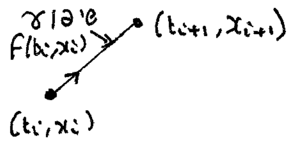
דוגמאות נומריות ושיטת Euler ב-MATLAB

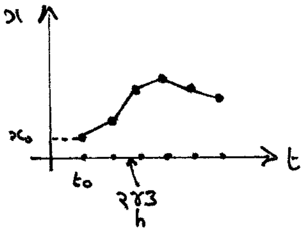
[חומר רשות]

שיטת Euler למד"ר מסדר ראשון

$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$

$$x_{i+1}=x_i+hf(t_i,x_i)$$
$$t_{i+1}=t_i+h$$





f	$t0, x0$	h	n
פונק' $f(t,x)$	תנאי התחלה	צעד	מס' צעדים

$t=[t0,\ t0+h,\ \cdots,\ t0+nh]$
$\quad\ \ = t(1),\ t(2)\ \cdots\ t(n+1)$

בהתחלה: $x=[x0]$

באמצע: $x=[x(1),\cdots,x(i)]$, $x(1)=x0$

בסוף: $x=[x(1),\cdots,x(n+1)]$, $x(1)=x0$

כאשר $x(i)$ קירוב ל ערך של הפתרון x בנקודה $t=t(i)$

← גרף של הנקודות
$(t(1),x(1)),(t(2),x(2))\cdots(t(n+1),x(n+1))$, $(t(1),x(1))=(t0,x0)$
עם קווים ביניהם

הערה: feval (f, t, x) נותן את הערך של $f(t,x)$

feval
function evaluation

שיטת Euler חד-מימדי

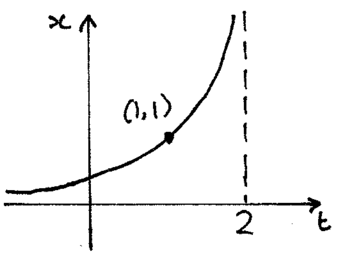
```
function euler1(f,t0,x0,h,n)
clf;

x(1)=x0;  t=t0:h:t0+n*h;

for i=1:n
    x(i+1)=x(i)+h*feval(f,t(i),x(i));
end

plot(t,x,'*-');
```

קובץ "euler1.m"

דוגמה

$$\frac{dx}{dt}=x^2,\quad x(1)=1$$

פתרון: $x(t)=\frac{1}{2-t}$




```
>> euler1(@(t,x)x^2,1,1,.1,10)
```

או:

```
>> euler1(@ft,1,1,.1,10)
```

קובץ "ft.m"

```
function dxdt=ft(t,x)
dxdt=x^2;
```

$\boxed{@(t,x)\ x.\wedge 2}$

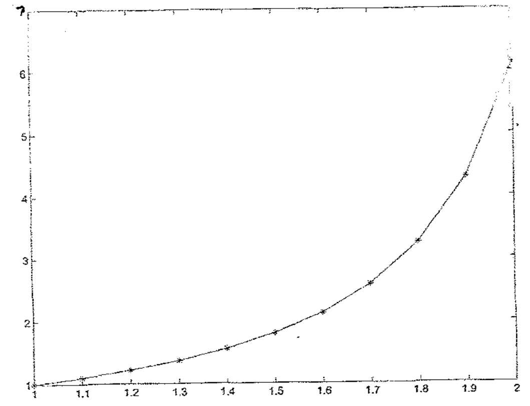
הגדרה "in-line" של פונקציה של 2 משתנים x,t עם ערך x^2

תנאי התחלה $t0=1,\ x0=1$

צעד $h=.1$

מספר צעדים $n=10$

$t(11)=1+10(.1)=2$



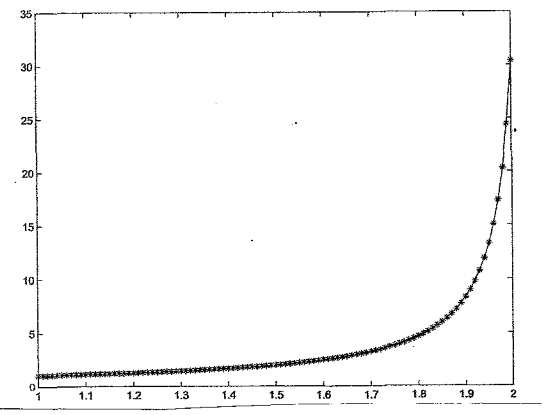

```
>> euler1(@(t,x)x^2,1,1,.01,100)
```

