# מרחבים מטריים כלליים

ראינו שלצורך הגדרת מושג ההתכנסות, נצרכנו להגדרת מושג הסביבה (מושג מטופולוגיה) נדרש להגדרתו מושג של מרחק.

**מרחב מטרי** (metric space) הוא זוג $(X, d)$

כאשר $X$ = מרחב (קבוצה של "נקודות")

ו- $d$ היא פונקציה $X \times X \to \mathbb{R}$ ("מרחק" distance/metric) ("מטריקה")

כך ש-

א. (חיוביות) $d(x,y) \geq 0$ לכל $x,y \in X$

ב. (רפלקסיביות) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ג. (סימטריות) $d(x,y) = d(y,x)$ לכל $x,y \in X$

ד. (אי שוויון המשולש) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall x,y,z \in X$

למרחב מטרי $(X,d)$, נגדיר

**כדור** (פתוח) $B_a(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < a\}$

$a$ – רדיוס של הכדור; $x$ – מרכז של הכדור

ball

(סביבה $\equiv$ כדור פתוח)

**הגדרה**: סדרה $(x_n)$ במרחב מטרי $(X,d)$ נקראת סדרה מתכנסת אם"ם קיימת נקודה $x \in X$ כך ש- $x_n \to x$

כ"א $d(x_n, x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (מספר ממשי).

$(x_n)$ נקראת סדרת Cauchy אם"ם $d(x_m, x_n) \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$

אומרים שמרחב מטרי $(X,d)$ הוא מרחב מטרי שלם (complete metric space) אם"ם כל סדרת Cauchy ב- $(X,d)$ היא סדרה מתכנסת.

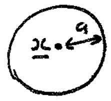
## דוגמאות

א. $(\mathbb{R}, d)$ כאשר $d(x,y) = |x-y|$ (מטריקה רגילה ב- $\mathbb{R}$)

$B_a(x) = (x-a, x+a)$ קטע

ב. $(\mathbb{R}^n, d_2)$ כאשר $d_2(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$

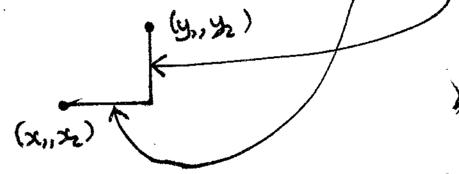
(אורך של $\underline{y}-\underline{x}$ = מרחק בין הנקודות)

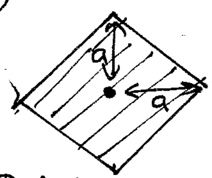



$B_a(\underline{x}) =$ (כדור רגיל ברדיוס $a$ מרכזו ב- $\underline{x}$)

ג. $(\mathbb{R}^2, d_1)$ כאשר

$d_1(\underline{x},\underline{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ (taxicab metric)




$B_a(\underline{x})$

ד. $C([0,1]) = X =$ (פונקציות רציפות $[0,1] \to \mathbb{R}$)

$d_\infty(f,g) = \max_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$

ה. $X =$ (סדרות חסומות $(x_n)$)

$d_\infty(\underline{x},\underline{y}) = \sup_n |x_n - y_n|$

$\bar{B}_\varepsilon(\underline{x})$ (כדור סגור) $=$ {סדרות $(y_n)$ כך שההפרשים $\forall n \ |x_n - y_n| \leq \varepsilon$}

## דוגמאות של שלמות

א. $(\mathbb{R}^n, d_2)$ מרחב מטרי שלם.

ב. $C^0([a,b])$ מרחב מטרי שלם

ג. $(\mathbb{Q}, d)$ לא מרחב מטרי שלם

(כאשר $d(x,y) = |x-y|$)

ד. $C'([a,b])$ לא מרחב מטרי שלם

(פונקציות גזירות עם נגזרת רציפה $[a,b] \to \mathbb{R}$)

# סדרות של פונקציות

## סדרות של פונקציות והתכנסות

סדרה של פונקציות: $(f_n)$ על קטע $[a,b]$

[ $f_n(x)$ מוגדרת על $x\in[a,b]$, לכל $n$ ]

קיימות פונקציות: $f_1, f_2, f_3, \dots$

$\leadsto$ לכל $x$ קבוע, קיימים מספרים: $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$

## התכנסות נקודתית

$f_n \to f$ נקודתית אם"ם $f_n(x) \xrightarrow{\text{סדרה}} f(x)$

לכל $x\in[a,b]$

## מרחק בין פונקציות

$f,g$ פונקציות על $[a,b]$

נגדיר:

$$d_1(f,g) \equiv \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

$$d_\infty(f,g) \equiv \sup_{a\le x\le b} |f(x)-g(x)|$$

## הגדרה של התכנסות של סדרה של מספרים

$(a_n \to a)$ אומרים $(\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \underbrace{\forall n>N}_{\text{לכל } n \text{ מספיק גדול}}: \underbrace{|a_n-a|}_{\text{מרחק}}<\varepsilon)$

אומרים $|a_n-a|\to 0$ כאשר $n\to\infty$

## הגדרה של התכנסות במ"ש ובממוצע

$f_n \xrightarrow[\text{במ"ש}]{} f$ אומרים $d_\infty(f_n,f)\to 0$ כאשר $n\to\infty$

$f_n \xrightarrow[\text{בממוצע}]{} f$ אומרים $d_1(f_n,f)\to 0$ כאשר $n\to\infty$

---

$\left(f_n \xrightarrow[\text{במ"ש}]{} f\right) \Rightarrow \left(f_n \xrightarrow{\text{נקודתית}} f\right)$

$|f_n(x)-f(x)| \le d_\infty(f_n,f) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

קטע מסוים $\Rightarrow \left(f_n \xrightarrow{\text{בממוצע}} f\right)$

$d_1(f_n,f)$

$= \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx$

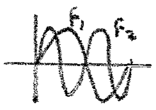
$\le \int_a^b \underline{d_\infty(f_n,f)}\,dx$ מספר לא תלוי ב-$x$

$= (b-a)\,d_\infty(f_n,f) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

## דוגמאות

א) $f_n(x)=x^n$ על $[0,1]$

ב) $f_n(x)=\sin nx$ על $[0,2\pi]$



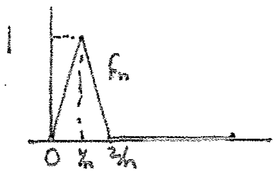

---

א) $f_n(x)=x^n$ על $[0,1]$

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{נקודתית}} f$

ב)




$f_n \xrightarrow{\text{נקודתית}} 0$

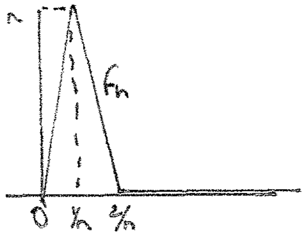
$f_n \not\xrightarrow{\text{במ"ש}} 0$

$f_n \xrightarrow{\text{בממוצע}} 0$

$d_\infty(f_n,0)=1$

$d_1(f_n,0)=1/n$

ג)




