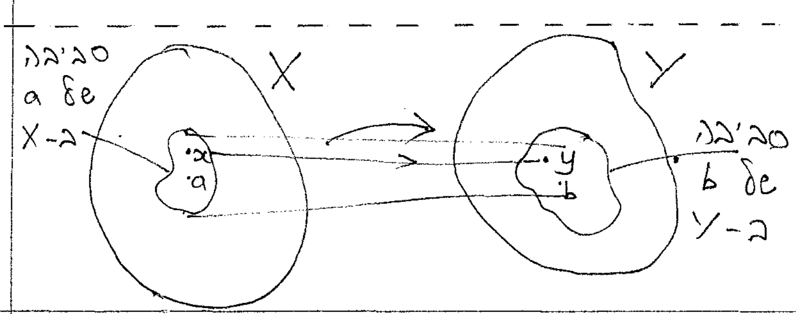
פרק 4: התכנסות
CONVERGENCE

<u>מטרה</u> להבין את המושג הכללי של התכנסות: הגדרות, תכונות והרבה דוגמאות (לפונקציות של כמה משתנים, אינטגרלים ובפרט לסדרות/טורים של מספרים ופונקציות)

גבולות

אם y ביטוי תלוי במשתנה x ($x\in X$) ($y\in Y$)
אומרים ש- $\lim_{x\to a} y = b$ או ($y\to b$ כאשר $x\to a$)
אם לכל <u>סביבה של b</u>, אנו יכולים להבטיח ש-y שייך לסביבה זו אם x מספיק קרוב ל-a (צ"ל x <u>בסביבה</u> מספיק קטנה <u>של a</u>).



הערות

<u>א.</u> X,Y לא חייבות להיות קבוצות של מספרים (לדוגמה, X ו-Y יכולות להיות קבוצות של איברים מסוגים שונים)

$\lim_{n\to\infty} y_n$ $\quad X=\mathbb{N},\ Y=\mathbb{R}$

$f_n \to f$ כאשר $n\to\infty$ $\quad X=\mathbb{N},\ Y=C[0,1]$

<u>ב.</u> לבדוק הגדרת הגבול עבור כי למושגים הבאים תהיה משמעות: "<u>סביבה של a</u>" (ב-X), "<u>סביבה של b</u>" ב-Y.

<u>ג.</u> לא תמיד $b\in Y$ או $a\in X$!

לדוגמה $\lim_{x\to\infty} e^{-x}=0$ $\quad X=\mathbb{R},\ Y=\mathbb{R}$, $a=\infty,\ b=0$

"∞" אינו מספר ב-X

אבל קיימת משמעות ל-"סביבה של ∞ ב-$\mathbb{R}$"

סביבות

ב-$\mathbb{R}$: סביבה של a: $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)=\{x \mid |x-a|<\varepsilon\}$

ב-$\mathbb{N},\mathbb{R}$: סביבה של ∞: $(N,\infty)=\{x\mid x>N\}$

ב-$\mathbb{Z},\mathbb{R}$: סביבה של $-\infty$: $(-\infty,M)=\{x\mid x<M\}$

ב-$\mathbb{R}^2$: סביבה של (x_0,y_0): $\{(x,y)\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\varepsilon^2\}$ דיסק

ב-$\mathbb{C}$: סביבה של z_0: $\{z\mid |z-z_0|<\varepsilon\}$

ב-$\mathbb{R}^n$: סביבה של $\underline{a}$: $\{\underline{x}\mid \|\underline{x}-\underline{a}\|<\varepsilon\}$

במרחב של פונקציות של $[a,b]$: סביבה של f: הרבה אפשרויות
$\{g\mid \sup|f-g|<\varepsilon\}$
או $\{g\mid \int_a^b|f-g|<\varepsilon\}$
או $\{g\mid \int_a^b(f-g)^2<\varepsilon^2\}$
?

ב-$\mathbb{R}$: סביבה של $a+$: $(a,a+\varepsilon)$

ב-$\mathbb{R}$: סביבה של $a-$: $(a-\varepsilon,a)$

דוגמאות בנושא גבולות

$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6$ — $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; סביבה של 3; סביבה של 6

$\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x}=-1$ — $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; סביבה של $0-$ (היינו $(-\varepsilon,0)$); סביבה של -1

$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$ — $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$; סביבה של ∞; סביבה של e

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty$ — $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$; סביבה של ∞ (ב-$\mathbb{N}$); סביבה של ∞ (ב-$\mathbb{R}$)

$\lim_{n\to\infty}e^{(i-2)n}=0$ — $\mathbb{N}\to\mathbb{C}$; סביבה של ∞ (ב-$\mathbb{N}$); סביבה של 0 (ב-$\mathbb{C}$)