צעד $h=.01$

מספר צעדים $n=100$

$t(101)=2$

h יותר קטן ⇐ קירוב טוב יותר לפתרון



שיטת Euler בחד-מימד עם שרטוט שדה וקטורי

```
function euler1q(f,t0,x0,h,n,a,b,m,M)
x(1)=x0; t(1)=t0;
[X,Y]=meshgrid(a:h:b,m:(M-m)*h/(b-a):M);
quiver(X,Y,ones(length(X)),feval(f,X,Y));axis([a,b,m,M]);
hold on;pause(1)
for i=1:n
    x(i+1)=x(i)+h*feval(f,t(i),x(i));
    t(i+1)=t(i)+h;
    plot(t,x,'g*',t,x,'r-');pause(.5);
end
hold on;
```

קובץ "euler1q.m"

f	$t0, x0$	h	n	a,b	m,M
פונקציה	תנאי התחלה	צעד	מספר צעדים	גבולות מסך	הגרף
$f(t,x)$	$x(t_0)=x_0$			$t\in[a,b]$	$x\in[m,M]$

$[X,Y]=\text{meshgrid}(A,B)$

X,Y הן מטריצות של קואורדינטות רשת כל הנקודות במישור (x,y) כאשר x בפסיעה A, y בפסיעה B

$$\begin{matrix}(x_{31},y_{31}) & (x_{32},y_{32}) & (x_{33},y_{33})\\ (x_{21},y_{21}) & (x_{22},y_{22}) & (x_{23},y_{23})\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ (x_{11},y_{11}) & (x_{12},y_{12}) & (x_{13},y_{13})\end{matrix}$$

במקרה הזה, בכיוון x: מ-a ל-b עם צעד h

בכיוון y: מ-m ל-M עם צעד $\frac{(M-m)h}{b-a}$

בחנו כך שהרשת ריבועית

quiver(X,Y,S,T)

ציור שדה וקטורי: וקטור $\binom{S_{ij}}{T_{ij}}$ בנקודה (X_{ij}, Y_{ij}) לכל i,j [מימדי X,Y,S,T זהים]

במקרה הזה, השדה וקטורי הוא $\binom{1}{f(x,y)}$ בנקודה (x,y)

length(X) : מספר השורות או מספר העמודות במטריצה X (הגדול מביניהם)

ones(n) : מחזירה את מטריצה $n\times n$, כל הרכיבים 1

feval(f,X,Y): מטריצה של ערכים של הפונקציה f בנקודות (X_{ij}, Y_{ij}) [X,Y אותם מימדים]

axis([a,b,m,M]): הצג התמונה בחלון עם קואורדינטות בכיוון x בקטע [a,b] וקואורדינטות בכיוון y בקטע [m,M]

pause(t) המתן משך זמן t

hold on הצג הגרפים הבאים על החלון בו מוצג גרף הפעיל האחרון

plot(t,x,'g*',t,x,'r-')

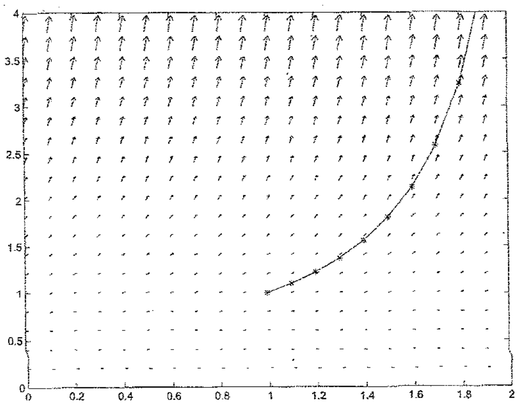
צייר נקודות (t_i, x_i) בירוק (g) עם *
וכן צייר אותן נקודות
עם קווים (-) אדומים (r) ביניהן

<u>הערות</u>* באיטרציה ה-i, t,x הם וקטורים באורך i+1 ולכן הציור הוא של (i+1) הנקודות הראשונות. באיטרציה העוקבת, t,x גדלים והציור משורטט בשלמותו מחדש (בזבוז זמן ומקום!)