$f_n \xrightarrow{\text{נקודתית}} 0$

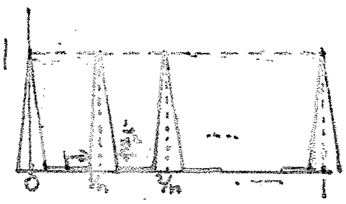
$f_n \not\xrightarrow{\text{במ"ש}} 0$

$f_n \not\xrightarrow{\text{בממוצע}} 0$

$d_\infty(f_n,0)=n$

$d_1(f_n,0)=1$

ד)




$f_n \not\xrightarrow{\text{נקודתית}} 0$

$f_n \not\xrightarrow{\text{במ"ש}} 0$

$f_n \xrightarrow{\text{בממוצע}} 0$

$d_\infty(f_n,0)=1$

$d_1(f_n,0)=1/n$

$$f_n(1/2)=\begin{cases}1 & n \text{ זוגי}\\ 0 & n \text{ אי זוגי}\end{cases}$$

## התכנסות במ"ש

$f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

אם"ם $\left(d_\infty(f_n,f) \xrightarrow{n\to\infty} 0\right)$

אם"ם $\left(\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N: d_\infty(f_n,f)<\varepsilon\right)$

אם"ם $\left(\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ \forall x: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\right)$

$N=N(\varepsilon)$ (לא תלוי ב-x)

---

$f_n \xrightarrow{\text{נקודתית}} f$

אם"ם (לכל x, $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$)

אם"ם $\left(\forall \varepsilon>0\ \forall x\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\right)$

$N=N(\varepsilon,x)$

---

**הגדרה** $(f_n)$ נקראת סדרה מתכנסת במ"ש
אם"ם קיימת פונקציה f כך ש-
$f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

---

**קרי' כיון קושי** $(f_n)$ מתכנסת במ"ש
אם"ם $\left(\forall \varepsilon\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n>N\ \forall x: |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon\right)$

(כלומר: אם"ם $d_\infty(f_m,f_n) \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$)

**הוכחה** ($\Leftarrow$) נניח ש-$(f_n)$ מתכנסת במ"ש ל-f

לכן לכל $\varepsilon>0$,

$\left(\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ \forall x: |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon/2\right)$

$\Leftarrow$ $\forall x, \forall m,n>N: |f_m(x)-f_n(x)|$
$\le |f_m(x)-f(x)| + |f(x)-f_n(x)|$
$< \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$

$d_\infty(f_n,f)\to 0$
$\Downarrow$
$\left(\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N: d_\infty(f_n,f)<\frac{\varepsilon}{2}\right)$
$\Downarrow$
$d_\infty(f_m,f_n)$
$\le d_\infty(f_m,f)+d_\infty(f,f_n)$
$< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

($\Rightarrow$) נניח ש- $\left(\forall\varepsilon\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n>N\ \forall x: |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon\right)$ (*)

לכן לכל x, $(f_n(x))$ סדרת קושי

$\Leftarrow$ $(f_n(x))$ סדרה מתכנסת, נניח ל-$f(x)$

אבל $\left(\forall m,n>N: |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon\right)$

$\xLeftarrow{m\to\infty}$ $\left(\forall n>N: |f(x)-f_n(x)|\le\varepsilon\right)$

$\Leftarrow$ $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

$\square$

---

## דוגמאות

א) $f_n(x)=\sqrt{x^2+1/n}$ על $\mathbb{R}$

$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\sqrt{x^2}=|x|$

$d_\infty(f_n,f)=\sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\sqrt{x^2+1/n}-|x|\right)$

$= 1/\sqrt{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $(x=0)$

$\sqrt{a+b}\le\sqrt{a}+\sqrt{b}$, ל- $0\le a,b$

לכן $(f_n)$ מתכנסת ל-f במ"ש

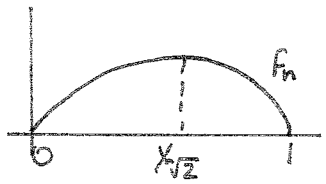
---

ב) $f_n(x)=x^n-x^{2n}$ על $[0,1]$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$, לכל x

$d_\infty(f_n,0)=\max_{0\le x\le 1}(x^n-x^{2n})$

$\underset{(x=1/\sqrt[n]{2})}{=} 1/2-1/4=1/4$



$f_n'(x)=nx^{n-1}-2nx^{2n-1}$

$=2nx^{n-1}(1/2-x^n) \begin{cases} >0 & x<\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \\ <0 & x>\frac{1}{\sqrt[n]{2}} \end{cases}$

לכן $(f_n)$ לא סדרה מתכנסת במ"ש

---

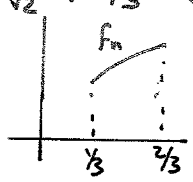
ג) $f_n(x)=x^n-x^{2n}$ על $[\frac13,\frac23]$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$, לכל x

$d_\infty(f_n,0)=\max_{1/3\le x\le 2/3}(x^n-x^{2n})$

$\underset{(x=2/3)}{=} (2/3)^n-(2/3)^{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

(n מספיק גדול $\Leftarrow$ $1/\sqrt[n]{2} > 2/3$)



לכן $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} 0$

## רציפות של הגבול

**משפט** $f_n$ רציפה לכל $n$, $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ $\Leftarrow$ $f$ רציפה

**הוכחה** נניח ש- $\varepsilon>0$ ו- $y \in$ (תחום ההגדרה של הפונקציות)

צ"ל ש- $f$ רציפה ב- $y$

$$\left(f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f\right) \Rightarrow \left(\exists N\ \forall n\geq N\ \forall x : |f_n(x)-f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3}\right)$$

$$\left(f_{N+1} \text{ רציפה ב- } y\right) \Rightarrow \left(\exists \delta>0\ \forall x\in(y-\delta,y+\delta): |f_{N+1}(y)-f_{N+1}(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3}\right)$$

לכן: לכל $x$ כך ש- $|x-y|<\delta$ ($x\in(y-\delta,y+\delta)$)

$$|f(y)-f(x)| \leq |f(y)-f_{N+1}(y)| + |f_{N+1}(y)-f_{N+1}(x)| + |f_{N+1}(x)-f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3}+\tfrac{\varepsilon}{3}+\tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

□

התכנסות במ"ש $\Rightarrow$ התכנסות נקודתית

התכנסות נקודתית $\not\Rightarrow$ התכנסות במ"ש

התכנסות נקודתית $\not\Rightarrow$ התכנסות בממוצע, התכנסות בממוצע $\not\Rightarrow$ התכנסות נקודתית

התכנסות במ"ש $\Rightarrow$ התכנסות בממוצע, התכנסות בממוצע $\not\Rightarrow$ התכנסות במ"ש

**הערה**
1. $d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f)$ (סימטריה)
2. $d_\infty(f,g) \geq 0$
3. $d_\infty(f,g) = 0 \Rightarrow f=g$
4. $d_\infty(f,h) \leq d_\infty(f,g)+d_\infty(g,h)$ (אי-שיוון המשולש)

**הערה**
1. $d_1(f,g) = d_1(g,f)$
2. $d_1(f,g) \geq 0$
3. $d_1(f,h) \leq d_1(f,g)+d_1(g,h)$

אבל $d_1(f,g)=0 \Rightarrow f(x)=g(x)$ כמעט לכל $x$

---

**דוגמא ד)** $f_n(x) = x^n$ על $[0,1]$

האם $(f_n)$ מתכנסת במ"ש?