$\lim_{(x,y)\to(1,1)}\cos(\pi xy)=-1$ — $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$; סביבה של $(1,1)$ (ב-$\mathbb{R}^2$); סביבה של -1 (ב-$\mathbb{R}$)

$f_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$

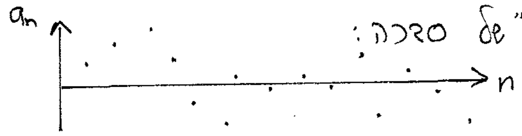
$f_n\to\exp$ כאשר $n\to\infty$? — $\mathbb{N}\to C^\infty(\mathbb{R})$; סביבה של ∞ (ב-$\mathbb{N}$); סביבה של exp (ב-$C^\infty(\mathbb{R})$)

$f_n(x)\to\exp(x)$ כאשר $n\to\infty$ לכל $x\in\mathbb{R}$ — $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$; סביבה של ∞ (ב-$\mathbb{N}$); סביבה של e^x (ב-$\mathbb{R}$)

סדרות של מספרים

סדרה (sequence) של מספרים ממשיים (a_n)
ה"א פונקציה $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$
הניתנת כרשימה: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$
(או לפעמים מ-a_0: $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$

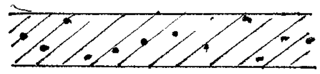
"ציור" של סדרה:



הערה: ניתן לדבר על סדרות של מספרים מרוכבים (גם התיאור הגרפי כמובן שונה (מן המופיע בעמוד זה))

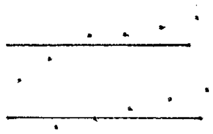
סדרה חסומה: קיים קטע $[m,M]$ המכיל כל האיברים

$\exists m,M \ \forall n\in\mathbb{N}$
$m<a_n<M$



(a_n) סדרה עולה $\Leftrightarrow$ ($a_{n+1}\ge a_n$ לכל n) — $\forall n \quad a_{n+1}\ge a_n$

(a_n) סדרה עולה ממש $\Leftrightarrow$ ($a_{n+1}>a_n$ לכל n) — $\forall n \quad a_{n+1}>a_n$

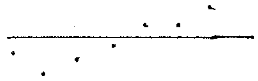


הערה לפעמים יש הגדרה קצת יותר חלשה:

(a_n) סדרה עולה $\Leftrightarrow$ ($a_n\ge a_n$ כמעט לכל n)

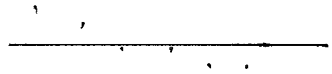
(לכל $n\in\mathbb{N}$ מלבד מספר סופי של n-ים) $\Leftrightarrow$ (לכל $n\in\mathbb{N}$ מספיק גדול)

$\exists N \ \forall n>N \quad a_{n+1}\ge a_n$



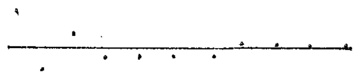
(a_n) סדרה יורדת $\Leftrightarrow$ $a_{n+1}\le a_n$ (כמעט) לכל n

$(\exists N) \ \forall n(>N) \ a_{n+1}\le a_n$



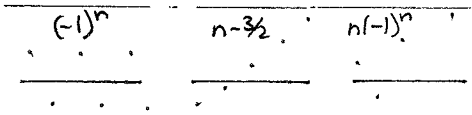
(a_n) סדרה מתכנסת $\Leftrightarrow$ קיים מספר a כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = a$
convergent sequence

$\exists a\in\mathbb{R} \ \forall\varepsilon>0 \ \exists N$
$\forall n>N \ (|a_n-a|<\varepsilon)$



אם לא, (a_n) סדרה מתבדרת
divergent sequence

$\forall a\in\mathbb{R} \ \exists\varepsilon>0 \ \forall N$
$\exists n>N \ |a_n-a|>\varepsilon$



דוגמה חשובה: סדרה (q^n)
(כאשר q קבוע, יכול להיות מספר מרוכב)
3 מקרים:

$\lvert q\rvert<1$	מתכנסת, גבול 0	$1, 1/2, 1/4, 1/8, \ldots$ או $1, -1/3, 1/9, -1/27, \ldots$
$q=1$	מתכנסת, גבול 1	$1, 1, 1, 1, \ldots$
$\lvert q\rvert>1$ או ($\lvert q\rvert=1, q\ne1$)	מתבדרת	$1, 2, 4, 8, \ldots$ או $1, -2, 4, -8, \ldots$ או $1, -1, 1, -1, \ldots$