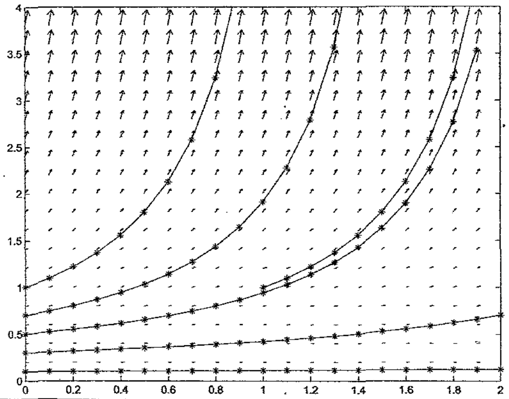
* חשוב ש-f תיכתב בצורה המאפשרת לעשות פעולות על מטריצות\וקטורים של ערכים coordinate-wise (רכיב-רכיב) צ"ל עם סימנים .^, .* במקום ^, *.

* לקבלת אותו ציור יותר מהר, כל פעם מוסיפים קטע אחד בין (t_i,x_i), (t_{i+1},x_{i+1}).

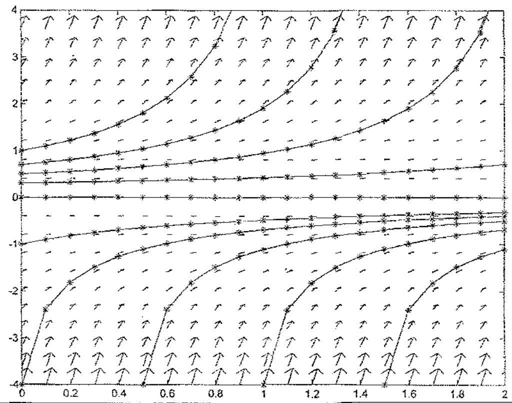
```
>>euler1q(@(t,x)x.^2,1,1,.1,9,0,2,0,4)
```



```
>> euler1q(@(t,x)x.^2,1,1,.1,9,0,2,0,4)
>> euler1q(@(t,x)x.^2,0,1,.1,9,0,2,0,4)
>> euler1q(@(t,x)x.^2,0,.1,.1,20,0,2,0,4)
>> euler1q(@(t,x)x.^2,0,.3,.1,20,0,2,0,4)
>> euler1q(@(t,x)x.^2,0,.5,.1,19,0,2,0,4)
>> euler1q(@(t,x)x.^2,0,.7,.1,14,0,2,0,4)
```



```
>> euler1q(@(t,x)x.^2,0,.7,.1,14,0,2,-4,4)
>> euler1q(@(t,x)x.^2,0,.3,.1,20,0,2,-4,4)
>> euler1q(@(t,x)x.^2,0,.5,.1,20,0,2,-4,4)
>> euler1q(@(t,x)x.^2,0,-4,.1,20,0,2,-4,4)
>> euler1q(@(t,x)x.^2,0,--1,.1,20,0,2,-4,4)
>> euler1q(@(t,x)x.^2,0,-1,.1,20,0,2,-4,4)
>> euler1q(@(t,x)x.^2,0,0,.1,20,0,2,-4,4)
>> euler1q(@(t,x)x.^2,1,-4,.1,20,0,2,-4,4)
>> euler1q(@(t,x)x.^2,.5,-4,.1,20,0,2,-4,4)
>> euler1q(@(t,x)x.^2,1.5,-4,.1,20,0,2,-4,4)
```



אפשר במקום ה"plot" הנ"ל לעשות:

```
plot([t(i),t(i+1)],[x(i),x(i+1)],'g*',
     [t(i),t(i+1)],[x(i),x(i+1)],'r-');
```

שיטת Euler חד-מימד (ממומשת באופן חסכני יותר במשאבי זמן ומקום)

```
function euler1qf(f,t0,x0,h,n,N,a,b,m,M)
xold=x0; told=t0;
[X,Y]=meshgrid(a:(b-a)/N:b,m:(M-m)/N:M);
quiver(X,Y,ones(length(X)),feval(f,X,Y));axis([a,b,m,M]);
hold on;pause(1);plot(told,xold,'g*');
for i=1:n
    xnew=xold+h*feval(f,told,xold);
    tnew=told+h;
    plot(tnew,xnew,'g*',[told,tnew],[xold,xnew],'r-');
    xold=xnew;told=tnew;
end
hold on;
```

קובץ "euler1qf.m"

בגלל שבשיטת Euler הערך של x_{i+1} תלוי רק בערכים של t_i, x_i (ובצעד h) ולא בערכים קודמים של x_j $(j<i)$ אז אין צורך בחשובה (מערך $x_1,\ldots,x_n$) אלא רק בערך של הקירוב, מספיק לזכור רק את הערך האחרון של x_i — בכל צעד יש $(t_{\text{ישן}}, x_{\text{ישן}})$ וממנו אפשר למצוא $(t_{\text{חדש}}, x_{\text{חדש}})$ לפי

$$\begin{cases} t_{\text{חדש}} = t_{\text{ישן}} + h \\ x_{\text{חדש}} = x_{\text{ישן}} + h\cdot f(t_{\text{ישן}}, x_{\text{ישן}}) \end{cases}$$

ולצייר את הקטע בין $(t_{\text{ישן}}, x_{\text{ישן}})$ ובין $(t_{\text{חדש}}, x_{\text{חדש}})$.