אם כן, קיימת פונקציה $f$ כך ש- $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

* $f_n$ רציפה לכל $n$ $\Leftarrow$ $f$ רציפה
* $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ $\Leftarrow$ $f_n \xrightarrow{\text{נקודתית}} f$

לכן
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & 0\leq x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

אבל הפונקציה $f$ לא רציפה.

סתירה!

$\Downarrow$

$(f_n)$ לא סדרת פונקציות מתכנסת במ"ש

---

**דוגמאות**

דף 7 ב): $d_1(f_n,0) = \int_0^1 x^n - x^{2n}\,dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

דף 8 ב): $d_1(f_n,0) = \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

לכן יש התכנסות במ"ש בשני מקרים

אבל ב-8ד): $f_n \xrightarrow{\text{נקודתית}} f$

$f_n \xrightarrow{\text{בממוצע}} 0$

$f_n \xrightarrow{\text{בממוצע}} f$

שני גבולות לאותו סדרה!

(הם שונות רק מנקודה אחד) $f,0$ ; $x=1$

# טורי פונקציות

נקרא ל- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור של פונקציות

תחום ההתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ הוא התחום $\{x \mid \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ טור מתכנס}\}$

סכום חלקי: $F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

סכום של הטור: $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

## התכנסות במ"ש

הגדרה: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ נקרא טור מתכנס במ"ש (בתחום) אם"ם $(F_n(x))$ סדרה מתכנסת במ"ש

קריטריון קושי: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש בתחום $I$ אם"ם $\forall \varepsilon>0 \ \exists N \ \forall m>n>N \ \forall x\in I$ $\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon$

### מבחן Weierstrass

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס

$|f_n(x)| \le a_n$ לכל $n$, $x\in I$

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור מתכנס במ"ש על $I$

### מבחן Dirichlet

$f_n(x) = a_n(x)\cdot b_n(x)$

$\{a_n(x)\}$ סדרה מונוטונית (לכל $x$)

$a_n(x) \to 0$ במ"ש על $I$

$|B_n(x)| < M$ לכל $n$, $x\in I$

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור מתכנס במ"ש על $I$

### מבחן Abel

$f_n(x) = a_n(x)\cdot b_n(x)$

$\{a_n(x)\}$ סדרה מונוטונית לכל $x$

$|a_n(x)| < M$ לכל $n$, $x\in I$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ טור מתכנס במ"ש על $I$

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ טור מתכנס במ"ש על $I$

## דוגמאות

א) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\quad |x|<1$

טור, סכום, תחום ההתכנסות

ב) $f_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1-x}{1+2x}\right)^n$

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1-x}{1+2x} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1-x}{1+2x}$$

לכן יש התכנסות כאשר $\left|\frac{1-x}{1+2x}\right|<1$

(או $x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$)

כאשר $\left|\frac{1-x}{1+2x}\right|>1$, יש התבדרות

כאשר $\left|\frac{1-x}{1+2x}\right|=1$, צריך לבדוק

$x=-2 \Rightarrow f_n(x) = (-1)^n/n \Rightarrow$ טור מתכנס (בתנאי)

$x=0 \Rightarrow f_n(x) = 1/n \Rightarrow$ טור מתבדר

תחום ההתכנסות הוא: $(-\infty,-2]\cup(0,\infty)$

ג) $f_n(x) = x^n \sin\frac{x}{2^n}$

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = x\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^{n+1}}}{\sin\frac{x}{2^n}} = \frac{x}{2\cos\frac{x}{2^{n+1}}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{x}{2}$$

לכן אם $|x|<2$, יש התכנסות

אם $|x|>2$, יש התבדרות

$x=2 \Rightarrow f_n(x) = 2^n \sin\frac{1}{2^{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 2$

$x=-2 \Rightarrow f_n(x) = (-2)^n \sin\left(-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

לכן אם $|x|=2 \Leftarrow f_n(x)\not\to 0 \Leftarrow$ התבדרות

תחום ההתכנסות הוא $(-2,2)$

ד) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ (טור מספרים)

$\frac{1}{n}\to 0$ מונוטונית

$\sum_{n=1}^{N}\sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(N+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$

חסומה לכל $2n\pi \neq x$

$\xLeftarrow{\text{Dirichlet}}$ $\boxed{\sum f_n(x) \text{ מתכנס לכל } x}$

$$\left|\sum_{n=p}^{2p}\frac{\sin nx}{n}\right| \overset{nx\in(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})}{\ge} \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=p}^{2p}\frac{1}{n} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{p+1}{2p} > \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$(x=\pi/3n)$

$\boxed{\text{ההתכנסות לא במ"ש}} \xLeftarrow{\text{קריטריון קושי}}$

## רציפות של הסכום

$$\left.\begin{cases} f_n \text{ רציפה} \\ \sum f_n \text{ מתכנס במ"ש} \end{cases}\right\} \Rightarrow \sum f_n \text{ רציפה}$$

**הוכחה**

$$\begin{cases} f_n \text{ רציפה} \Rightarrow F_n \text{ רציפה} \\ \sum f_n \text{ מתכנס במ"ש} \Rightarrow \text{קיים } F \text{ כך ש-} \\ F_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} F \end{cases} \Rightarrow F \text{ רציפה}$$

**משפט דיני**

$$\left.\begin{cases} f_n \text{ רציפה על } [a,b] \\ f_n(x) \geq 0 \text{ לכל } x \\ \sum f_n \text{ מתכנס ל-} F \\ F \text{ רציפה על } [a,b] \end{cases}\right\} \Rightarrow \sum f_n \text{ מתכנס במ"ש על } [a,b]$$

---

## גזירה ואינטגרציה איבר-איבר

**טענה**

$$\left.\begin{cases} f_n \text{ רציפה לכל } n \\ f_n \to f \text{ במ"ש} \\ \text{על } [a,b] \end{cases}\right\} \Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

$\int_a^x f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} \int_a^x f$ ו- על $[a,b]$