תכונות

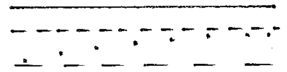
א) $\begin{cases}\lim_{n\to\infty} a_n = a\\ \lim_{n\to\infty} b_n = b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b\\ \lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=ab\\ \lim_{n\to\infty}(ca_n)=ca\end{cases}$

a_nb_n	a_n+b_n	a_n	b_n
1	2	1	1
2.38	3.1	1.7	1.4
2.4393	3.14	1.73	1.41
2.449048	3.146	1.732	1.414
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\sqrt2\cdot\sqrt3$	$\sqrt2+\sqrt3$	$\sqrt3$	$\sqrt2$

יותר כללי: לכל פונקציה f רציפה ב- a:
$\lim_{n\to\infty} a_n=a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)$

לדוגמה: $f(x,y)=x+y$, $f(x,y)=xy$, $f(x)=cx$, $f(x)=e^x, \ldots$ וכו

ב) סדרה עולה וחסומה $\Leftarrow$ סדרה מתכנסת $\Longleftarrow$ שלמות של $\mathbb{R}$



ג) (a_n) סדרה עולה מתבדרת $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ $\Longleftarrow$ (ב)

ד) (a_n) סדרה מתבדרת $\not\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n=\pm\infty$ — לדוגמה: $a_n=(-1)^n$

ה) (a_n) סדרה מתכנסת אם"ם $\lim_{m,n\to\infty}(a_m-a_n)=0$

$\forall\varepsilon>0 \ \exists N \ \forall m,n>N$
$|a_m-a_n|<\varepsilon$

סדרת Cauchy
(קושי)

$\Uparrow$
מושג חשוב (כמו קורס באינפי)

מסקנה של שלמות של $\mathbb{R}$
(לא נכון ב- $\mathbb{Q}$: לדוגמה, אם
$a_n=$ ($\sqrt2$ עד n ספרות מימין לנקודה העשרונית)
(a_n) סדרת קושי ב- $\mathbb{Q}$ אבל אין לה גבול ב- $\mathbb{Q}$. ($\sqrt2\notin\mathbb{Q}$)

טורים של מספרים

הגדרות

$\sum_{r=1}^{\infty} a_r = a_1+a_2+a_3+\cdots$ נקרא טור
series
(לפעמים מתחילים מ- a_0)

$A_n \equiv \sum_{r=1}^{n} a_r = a_1+a_2+\cdots+a_n$ נקרא סכום חלקי של הטור
partial sum

אומרים שהטור $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ מתכנס\מתבדר
converges / diverges
אם"ם הסדרה (A_n) היא מתכנסת\מתבדרת

במקרה שהטור $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ מתכנס, הגבול של הסדרה (A_n) נקרא **הסכום של הטור**

$$\underbrace{A_n}_{\sum_{r=1}^{n} a_r} \xrightarrow{n\to\infty} A \iff \sum_{r=1}^{\infty} a_r = A$$

תכונות

א) $a_r>0$ לכל r $\Leftarrow$ הסדרה (A_n) של הסכומים החלקיים, היא סדרה עולה

ב) $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ טור מתכנס
$\Leftarrow$ (A_n) סדרה מתכנסת ($\to A$)
$\Leftarrow$ $\underbrace{A_n-A_{n-1}}_{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{A-A}_{0}$
$\Leftarrow$ $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

ג) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \not\Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} a_r$ מתכנס
(לדוגמה: דוגמה ד)

ד) $\sum_{r=1}^{\infty} a_r, \sum_{r=1}^{\infty} b_r$ טורים מתכנסים $\Leftarrow$ $\sum_{r=1}^{\infty} (a_r+b_r)$, $\sum_{r=1}^{\infty} ca_r$ מתכנסים

לכל n
$$\sum_{r=1}^{n}(a_r+b_r) = \sum_{r=1}^{n} a_r + \sum_{r=1}^{n} b_r$$
$\downarrow n\to\infty$
$$\sum_{r=1}^{\infty}(a_r+b_r) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r + \sum_{r=1}^{\infty} b_r$$

$$\sum_{r=1}^{n}(ca_r) = c\sum_{r=1}^{n} a_r$$
$\downarrow$
$$\sum_{r=1}^{\infty}(ca_r) = c\sum_{r=1}^{\infty} a_r$$

דוגמאות

א) $1+1+1+1+\cdots$ $\quad a_r=1 \quad (r\geq1)$
$A_n=\sum_{r=1}^{n} a_r = n$
הסכומים החלקיים: סדרה $1,2,3,4,\cdots$
(מתבדרת)
$\Downarrow$
הטור מתבדר