מד"ר לינארית

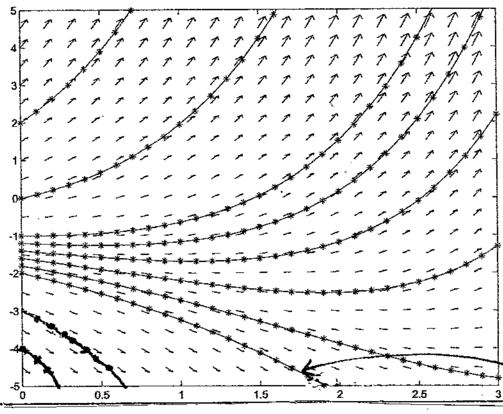
$$\frac{dx}{dt} = x + e^{t/2} \Rightarrow \frac{dx}{dt} - x = e^{t/2}$$

$$(\mu = e^{\int -1} = e^{-t}) \overset{\times e^{-t}}{\Rightarrow} e^{-t}\frac{dx}{dt} - e^{-t}x = e^{-t/2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{-t}x) = e^{-t/2}$$

$$\overset{\int}{\Rightarrow} e^{-t}x = C - 2e^{-t/2} \Rightarrow \underline{\underline{x = Ce^{t} - 2e^{t/2}}}$$

```
>> euler1qf(@(t,x)x+exp(t./2),0,-1,.1,30,20,0,3,-5,5)
>> euler1qf(@(t,x)x+exp(t./2),0,-1.2,.1,30,20,0,3,-5,5)
>> euler1qf(@(t,x)x+exp(t./2),0,-1.2,.1,30,20,0,3,-5,5)
>> euler1qf(@(t,x)x+exp(t./2),0,-1.4,.1,30,20,0,3,-5,5)
>> euler1qf(@(t,x)x+exp(t./2),0,-1.6,.1,30,20,0,3,-5,5)
>> euler1qf(@(t,x)x+exp(t./2),0,-1.8,.1,30,20,0,3,-5,5)
>> euler1qf(@(t,x)x+exp(t./2),0,-2,.1,30,20,0,3,-5,5)
>> euler1qf(@(t,x)x+exp(t./2),0,0,.1,30,20,0,3,-5,5)
>> euler1qf(@(t,x)x+exp(t./2),0,2,.1,30,20,0,3,-5,5)
```



$C>0$ $\quad x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$

$C<0$ $\quad x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} -\infty$

$C=0$

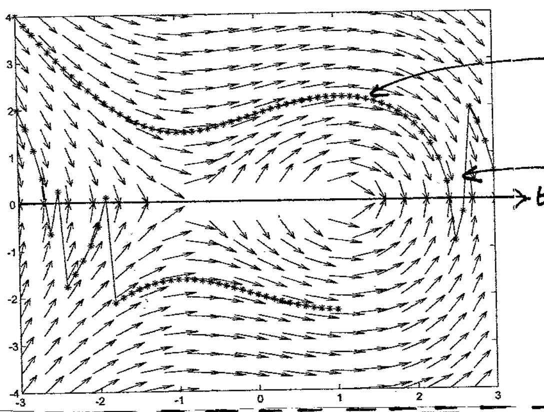
בת-הפרדה

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1-t^2}{x} \Rightarrow \int x\,dx = \int (1-t^2)\,dt + \text{קבוע}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = t - \frac{t^3}{3} + \text{קבוע}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = \pm\sqrt{2t - \tfrac{2}{3}t^3 + C}}}$$

```
>> euler1qfu(@(t,x)(1-t.^2)./x,-3,4,.1,40,20,-3,3,-4,4)
>> euler1qfu(@(t,x)(1-t.^2)./x,-3,4,.1,60,20,-3,3,-4,4)
```