**הוכחה**

$$\left|\int_a^x f_n(y)\,dy - \int_a^x f(y)\,dy\right| \leq \int_a^x |f_n(y)-f(y)|\,dy$$

$$\leq (x-a)\, d_\infty(f_n, f)$$

$$\leq (b-a)\, d_\infty(f_n, f) < \varepsilon$$

לכל $n$ מספיק גדול (לא תלוי ב- $x$) $\square$

---

**מסקנה**

$$\left.\begin{cases} f_n \text{ רציפה ב- } [a,b] \\ \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ מתכנס במ"ש ל-} F \end{cases}\right\} \Rightarrow \int_a^b F = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n\right)$$

**משפט** (יותר חזק)

$$\left.\begin{cases} f_n \text{ אינטגרבילית ב- } [a,b] \\ \sum f_n \text{ מתכנס במ"ש ל-} F \end{cases}\right\} \Rightarrow F \text{ אינטגרבילית ו- } \int_a^b F = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_n\right)$$

---

**טענה**

$$\left.\begin{cases} f_n \text{ גזירה על } [a,b] \\ f_n' \xrightarrow{\text{במ"ש}} g \text{ על } [a,b] \\ \text{קיים } x_0 \in [a,b] \text{ כך ש- } (f_n(x_0)) \text{ מתכנסת} \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{הסדרה } (f_n) \text{ מתכנסת במ"ש לפונקציה } F \text{ ו- } F' = g$$

**הוכחה**

$$f_n' \xrightarrow{\text{במ"ש}} g \Rightarrow f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f_n' \xrightarrow{\text{במ"ש}} \int_{x_0}^x g$$

$\Rightarrow$ קיימת פונקציה $F$ כך ש- $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} F$

ו- $F(x) - \text{מספר קבוע} = \int_{x_0}^x g$

$\Rightarrow F' = g$ $\square$

---

**משפט**

$$\left.\begin{cases} f_n \text{ גזירה ב- } [a,b] \\ \sum f_n' \xrightarrow{\text{במ"ש}} g \text{ ו- } \sum f_n \text{ מתכנס בנקודה אחת לפחות} \end{cases}\right\} \Rightarrow \sum f_n \text{ מתכנס במ"ש לפי } F \text{ ו- } F' = g$$

---

**דוגמאות**

א) $f_n(x) = (x + 1/n^2)^n$

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{\left(x + \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}}{(x + 1/n^2)^n}$$

$$= \left(x + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \cdot \left(\frac{x + \frac{1}{(n+1)^2}}{x + 1/n^2}\right)^n$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} x$$

לכן: $\begin{cases} |x|<1 \Rightarrow \text{מתכנסת} \\ |x|>1 \Rightarrow \text{מתבדרת} \end{cases}$

$$\left.\begin{cases} x=1: & f_n(x) = (1+1/n^2)^n \to 1 \\ x=-1: & f_n(x) = (-1+1/n^2)^n \not\to 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{מתבדרת}$$

<u>לכן תחום ההתכנסות הוא $(-1,1)$</u>

נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ כאשר $|x|<1$

$f_n$ רציפה לכל $x$ $\Leftarrow$ צריך לבדוק על התכנסות במ"ש

<u>קטע $(-1,1)$</u>:

$$\sum_{n=p}^{2p} f_n(x) = \sum_{n=p}^{2p} (x + 1/n^2)^n \geq \sum_{n=p}^{2p} 1 = p+1$$

$(x = 1 - 1/4p^2)$

$$\overset{\text{קריטריון קושי}}{\Leftarrow}\ f_n \overset{\text{במ"ש}}{\not\to} f \text{ על } (-1,1)$$

<u>קטע $[0,1/2]$</u>:

$$|(x + 1/n^2)^n| \leq (3/4)^n$$

לכל $2 \leq n$

$$\text{לכן } \left.\begin{cases} |f_n(x)| \leq (3/4)^n \\ \sum (3/4)^n \text{ מתכנס} \end{cases}\right\} \overset{\text{Weierstrass}}{\Rightarrow} \sum f_n \text{ מתכנס במ"ש על } [0,1/2]$$

$\Rightarrow f$ רציפה על $[0,1/2]$

אותה הוכחה לכל קטע סגור בתוך $(-1,1)$

$\Rightarrow f$ <u>רציפה על $(-1,1)$</u>

---

ב) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2}$ : האם ניתן לבצע גזירה איבר איבר של $\sum f_n$

$$f_n'(x) = \frac{n^2-x^2}{(n^2+x^2)^2}$$

$$\left.\begin{cases} |f_n'(x)| \leq \dfrac{n^2+x^2}{(n^2+x^2)^2} \leq \dfrac{1}{n^2} \Leftarrow \\ \sum_n \dfrac{1}{n^2} \text{ מתכנס} \end{cases}\right\} \Rightarrow \sum f_n' \text{ מתכנס במ"ש}$$

$\sum_n f_n(1)$ מתכנס

$\Rightarrow$ $\sum f_n$ מתכנס במ"ש לפונקציה $f$

ו- $f$ גזירה, $\left(\sum f_n\right)' = \left(\sum f_n'\right)$

דוגמה 1 : $f_n(x)=x^n$ $\qquad F_m(x)=\sum_{n=1}^{m} x^n = \frac{x-x^{m+1}}{1-x}$ $(x\neq 1)$

$F_m(x) \xrightarrow[\text{נקודתית}]{m\to\infty} \frac{x}{1-x} = F(x)$ $\quad |x|<1$

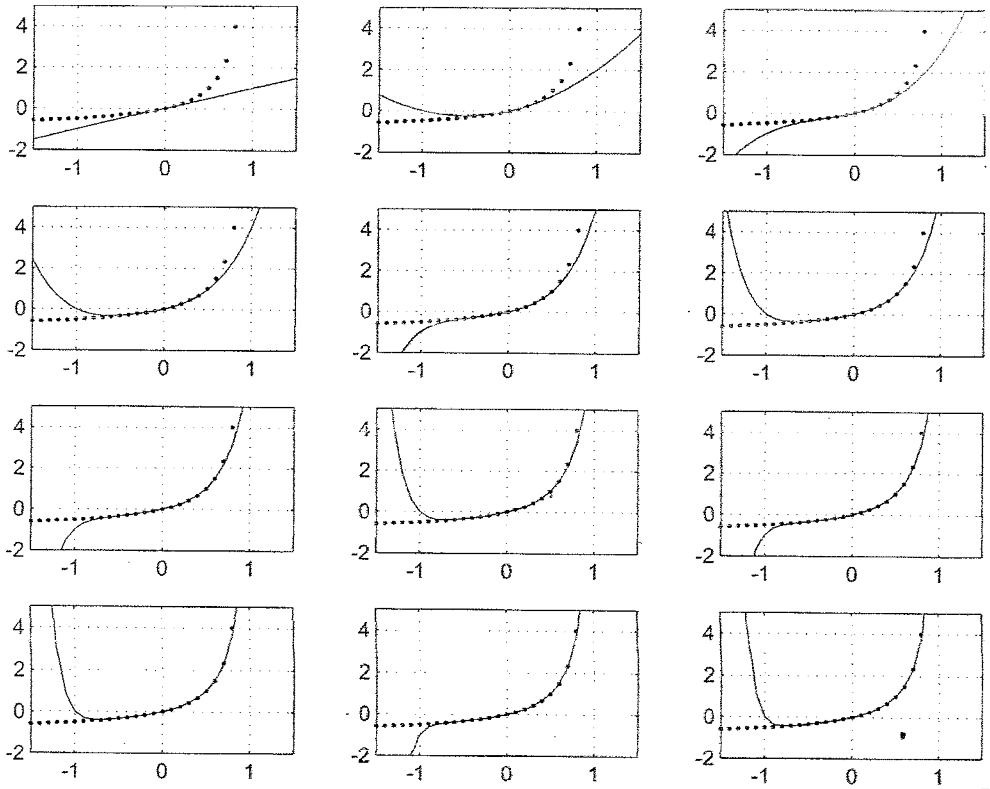
$F_m \xrightarrow{\text{נקודתית}} F$ , על $(-1,1)$