ב) $1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\cdots$ $\quad a_r = 1/10^r \quad (r\geq0)$
$A_n=\sum_{r=0}^{n}(1/10^r)$
הסדרה של סכומים חלקיים: $1, 1.1, 1.11, 1.111, \cdots$
$\longrightarrow 1.111\cdots = 10/9$
(מתכנסת)
$\Downarrow$
הטור מתכנס
וסכום הטור הוא $10/9$

ג) **טור הנדסי כללי** $1+q+q^2+\cdots$ $\quad a_r=q^r$ (q קבוע)

$$A_n=\sum_{r=0}^{n}(q^r) = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & (q\neq1) \\ n+1 & (q=1)\end{cases}$$

$q=1 \Rightarrow A_n=n+1$ סדרה מתבדרת

$-1<q<1 \Rightarrow A_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ סדרה מתכנסת, גבולה $\frac{1}{1-q}$

$q\leq-1$ או $q>1 \Rightarrow A_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ סדרה מתבדרת

לכן הטור $\sum_{r=0}^{\infty} q^r$ מתכנס אמ"מ $|q|<1$
ובמקרה זה $\sum_{r=0}^{\infty} q^r = \frac{1}{1-q}$

ד) **הטור ההרמוני**
harmonic series
$1+\frac12+\frac13+\frac14+\cdots$ $\quad a_r=\frac1r$

$$A_{2^n} = 1+\frac12+\frac13+\frac14+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$
$$= 1+\frac12+\underbrace{\left(\frac13+\frac14\right)}_{>2/4=1/2}+\underbrace{\left(\frac15+\frac16+\frac17+\frac18\right)}_{>4/8=1/2}+\cdots+\underbrace{\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)}_{>2^{n-1}/2^n=1/2}$$
(2 איברים $\geq \frac14$) (4 איברים $\geq \frac18$) (2^{n-1} איברים $\geq \frac{1}{2^n}$)

$>1+n/2$

a_r חיובי $\Leftarrow$ הסדרה A_n היא סדרה עולה

$A_{2^n}>1+n/2 \Rightarrow A_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ (מתבדרת) $\Rightarrow$ **הטור מתבדר**

טור מתחלף (Leibnitz) alternating series [מקרה פרטי של מבחן Dirichlet 4-5]

* סימנים הבינוים
a_n מתחלפים
* הגדלים שלו קטנים
* $a_n \to 0$

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ מתכנס

absolutely convergent
הטור $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ נקרא טור <u>מתכנס בהחלט</u>
אמ"מ הטור $\sum_{r=1}^{\infty} |a_r|$ מתכנס

conditionally convergent
הטור $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ נקרא טור <u>מתכנס בתנאי</u>
אמ"מ הוא מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט

תכונות

א) $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{r=m}^{n} a_r \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$

ב) $\sum_{r=0}^{\infty} a_r$ מתכנס בהחלט $\Rightarrow$ $\sum_{r=0}^{\infty} a_r$ מתכנס

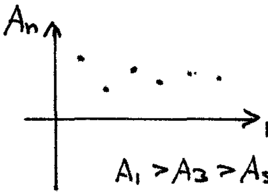
ג) $\sum_{r=0}^{\infty} a_r$ מתכנס בהחלט $\Rightarrow$ כל טור שמקבלים ע"י תמורה של הבינוים של $\sum_{r=0}^{\infty} a_r$, גם הוא טור מתכנס בהחלט (לאותו סכום)

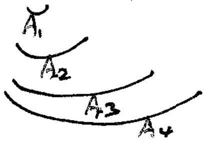
ד) $\sum_{r=0}^{\infty} a_r$, $\sum_{r=0}^{\infty} b_r$ מתכנסים בהחלט $\Rightarrow$
a_0b_0
$+(a_1b_0+a_0b_1)$
$+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)$
$+\cdots$
טור מתכנס בהחלט
והסכום שלו הוא $\left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r\right)\cdot\left(\sum_{r=0}^{\infty} b_r\right)$
(הטור נקרא <u>המכפלה של הטורים המקוריים</u>)
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ כאשר $c_n=\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}$

דוגמאות

א) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

$a_r=(-1)^{r-1}/r$





$A_1>A_3>A_5>\cdots$ $\quad \left(A_3=A_1\overbrace{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}^{\text{שלילי}}\right)$

$A_2<A_4<A_6<\cdots$ $\quad \left(A_4=A_2+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{\text{חיובי}}\right)$

כאן $\sum a_r$ מתכנס בתנאי

טורים: [מתבדר | (מתכנס בהחלט | מתכנס בתנאי)]