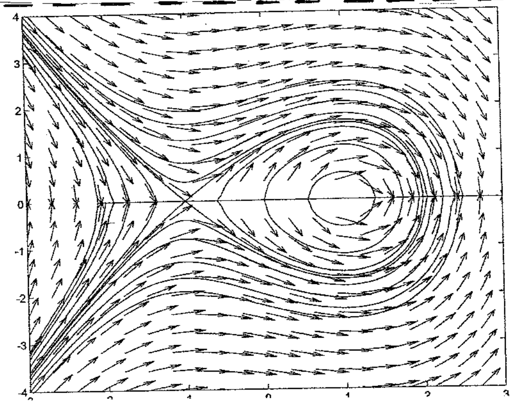


קירוב טוב

קירוב לא טוב

<u>הערות</u> * במשוואה הדיפרנציאלית בדוגמה הזאת $f(t,x) = \frac{1-t^2}{x}$ השדה הוקטורי המתאים לזה הוא $\binom{1}{f}$ וגודלו גדול כאשר x קטן (צ"א בנקודות קרוב לציר t) ולכן, אם משתמשים ב euler1qf במקרה זה, לא רואים את הציור של השדה וקטורי. גודל החצים המוצגים בקריאה ל-"quiver" נקבע כך שתתאפשר הצגת החצים הארוכים ביותר.

[⇐ הפרשים גדולים <u>בגודל</u> וקטורי השדה גורמים לקושי לצפות בשדה באזורים בהם גודל וקטורי השדה קטן.]



פתרונות מדויקים

$x = \pm\sqrt{2t - \tfrac{2}{3}t^3 + C}$

* ב euler1qfu, ציירנו שדה וקטורי יחידה $\binom{1/\sqrt{1+f^2}}{f/\sqrt{1+f^2}}$ במקום $\binom{1}{f}$ (אותו כיוון)

* בגלל ש-f לא מוגדרת ב- $x=0$, euler1 לא עושה קירוב טוב קרוב ל- $x=0$.

*

```
function euler1qfu(f,t0,x0,h,n,N,a,b,m,M)
xold=x0; told=t0;
[X,Y]=meshgrid(a:(b-a)/N:b,m:(M-m)/N:M);
S=ones(length(X));T=feval(f,X,Y);
quiver(X,Y,S./(sqrt(S.^2+T.^2)),T./(sqrt(S.^2+T.^2)));axis([a,b,m,M]);
hold on;pause(1);plot(told,xold,'g*');
for i=1:n
    xnew=xold+h*feval(f,told,xold);
    tnew=told+h;
    plot(tnew,xnew,'g*',[told,tnew],[xold,xnew],'r-');
    xold=xnew;told=tnew;
end
hold on;
```

מערכת של 2 משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

$$\frac{d}{dt}\binom{x}{y} = \underline{f}(t,x,y) \iff \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f_1(t,x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = f_2(t,x,y) \end{cases}$$

f	t0, x0, y0	h	n	a, b, m, M
פונקציה $f(t,x,y)$	תנאי התחלה	צעד	מספר צעדים	חלון של הגרפים $[a,b]\times[m,M]$

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h f_1(t_i, x_i, y_i) \\ y_{i+1} = y_i + h f_2(t_i, x_i, y_i) \\ t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$$

מקבלים קירוב לפתרון $x = x(t),\ y = y(t)$

הגרף של הפתרון הוא מסילה במרחב תלת-מימדי (t,x,y)

אבל לפעמים מעניין לראות את התמונה $\{(x(t),y(t))\}$ במישור (x,y)

דוגמה א

$$\ddot{x} = -x \iff \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

פתרון כללי:

פתרון כללי: $x = A\cos t + B\sin t$ (כמו בדף 3-5) $\Rightarrow$ $x = A\cos t + B\sin t$, $y = -A\sin t + B\cos t$

תנאי התחלה $x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0$ $\iff$ תנאי התחלה $x(0)=1,\ y(0)=0$

$x = \cos t$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix} 1 = A \\ 0 = B \end{matrix}\right\}$ $x = \cos t$, $y = -\sin t$

תמונה של (x,y) היא מעגל, t עולה בכיוון נגד השעון

הפונקציות x,y הן מחזוריות בעלות מחזור $2\pi = 6.28\ldots$

דוגמה ב

$$\ddot{x} = -4x \iff \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x \end{cases}$$

פתרון כללי $x = A\cos 2t + B\sin 2t$ (כמו בדף 3-5) $\iff$ פתרון כללי $x = A\cos 2t + B\sin 2t$