$F_m \not\xrightarrow{\text{במ"ש}} F$ , על $(-1,1)$

יש לפונקציה F נקודה סינגולרית ב- $x=1$ אבל לא ב- $x=-1$.

F מוגדרת לכל $x\neq 1$

F רציפה בכל $x\neq 1$



גרפים של $F_1,\dots,F_{12}$ ביחד עם F

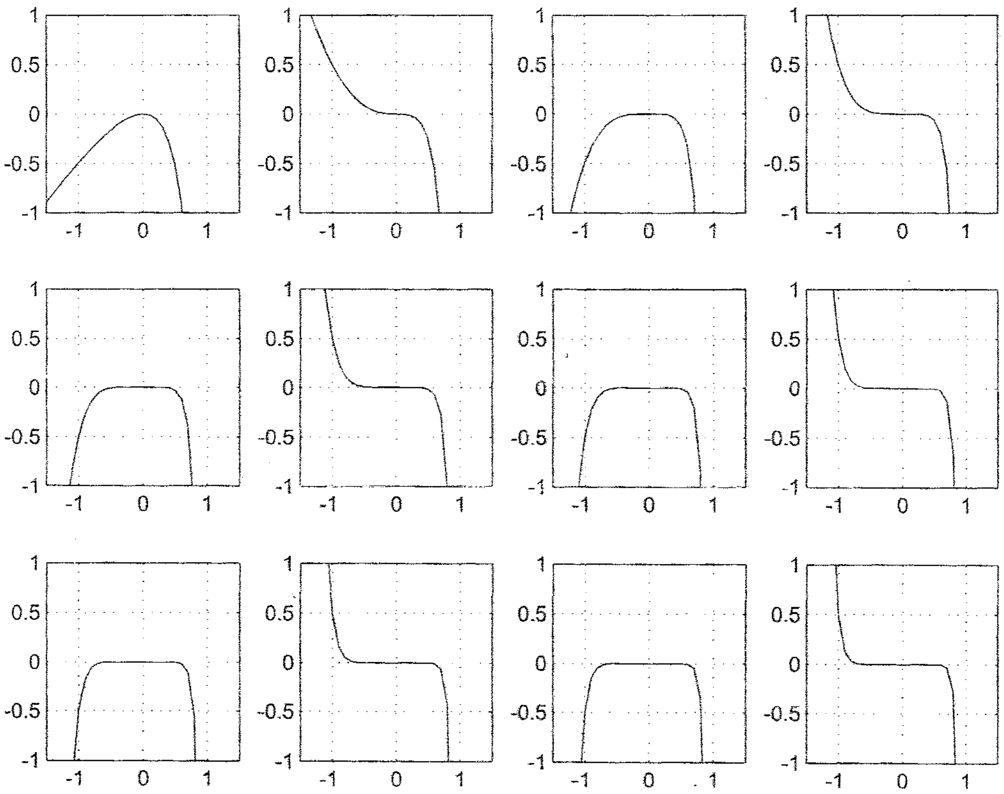
$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x} \qquad |x|<1 \qquad (\text{טור Taylor})}$$

$h_n(x)=F_n(x)-F(x)$

רואים ש- $h_n$ קרוב ל-0 על קטע יותר ויותר גדול, כאשר n עולה (אבל רק בתחום $(-1,1)$)

$F_m \xrightarrow{\text{במ"ש}} F$, על $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

ועל כל קטע $[a,b]$ כאשר $-1<a<b<1$



גרפים של $h_1,\dots,h_{12}$

## דוגמה 2 $\quad f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$

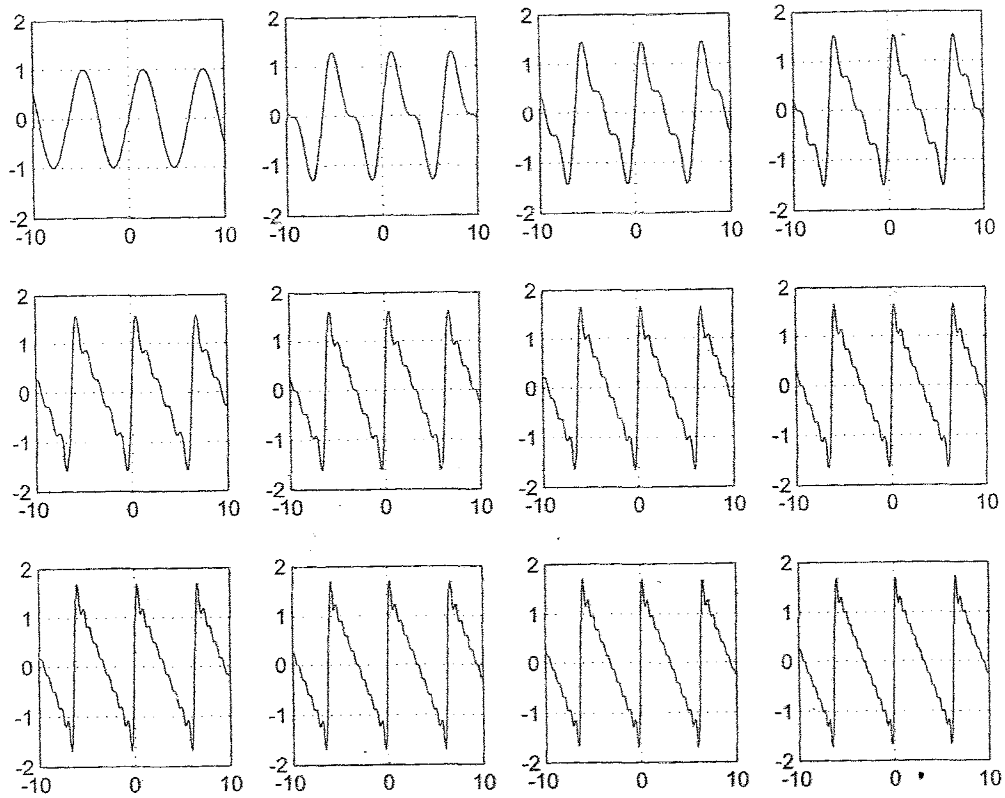
סכומים חלקיים

$$F_m(x)=\sum_{n=1}^{m}\frac{\sin nx}{n}$$

$$F(x)=\begin{cases}0 & x=2k\pi\\ \frac{\pi-x}{2}+\pi\left\lfloor\frac{x}{2\pi}\right\rfloor & (x\neq 2k\pi)\end{cases}$$