ב) $\sum_{r=0}^{n} q^r$ { מתכנס בהחלט אם $|q|<1$; מתבדר אם $|q|\geq 1$ }

<u>הסבר נוסף לתכונות</u> (כאן קורס באינפי)

א) $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ מתכנס $\Leftrightarrow$ (A_n) סדרה מתכנסת $\overset{\text{Cauchy}}{\Leftrightarrow}$ (A_n) סדרת Cauchy
$\Updownarrow$
$A_m-A_n\xrightarrow{m,n\to\infty}0$

אבל: $A_n-A_{m-1}=\sum_{r=m}^{n} a_r \ (n\geq m)$ $\square$

ב) $\sum_{r=1}^{\infty}|a_r|$ מתכנס $\overset{\text{קריטריון}}{\underset{\text{Cauchy}}{\Longleftrightarrow}}$ $\sum_{r=m}^{n}|a_r|\xrightarrow{m,n\to\infty}0$

$0\leq\left|\sum_{r=m}^{n}a_r\right|\leq\sum_{r=m}^{n}|a_r|\xrightarrow{m,n\to\infty}0\Rightarrow\sum_{r=m}^{n}a_r\xrightarrow[\text{קריטריון}]{m,n\to\infty}0\underset{\text{Cauchy}}{\Rightarrow}\sum_{r=1}^{\infty}a_r$ מתכנס $\square$

ג) $\sum_{r=1}^{\infty}|a_r|$ מתכנס ל-A $\Rightarrow$ $\sum_{r=0}^{n}|b_r|=$ (סכום של n איברים ו $|a_i|$) $\leq\sum_{r=1}^{\infty}|a_r|=A$

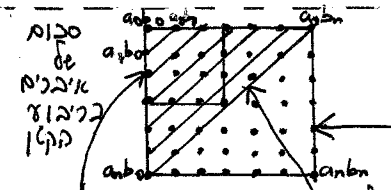
מכאן נובע ש-$\left(\sum_{r=0}^{n}|b_r|\right)$ סדרה עולה וחסומה $\Rightarrow$ מתכנסת $\square$

<u>הערה</u> לטור $\sum_{r=1}^{\infty}a_r$ שמתכנס בתנאי, אפשר למצוא תמורה של הטור שמתכנס לכל מספר $x\in\mathbb{R}$ שרוצים! (או שמתבדר)

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2$

$1\underbrace{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}_{\text{קח איברים שליליים עד שהסכום חלקי שלילי פעם ראשונה}}\underbrace{+\frac{1}{3}}_{\text{הוסיף איברים חיובים עד שסכום חלקי חיובי}}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}-\cdots=0$

ד) במקרה $a_r,b_r\geq 0$:



$\left(\sum_{r=0}^{[n/2]}a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{[n/2]}b_r\right)\leq a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)+\cdots+(a_nb_0+\cdots+a_0b_n)\leq\left(\sum_{r=0}^{n}a_r\right)\left(\sum_{r=0}^{n}b_r\right)$

4-5

מבחני התכנסות לטורים של מספרים

$a_n \underset{}{\overset{n\to\infty}{\not\to}} 0 \Leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר

טור טלסקופי $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right.$ כאשר $a_n = x_{n+1} - x_n$

$A_n = a_1 + \dots + a_n = x_{n+1} - x_1$

$\sum a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ הסדרה (x_n) מתכנסת

מבחני השוואה $(a_r, b_r \ge 0)$

comparison tests

$$\left.\begin{cases} (\forall r, \quad a_r \le b_r) \\ \text{או} \\ \left(\lim_{n\to\infty} a_n/b_n < \infty\right) \\ \text{או} \\ \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}\right) \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{r=1}^{\infty} b_r \text{ מתכנס} \Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} a_r \text{ מתכנס} \\ \sum_{r=1}^{\infty} a_r \text{ מתבדר} \Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} b_r \text{ מתבדר} \end{cases}$$

מסקנות:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q \Rightarrow$
- $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ מתבדר אם $q > 1$
- $\sum_{r=1}^{\infty} a_r$ מתכנס בהחלט אם $0 \le q < 1$

מבחן D'Alembert

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$ כמעט לכל n $\Rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} a_r$ מתכנס בהחלט

מבחן Dirichlet

- * $a_n = x_n \cdot y_n$
- * $x_n \to 0$
- * (x_n) סדרה מונוטונית
- * (Y_n) סדרה חסומה, $Y_n = \sum_{r=1}^{n} y_r$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס

הוכחה (בתנאי קושי Cauchy) $|Y_n| \le M$

$$\sum_{r=m}^{n} (x_r y_r) = \sum_{r=m}^{n} x_r (Y_r - Y_{r-1}) = \sum_{r=m}^{n} x_r Y_r - \sum_{r=m}^{n} x_r Y_{r-1}$$

$$= \sum_{r=m}^{n} x_r Y_r - \sum_{r=m-1}^{n-1} x_{r+1} Y_r$$

$$= \sum_{r=m}^{n} x_r Y_r - \left(\sum_{r=m}^{n} x_{r+1} Y_r + x_m Y_{m-1} - x_{n+1} Y_n \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{r=m}^{n} (x_r - x_{r+1}) Y_r}_{} - \underbrace{x_m Y_{m-1}}_{\xrightarrow{m,n\to\infty} 0} + \underbrace{x_{n+1} Y_n}_{\to 0}$$

$\begin{pmatrix} x_n \to 0 \\ (Y_n) \text{ חסומה} \end{pmatrix}$

$$\left| \sum_{r=m}^{n} (x_r - x_{r+1}) Y_r \right|$$

$$\underset{\text{(אי שיוויון המשולש)}}{\le} \sum_{r=m}^{n} |x_r - x_{r+1}| \cdot |Y_r|$$

$$\le \sum_{r=m}^{n} |x_r - x_{r+1}| \cdot M$$

$$\underset{\text{(טור טלסקופי)}}{=} |x_m - x_{n+1}| \cdot M$$

$$\underset{\text{(קריטיריון Cauchy לסדרה } (x_n))}{\xrightarrow{m,n\to\infty}} 0$$

$\square$

דוגמאות

א) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ מתבדר

ב) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, $x_n = -1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ מתכנס

ג) $\ln(n+1) - \ln n = \ln(1 + 1/n)$, $x_n = \ln n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + 1/n)$ מתבדר

ד) $1/(n \cdot 2^n) \le 1/2^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1/(n \cdot 2^n)$ מתכנס

ה) $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $a_n/b_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$ $\overset{②}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ מתכנס

ו) $a_n = 1/n!$, $b_n = 1/2^n$, $a_{n+1}/a_n = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{2} = b_{n+1}/b_n$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1/n!$ מתכנס

ז) $a_n = n/2^n$, $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1/2$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n/2^n$ מתכנס

ח) $a_n = \frac{10^n}{n!}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10}{n+1} \underset{(n\ge10)}{\le} \frac{10}{11}$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 10^n/n!$ מתכנס

ט) (מבחן Leibnitz)

$y_n = (-1)^n \Rightarrow Y_n = \begin{cases} -1 & n \text{ אי-זוגי} \\ 0 & n \text{ זוגי} \end{cases}$

סכומים חלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

$-1 + 1 - 1 + 1 - \dots$

$\left\{ \begin{array}{l} * \ x_n \to 0 \\ * \ (x_n) \text{ סדרה מונוטונית} \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$ מתכנס

י) $x_n = 1/\sqrt{n}$

$y_n: 2, -1, -1, 2, -1, -1, 2, -1, -1, \dots$

$Y_n: 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, \dots$ חסומה

$\Leftarrow a_n: \frac{2}{\sqrt{1}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{4}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{7}} \dots$

איברים של טור מתכנס

$\frac{2}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{7}} - \dots$ מתכנס

מבחן Abel

* $a_n = x_n \cdot y_n$
* (x_n) סדרה מונוטונית וחסומה
* $\sum y_n$ מתכנס

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס

הוכחה: (x_n) סדרה מונוטונית וחסומה

$\Rightarrow (x_n)$ סדרה מתכנסת (נניח $\lim_{n\to\infty} x_n = x$)

נגדיר (z_n) ע"י $z_n = x_n - x$

$z_n \to 0$

(z_n) סדרה מונוטונית, (y_n) סדרה חסומה (גם מתכנסת) $\xRightarrow{\text{Dirichlet}} \sum_{n=1}^{\infty} z_n \cdot y_n$ מתכנס

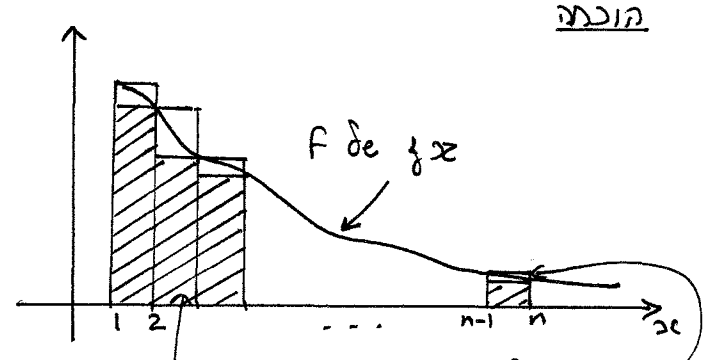
$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot y_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} z_n \cdot y_n}_{\text{מתכנס}} + x \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} y_n}_{\text{מתכנס}}$ מתכנס □