$y = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t$

תנאי התחלה $x(0)=1,\ \dot{x}(0)=0$ $\iff$ תנאי התחלה $x(0)=1,\ y(0)=0$

$A=1,\ B=0$

$x = \cos 2t \iff \underline{x = \cos 2t}$, $\underline{y = -2\sin 2t}$

תמונה של (x,y) היא אליפסה $\boxed{x^2 + \frac{y^2}{4} = 1}$

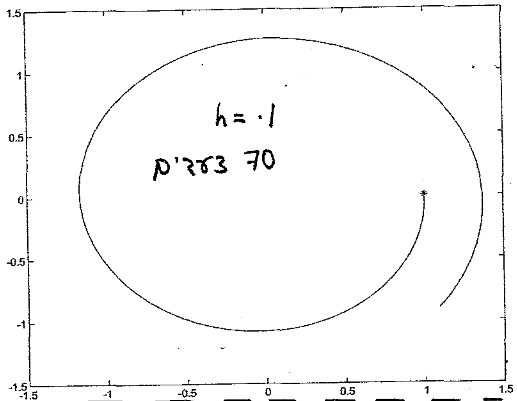
t עולה בכיוון נגד השעון (מהירות זוויתית 2)

שיטת Euler בדו-מימד

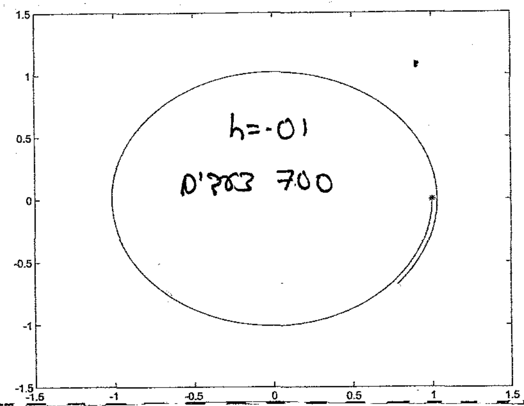
```
function euler2vf(f,t0,x0,y0,h,n,a,b,m,M)
told=t0;xold=x0;yold=y0;
plot(xold,yold,'g*');axis([a,b,m,M]);hold on
for i=1:n
    v=feval(f,told,xold,yold);
    xnew=xold+h*v(1);
    ynew=yold+h*v(2);
    tnew=told+h;
    line([xold,xnew],[yold,ynew]);
    pause(0.005);
    xold=xnew; yold=ynew; told=tnew;
end
hold on
```

```
>> euler2vf(@(t,x,y)[y,-x],0,1,0,.1,70,-1.5,1.5,-1.5,1.5)
```

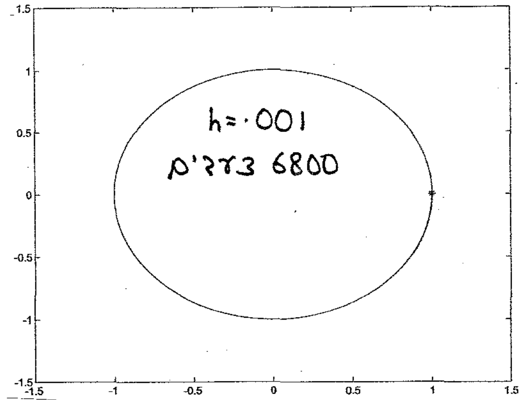
א




```
>> euler2vf(@(t,x,y)[y,-x],0,1,0,.01,700,-1.5,1.5,-1.5,1.5)
```

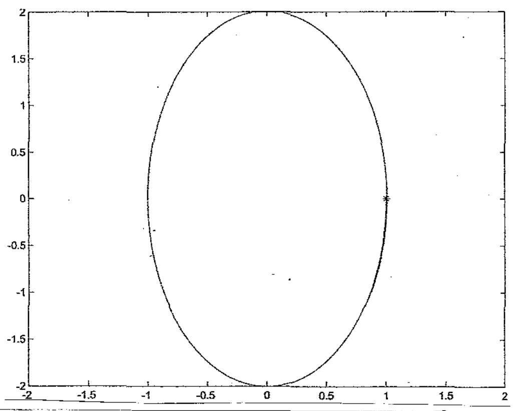



```
euler2vf(@(t,x,y)[y,-x],0,1,0,.001,6800,-1.5,1.5,-1.5,1.5)
```




```
>> euler2vf(@(t,x,y)[y,-4*x],0,1,0,.001,3400,-2,2,-2,2)
```