(פונקציה מחזורית בעלת מחזור $2\pi$, שווה ל- $\frac{\pi-x}{2}$ על $[0,2\pi)$)

$$F_n(x)\xrightarrow{\text{נקודתית}}F(x)$$



גרפים של $F_1,\dots,F_{12}$

F לא רציפה ב- $x=2k\pi$

F מוגדרת על כל $\mathbb{R}$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}\qquad 0<x<2\pi\quad (\text{טור Fourier})}$$

תופעת Gibbs

(Gibbs phenomenon)

$$h_n(x)=F_n(x)-F(x)$$

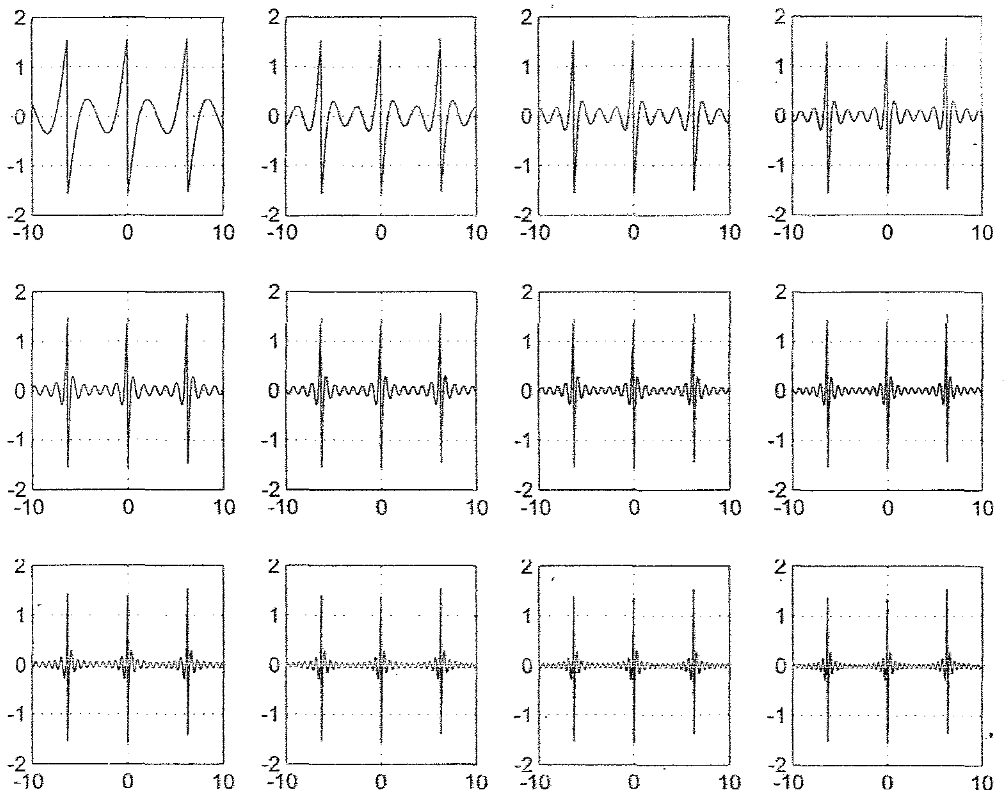
$F_n\xrightarrow{\text{נקודתית}}F$ , על $\mathbb{R}$

$F_n\not\xrightarrow{\text{במ"ש}}F$ , על $\mathbb{R}$

$F_n\not\xrightarrow{\text{במ"ש}}F$ , על $(0,2\pi)$

$F_n\xrightarrow{\text{במ"ש}}F$ , על $[a,b]$

$0<a<b<2\pi$



גרפים של $h_1,\dots,h_{12}$

## דוגמא 3:  $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$

סכומים חלקיים

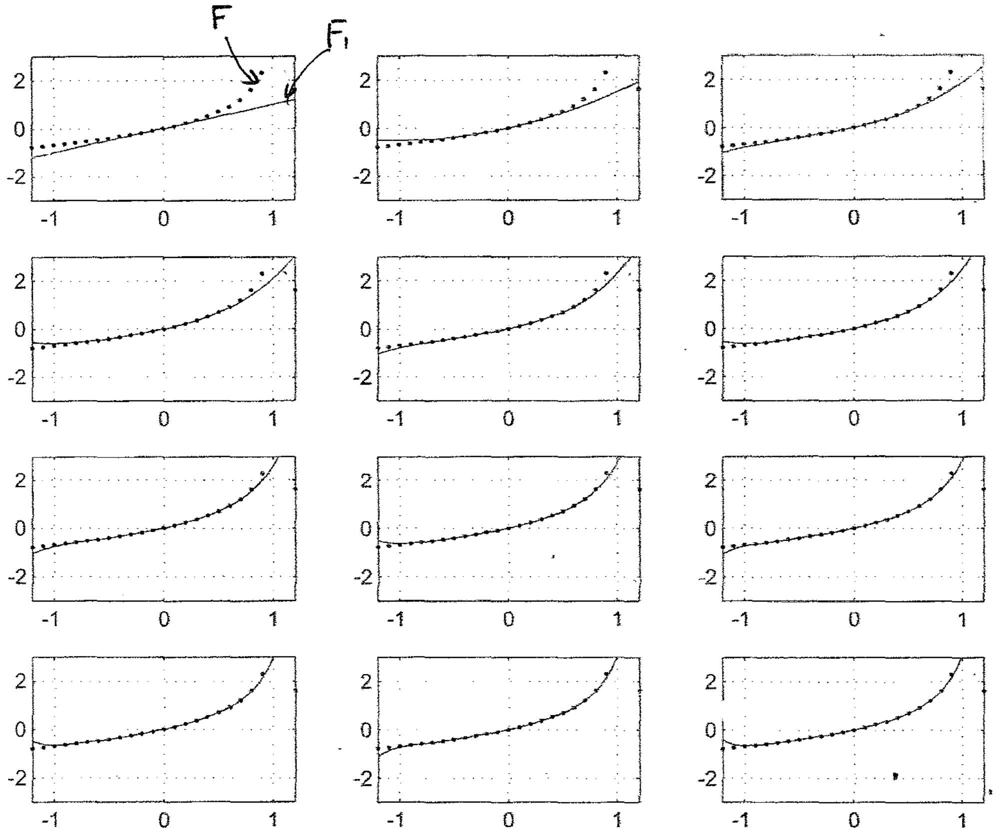
$$F_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n}$$

$$F(x) = -\ln(1-x)$$

$$F_m \xrightarrow{\text{נק'}} F \quad (-1 \le x < 1)$$

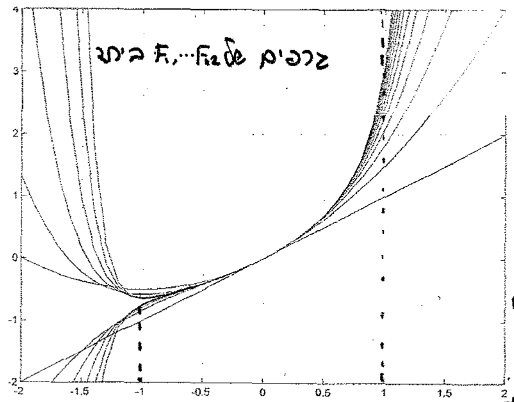
F מוגדרת ל- $x<1$

(F רציפה בכל $x<1$)




