0$ נקודה רגילה של $(*)$ אם"ם
ordinary point
היא נקודה רגילה של כל הפונקציות $a_1(x), \dots, a_n(x)$
(הפונקציות אנליטיות בסביבת $x = x_0$)

אומרים ש- $x = x_0$ נקודה סינגולרית רגילה של
regular singular point
$(*)$ אם"ם $a_1(x)(x-x_0), a_2(x)(x-x_0)^2, \dots, a_n(x)(x-x_0)^n$
כולן פונקציות אנליטיות בסביבת $x = x_0$.

דוגמאות

א) $y'' + \frac{x}{(x-1)^2(x+2)} y' + \frac{y}{x(x-1)} = 0$

$x_0 \neq 0, 1, -2$ נקודות רגילות

$x_0 = 0, -2$ נקודות סינגולריות רגילות

$x_0 = 1$ נקודה סינגולרית שאינה רגילה

ב) $(1-x^2)y'' - 5xy' - 3y = 0$

נקודות סינגולריות: $x_0 = 1, -1$

$$\left(y'' \underbrace{- \frac{5x}{1-x^2}}_{a_1} y' \underbrace{- \frac{3}{1-x^2}}_{a_2} y = 0\right)$$

דוגמאות של פיתוח סביב נקודה רגילה: אפשר לפתח כל פתרון של $(*)$ סביב $x = x_0$.

א. $\boxed{(2x+1)y'' + y' + 2y = 0 \quad (*) \text{ סביב } x = 0}$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

$$(*) \Rightarrow \overbrace{2\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-1}}^{2xy''} + \overbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}}^{y''} + \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}}^{y'} + \overbrace{2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}^{2y} = 0$$

מקדם של x^{n-2} $(n \geq 2)$:

$$2a_{n-1}(n-1)(n-2) + a_n n(n-1) + a_{n-1}(n-1) + 2a_{n-2} = 0$$

$$(\#) \quad a_n n(n-1) = -a_{n-1}(n-1)(2n-3) - 2a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$\Leftarrow$ נוסחת נסיגה לינארית והומוגנית $(k=2)$

$\Leftarrow$ {פתרונות} = מרחב וקטורי דו-מימדי

a_0, a_1 נתון $\Leftarrow$ אפשר למצוא a_n לכל n

$(\#)$ $n=2$: $\quad 2a_2 = -a_1 - 2a_0 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_1}{2} - a_0$

$n=3$: $\quad 6a_3 = -6a_2 - 2a_1 \Rightarrow a_3 = -a_2 - \frac{a_1}{3} = \frac{a_1}{6} + a_0$

$n=4$: $\quad 12a_4 = -15a_3 - 2a_2 \Rightarrow a_4 = -\frac{5}{4}a_3 - \frac{a_2}{6} = \left(-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right)a_1 + \left(-\frac{5}{4} + \frac{1}{6}\right)a_0 = -a_1/8 - 13/12\, a_0$

הפתרון הכללי ל-$(*)$ בצורה $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$= a_0 + a_1 x + \left(-\frac{a_1}{2} - a_0\right)x^2 + \left(\frac{a_1}{6} + a_0\right)x^3 + \left(-\frac{a_1}{8} - \frac{13}{12}a_0\right)x^4 + \dots$$

$$= a_0\left(1 - x^2 + x^3 - \frac{13}{12}x^4 + \dots\right) + a_1\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \dots\right)$$

2 פתרונות בלתי תלויים לינארית

ב. $\boxed{y'' - 2(x-1)y' - y = 0 \quad \text{סביב } x = 1}$

$$t = x - 1 \Rightarrow \ddot{y} - 2t\dot{y} - y = 0$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) t^{n-2} - 2t\sum_{n=1}^{\infty} a_n n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

מקדם של t^{n-2} $(n \geq 2)$: $\quad a_n n(n-1) - 2a_{n-2}(n-2) - a_{n-2} = 0$

$$\Rightarrow a_n n(n-1) = (2n-3)a_{n-2}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2n-3}{n(n-1)} a_{n-2}$$

$n=2$: $\quad a_2 = \frac{1}{1\cdot 2} a_0$

$n=3$: $\quad a_3 = \frac{3}{2\cdot 3} a_1$

$n=4$: $\quad a_4 = \frac{5}{3\cdot 4} a_2 = \frac{1\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} a_0$