ב



דוגמה ג

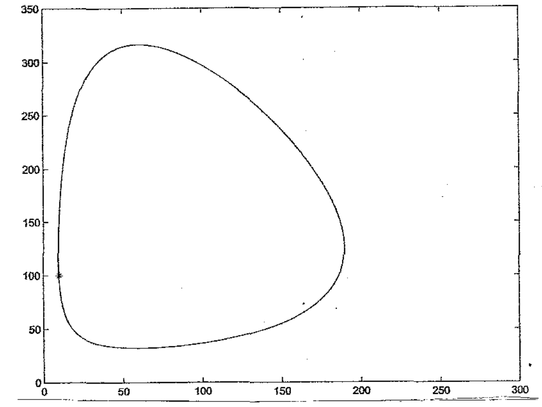
$$\frac{dx}{dt} = -.5x + .004xy$$

$$\frac{dy}{dt} = .3y - .005xy$$

תנאי התחלה: $x(0)=10,\ y(0)=100$

ג

```
>> euler2vf(@(t,x,y)[-.5*x+.004*x*y,.3*y-.005*x*y],
0,10,100,.01,2000,0,300,0,350)
```



$ode23(@f, [t0\ t1], x0)$

מחזירה קירוב לפתרון למשוואה דיפרנציאלית

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

תחת תנאי התחלה $x(t0) = x0$

בתחום $t \in [t0, t1]$.

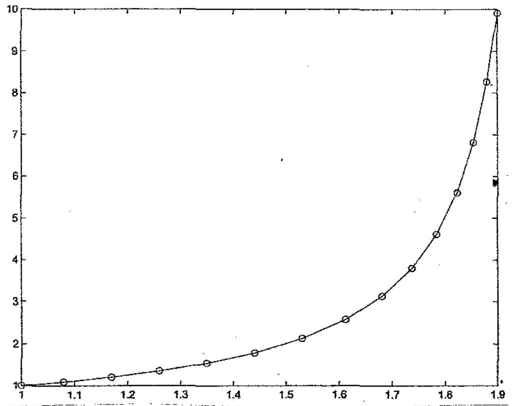
כאן הפונקציה מוגדרת ע"י הקובץ f.m

```
function dxdt=f(t,x)
dxdt=x^2
```

או "in-line" `@(t,x)x^2` בשימוש ב-ode23

שימוש ב- ode23 (MATLAB built-in integrator)

```
>> ode23(@(t,x)x^2,[1 1.9],1)
```



הערה הוספת ";" בסוף השורה תמנע הצגת הוקטורים xsol, tsol (וכן באופן כללי – תמנע הצגת פלט הפעולה).

הערה `plot(tsol,xsol)` מציגה את הגרף של הפתרון עוד פעם (רק בלי העיגולים)

```
>> [tsol xsol]=ode23(@(t,x)x^2,
[1 1.9],1)
```

tsol =	xsol =
1.0000	1.0000
1.0800	1.0869
1.1700	1.2048
1.2600	1.3512
1.3500	1.5381
1.4400	1.7850
1.5300	2.1262
1.6123	2.5761
1.6809	3.1277
1.7374	3.7985
1.7840	4.6132
1.8224	5.6028
1.8539	6.8045
1.8799	8.2641
1.9000	9.9026

שימוש ב- ode23 למערכות של משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

מערכת של משוואות דיפרנציאליות:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}(t,\underline{x})$$

f מוגדרת ע"י הקובץ pp.m או in-line

בקובץ pp.m

```
function dxdt=pp(t,x)
dxonedt=-.5*x(1)+.004*x(1)*x(2);
dxtwodt=.3*x(2)-.005*x(1)*x(2);
dxdt=[dxonedt; dxtwodt];
```

```
>> ode23(@pp,[0 30],[10 100])
```

או

```
ode23(@(t,x)[-.5*x(1)+.004*x(1)*x(2);.3*x(2)-.005*x(1)*x(2)],[0 30],[10 100]);
```

הערה: ב- ode23 חשוב שהפונקציה כתובה כפונקציה וקטורית, כעמודה ולא כשורה: [רכיב ה-x-י ; רכיב ה-y-י] ולא [רכיב ה-x-י , רכיב ה-y-י]

הפונקציה

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t,\underline{x}) &\longmapsto \underline{f}(t,\underline{x}) \end{aligned}}$$