גרפים של $F_1, \dots, F_{12}$ עם F

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \quad -1 \le x < 1 \ (\text{Taylor טור})}$$



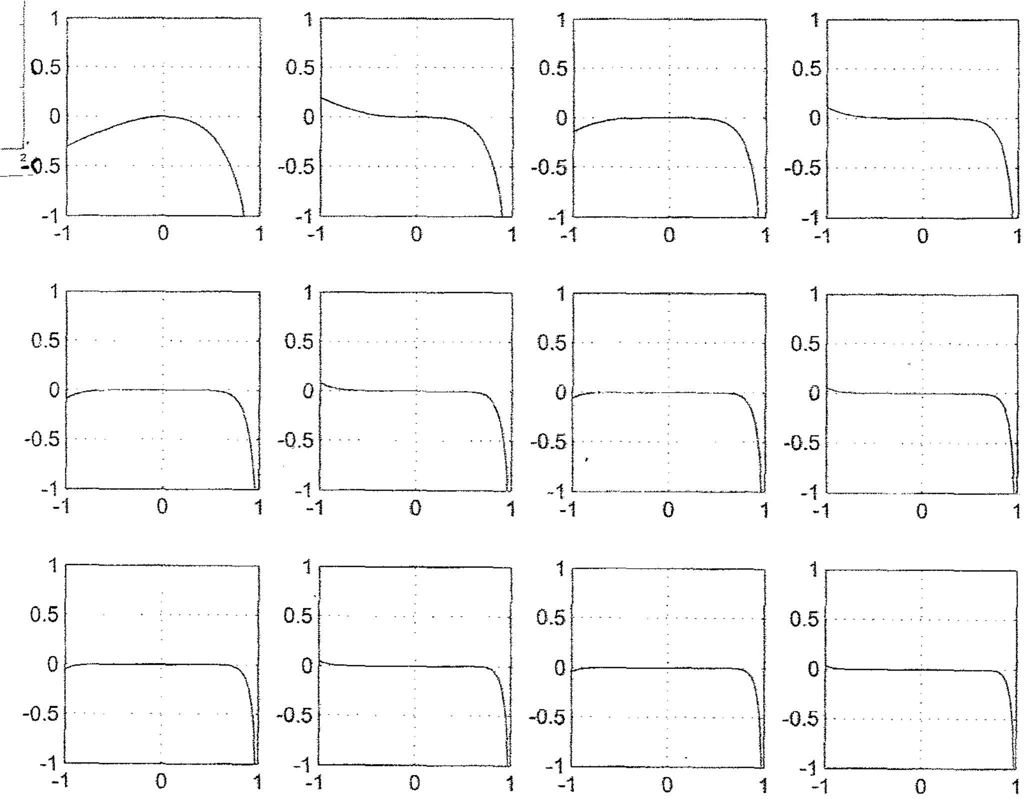

$$h_n(x) = F_n(x) - F(x)$$

$F_n \xrightarrow{\text{נק'}} F$ , על $[-1,1)$

$F_n \not\xrightarrow{\text{במ"ש}} F$ , על $[-1,1)$

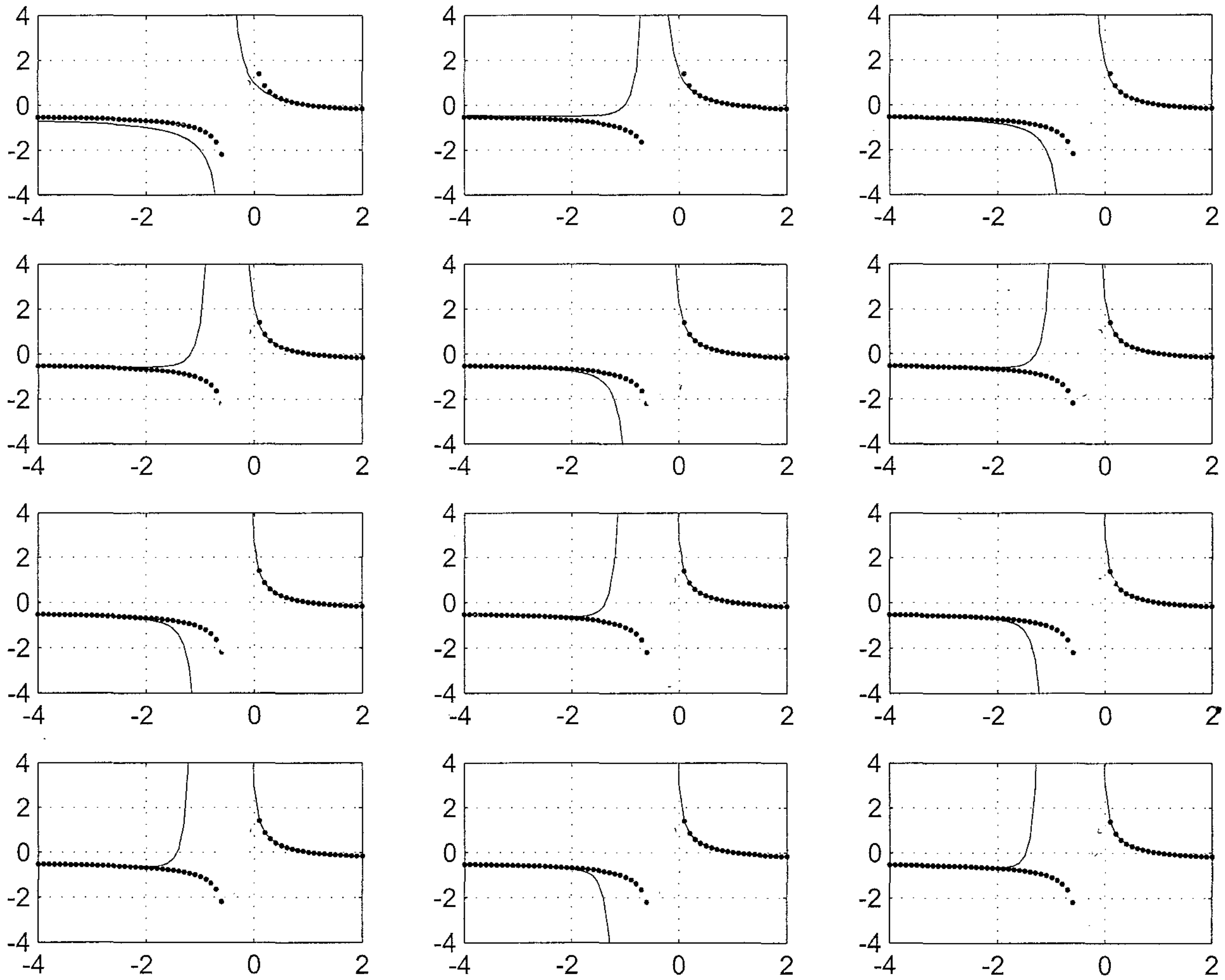
$F_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} F$ , על $[-1,a)$