מבחן האינטגרל
integral test

· פונקציה $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}^+$
· חיובית לא עולה

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, $\int_1^{\infty} f$ יחד מתכנסים/מתבדרים

הוכחה



סכום תחתון, סכום עליון

$f(2)+\cdots+f(n) \le \int_1^n f(x)\,dx \le f(1)+\cdots+f(n-1)$ (*)

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)$ סדרה מתכנסת

$\Updownarrow$ ($f(k)\ge 0 \Rightarrow$ סדרה עולה)

$\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)$ סדרה חסומה

$\Updownarrow$ (*)

$\left(\int_1^n f(x)\,dx\right)$ סדרה חסומה

$\Updownarrow$ ($\int_1^x f(x)\,dx$ פונקציה של x עולה)

$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to\infty}\left(\int_1^x f(x)\,dx\right)$ קיים □

דוגמאות (המשך...)

י') $x_n = (1+2/n)^n$: $x_n \le e^2$ מונוטונית (כמו אינפי')

$y_n = (-1)^{n+1}/n$: $\sum y_n$ מתכנס

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n\,(1+2/n)^n$ מתכנס

[הערה: $\left(\frac{1}{n}(1+\frac{2}{n})^n\right)$ לא מונוטונית]

יב')

יג') $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ $\quad s\le 0 \Rightarrow n^{-s} \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ (מתבדר)

$s>0$: $f(x)=x^{-s}$

פונקציה מונוטונית חיובית (לא עולה)

נקרא פונקציה ζ
zeta function $\zeta(s)$

$\int_1^{\infty} x^{-s}\,dx = \left[\frac{x^{1-s}}{1-s}\right]_1^{\infty}$

מתכנס $\Leftrightarrow 1-s<0 \Leftrightarrow s>1$

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$: $s>1$ מתכנס ; $s\le 1$ מתבדר

יד') $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}(\ln n)^{-s}$ $\quad s\le 0 \Rightarrow$ מתבדר בהשוואה עם $\sum \frac{1}{n}$ מתבדר

($n=1 \Rightarrow \ln n = 0$)

$s>0$: $f(x)=\frac{1}{x}(\ln x)^{-s}$

$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x}(\ln x)^{-s}\,dx$

$= \int \frac{1}{e^u}\cdot u^{-s}\cdot e^u\,du \qquad x=e^u,\ dx=e^u\,du$

$= \int du/u^s$

$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \int_{\ln 2}^{\infty} u^{-s}\,du = \left[\frac{u^{1-s}}{1-s}\right]_{\ln 2}^{\infty}$

מתכנס $\Leftrightarrow 1-s<0 \Leftrightarrow s>1$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s}$ מתכנס $\Leftrightarrow s>1$

טו') כאשר $s\in\mathbb{C}$ ($s=a+ib$), $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ מתכנס בהחלט כאשר $\Re(s)>1$

$n^{-s} = n^{-a-ib} = n^{-a}\cdot \underbrace{e^{-ib\ln n}}_{\text{מספר מרוכב בגודל 1}}$

$|n^{-s}| = n^{-a}$

$a>1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}$ מתכנס $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ מתכנס בהחלט

הערות על אינטגרלים לא אמיתיים

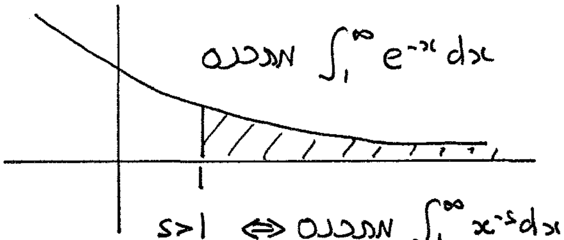
IMPROPER INTEGRALS

הגדרה (מת״פ 1) סוג ראשון: קטע לא חסום

$$\lim_{x\to\infty}\int_a^x f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx$$

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

$$\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to\infty}}\int_x^y f(x)dx = \int_{-\infty}^\infty f(x)dx$$



$\int_1^\infty e^{-x}dx$ מתכנס

$\int_1^\infty x^{-s}dx$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $s>1$