$n=5$: $\quad a_5 = \frac{7}{4\cdot 5} a_3 = \frac{3\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} a_1$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} a_{2m} &= \frac{1\cdot 5\cdot \ldots \cdot(4m-3)}{(2m)!} a_0 \\ a_{2m+1} &= \frac{3\cdot 7\cdot \ldots \cdot(4m-1)}{(2m+1)!} a_1 \end{aligned}\right\} (m \geq 0)$$

פתרון כללי ל-$(*)$ הוא $y(x) = Ay_1 + By_2$

$$y_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1\cdot 5 \cdots (4m-3)}{(2m)!}(x-1)^{2m} = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{5}{24}(x-1)^4 + \dots$$

$$y_2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3\cdot 7 \cdots (4m-1)}{(2m+1)!}(x-1)^{2m+1} = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \frac{7}{40}(x-1)^5 + \dots$$

דוגמאות של פיתוח סביב נקודה סינגולרית רגילה [חומר רשות]

$2x^2y''+xy'-(x+1)y=0$ סביב $x=0$

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s} \quad \left(=x^s\cdot\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right) \Rightarrow 2x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+s)(n+s-1)\cdot x^{n+s-2}+x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n+s)\cdot x^{n+s-1}-(x+1)\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+s}=0$$

מקדם של x^{n+s}:

$$(n\geq 1)\quad 2a_n(n+s)(n+s-1)+a_n(n+s)-a_{n-1}-a_n=0 \quad ①$$

$$(n=0)\quad 2a_0\, s(s-1)+a_0\cdot s-a_0=0 \quad ②$$

$$① \Rightarrow a_n\left[(n+s)(2n+2s-1)-1\right]=a_{n-1} \quad (n\geq 1)$$

$$② \Rightarrow a_0\left[2s^2-2s+s-1\right]=0 \Rightarrow$$ ($a_0=0$ או $2s^2-s-1=0$ או)

$(2s+1)(s-1)=0$

$\Downarrow ①$

$a_n=0$

לכל n

(פתרון $y\equiv 0$)

exponents

נקראים מעריכים של הנקודה $x=0$ $\rightarrow$ $s=-\frac{1}{2},\ 1 \Leftarrow (2s+1)(s-1)=0$. לקבלת פתרון לא טריוויאלי, נדרוש

לכל אחד מקבלים מרחב חד-מימדי

של פתרונות של נוסחת הנסיגה ①

$$(k=1):\quad a_n=\frac{a_{n-1}}{(n+s)(2n+2s-1)-1}=\frac{a_{n-1}}{(2n+2s+1)(n+s-1)}$$

$$s=-\tfrac{1}{2}:\quad a_n=\frac{a_{n-1}}{2n(n-\frac{3}{2})}=\frac{a_{n-1}}{n(2n-3)} \Rightarrow a_n=\frac{a_0}{n!\cdot[(2n-3)(2n-5)\cdots 1(-1)]}$$

$$s=1:\quad a_n=\frac{a_{n-1}}{(2n+3)n} \Rightarrow a_n=\frac{a_0}{[(2n+3)(2n+1)\cdots 5]\ n!}$$

הפתרון הכללי ל- ⊛ הוא Ay_1+By_2 כאשר

$$y_1(x)=x^{-1/2}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!\,(2n-3)(2n-5)\cdots 1}\right)=x^{-1/2}\left(1-x-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-2}x^n}{n(n-1)(2n-3)!}\right)$$

$$y_2(x)=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!\,\underbrace{(2n+3)(2n+1)\cdots 5}}\right)=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3\cdot 2^{n+1}(n+1)}{(2n+3)!}x^n$$

$$(2n+3)(2n+1)\cdots 5=\frac{(2n+3)!}{(2n+2)\cdots 6\cdot 4\cdot 3\cdot 2}=\frac{(2n+3)!}{2^{n+1}(n+1)!\cdot 3}$$

<u>הערות</u>: (א) למשוואה דיפרנציאלית $2x^2y''+xy'-y=0$ קיים פתרון $y=x^{\lambda}$

כאשר λ שורש של $2\lambda(\lambda-1)+\lambda-1=0$ $(\lambda=-\frac{1}{2},1)$

(ב) כאשר יש חזקות שהם שלמים או עם הפרש ב $\mathbb{Z}$, השיטה מעט שונה.