$(-1<a<1)$



גרפים של $h_1, \dots, h_{12}$

שאלה 4 : $f_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1-x}{1+2x}\right)^n$



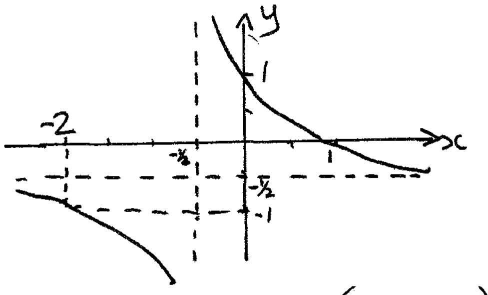

גרפים של $F_1, \dots, F_{12}$ עם $F$

$$F_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\left(\frac{1-x}{1+2x}\right)^n = \sum_{n=1}^{m} \frac{y^n}{n} \xrightarrow{m\to\infty} -\ln(1-y) \quad (-1 \le y < 1)$$

$$= \ln\left(\frac{1+2x}{3x}\right) \quad (x>0 \text{ או } x \le -2)$$

$$= F(x)$$

כאשר $y = \frac{1-x}{1+2x}$




$-1 \le y < 1 \iff \left(\begin{matrix} x>0 \text{ או} \\ x \le -2 \text{ או} \end{matrix}\right)$

$F$ מוגדרת ל- $x>0$ או $x<-\frac{1}{2}$

לכן $F_m \xrightarrow{\text{נק'}} F$ רק כאשר $(x\le -2 \text{ או } x>0)$

$F_m \not\xrightarrow{\text{במ"ש}} F$ על $(-\infty, -2] \cup (0, \infty)$

$F_m \xrightarrow{\text{במ"ש}} F$ על $(-\infty, -2] \cup (a, \infty)$

$(a>0)$

דוגמא 5 : $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$

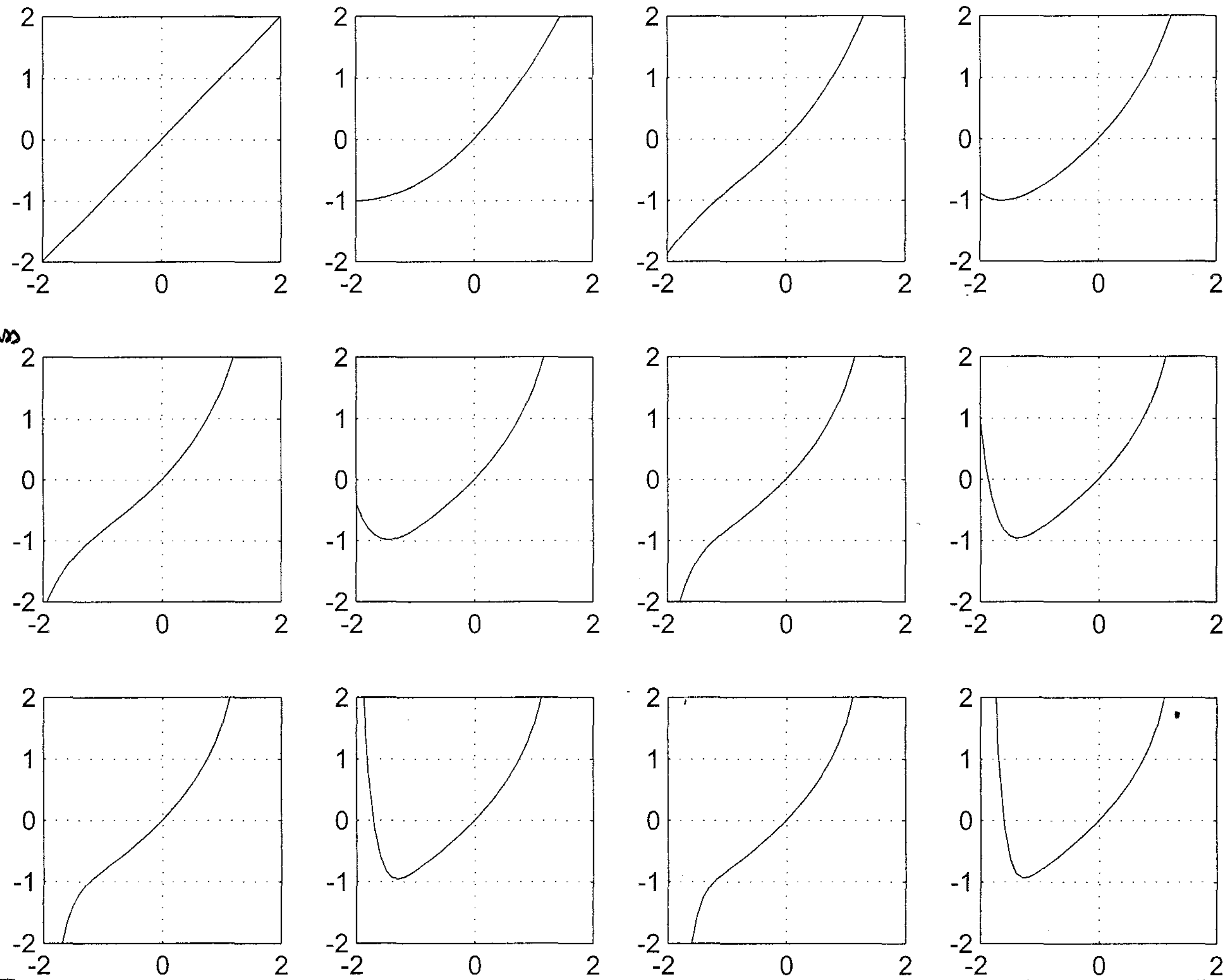
$F_m(x)=\sum_{n=1}^{m} \frac{x^n}{n^2}$

מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \Leftarrow$ Weierstrass

מתכנס במ"ש

על $|x|\leq 1$.



$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$-\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$

$\downarrow \int$

$-\int_0^x \frac{\ln(1-u)}{u} du = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$