$\left[\frac{x^{1-s}}{1-s}\right]_1^X$ $X\to\infty$

סוג שני: פונקציה לא חסומה

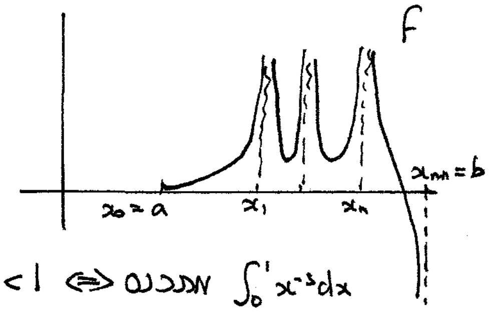
f אינטגרבילית על $[a,b]\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$
נקודות מיוחדות

$\int_a^b f$ מתכנס $\Leftrightarrow$ כל האינטגרלים $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f$ מתכנסים

$\Leftrightarrow$ $\lim_{h,k\to0^+}\int_{x_i+h}^{x_{i+1}-k} f$ קיימים

$i=0,1,\dots,n$

$(x_0\equiv a,\ x_{n+1}\equiv b)$



$\int_0^1 x^{-s}dx$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $s<1$

$\left[\frac{x^{1-s}}{1-s}\right]_h^1$ $h\to0$

מבחני התכנסות

א) מבחן השוואה

$\begin{cases}|f(x)|\le g(x) & (x\ge a)\\ \int_a^\infty g \text{ מתכנס}\end{cases} \Rightarrow$ $\int_a^\infty f$ מתכנס

ב) $\int_a^\infty f$ מתכנס $\not\Rightarrow$ $\left(f(x)\xrightarrow{x\to\infty}0\right)$

ג) קריטריון Cauchy:

$\int_a^\infty f$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\lim_{b,c\to\infty}\left(\int_b^c f\right)=0$

ד) $\int_a^\infty f'$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\lim_{x\to\infty} f(x)$ מתכנס

ה) $\lim_{n\to\infty}\int_0^n f$ קיים $\not\Rightarrow$ $\int_0^\infty f$ מתכנס

ו) $f\ge0 \Rightarrow$ $\int_a^\infty f$ מתכנס אם"ם $\int_a^x f$ חסומה

אם"ם $\lim_{n\to\infty}\int_a^n f$ קיים

דוגמה חשובה (פונקצית Γ)

$$\int_0^\infty x^s e^{-x}dx$$

סביבת ∞: השוואה עם $e^{-x/2}$ ($\int_1^\infty e^{-x/2}dx$ מתכנס)

סביבת 0: השוואה עם x^s ($\int_0^1 x^s dx$ מתכנס כאשר $s>-1$)

$\int_0^\infty x^s e^{-x}dx$ מתכנס כאשר $s>-1$.

דוגמאות

א) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x+1)^2}dx$

בעיות ב-∞ (הקטע לא חסום)

בסביבת $x=0$ (הפונקציה לא חסומה)

סביבת ∞: $\frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x+1)^2} < C\cdot 1/x^2$ $\left(\int_1^\infty dx/x^2 \text{ מתכנס}\right)$

סביבת 0: $\frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x+1)^2} < \frac{\ln x}{\sqrt{x}} < C' x^{-1/6}/\sqrt{x} = C'\cdot x^{-2/3}$

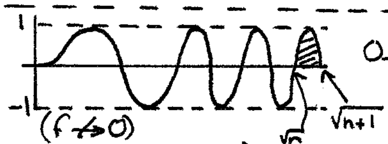
($\int_0^1 x^{-2/3}dx$ מתכנס)

$\Leftarrow$ $\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(x+1)^2}dx$ מתכנס

ב) $\int_1^\infty \frac{e^{-x}\cos px}{x}dx$ מתכנס $\left(\left|\frac{e^{-x}\cos px}{x}\right|\le e^{-x}\ (x\ge1)\right)$

ג) $\int_0^\infty \sin(\pi x^2)dx$ מתכנס

$=\sum_{n=0}^\infty a_n$

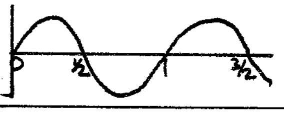


כאשר $a_n=\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}}\sin(\pi x^2)dx$ סדרה מתחלפת

$|a_n|<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$

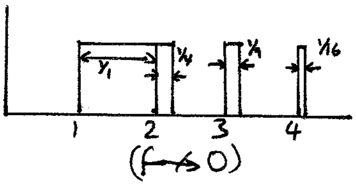
ה) $\int_0^\infty \sin 2\pi x\,dx$ מתבדר

$\int_0^n \sin 2\pi x\,dx=0\quad\forall n$



ו) $f(x)=\sum_{n=1}^\infty H_{(n,\,n+1/n^2)}(x)$

כאשר $H_{(a,b)}(x)=\begin{cases}1 & a<x<b\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$



$\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_0^\infty f$ מתכנס