ולא

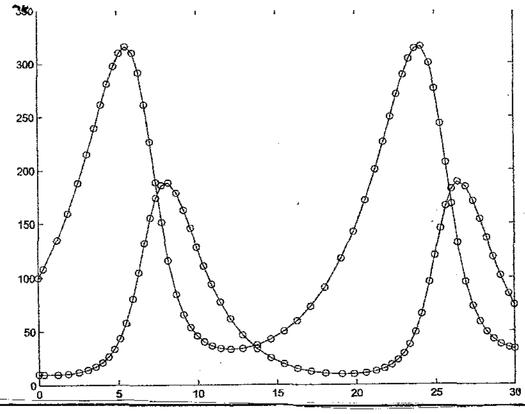
$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (t,x,y) &\longmapsto \underline{f}(t,x,y) \end{aligned}$$

(כמו ב- euler2vf)

תנאי ההתחלה הוא $\underline{x}(t0) = x0$ וקטור

ode23(@f, [t0 t1], x0)

מחזירה קירוב לפתרון על הקטע $t\in[t0,t1]$.



גרפים של קירובים לפתרונות $x_1(t), x_2(t)$

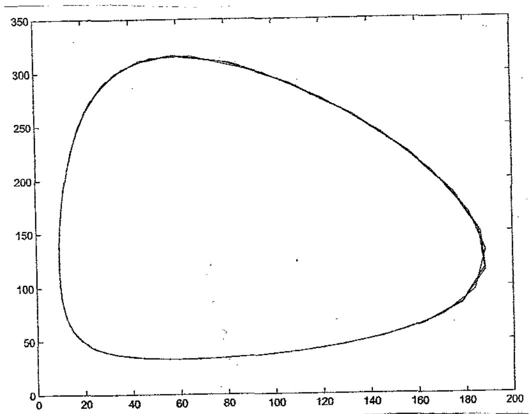
```
>> [tsol,xsol]=ode23(@pp,[0 30],[10 100]);
```

tsol =	xsol =	
0	10.0000	100.0000
0.3200	9.7362	108.3531
1.1862	9.6040	134.7822
1.8543	10.1783	159.3737
2.5225	11.5788	187.8523
3.0861	13.7443	214.7284
3.5670	16.7177	239.2005
3.9947	20.7128	261.3640
4.3881	26.0721	280.9786
4.7611	33.3195	297.4433
⋮		⋮

```
>> plot(tsol,xsol)
```

מציירת את הגרפים של שני הקומפוננטים של xsol (כמו הגרף הנ"ל, רק בלי עיגולים)

```
>> plot(xsol(:,1),xsol(:,2))
```



גרף של הקומפוננט הראשון נגד הקומפוננט השני של xsol.

הערה לפתרון משוואה דיפרנציאלית מסדר גבוה ב-MATLAB להחליפה במערכת שקולה של מד"ר מסדר ראשון, ולכתוב פונקציה $\underline{f}(t,\underline{x})$ מתאימה בצורה וקטורית! (ראו תרגילים)

מטריצה בסיסית של פתרונות ל- $\dot{x}=A(t)x$

למערכת כללית של משוואות דיפרנציאליות רגילות
ליניאריות והומוגניות מסדר ראשון $\dot{x}=A(t)x$
קיימת מערכת יסודית של פתרונות $\{f^1,\dots,f^n\}$
(בסיס למרחב וקטורי של הפתרונות):

$$\{x(t)\mid \dot{x}=A(t)x\} = \langle\{f^1(t),\dots,f^n(t)\}\rangle$$

מטריצה $n\times n$ $\Phi(t)$ שעמודותיה
הן וקטורים המהווים מערכת
יסודית של פתרונות ל- $\dot{x}=A(t)x$
נקראת מטריצה בסיסית של פתרונות
fundamental matrix of solutions

$$\Phi = \left(f^1(t) \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, f^n(t)\right)$$

א) Φ מטריצה בסיסית $\iff$ $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$, $\det\Phi\neq 0$

ב) פתרון כללי ל- $\dot{x}=A(t)x$ הוא

$$x(t)=C_1f^1+C_2f^2+\dots+C_nf^n \quad (C_1,\dots,C_n \text{ קבועים})$$
$$=\left(f^1 \,\vdots\, f^2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, f^n\right)*\begin{pmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_n\end{pmatrix}$$
$$=\Phi(t)*C \quad (C \text{ וקטור קבוע})$$

ג) תחת תנאי התחלה $x(t_0)=x^0$ מקבלים פתרון

$x(t)=\Phi(t)*C$ אם

$x^0=\Phi(t_0)*C$ כאשר

$\Leftarrow$ $C=\Phi(t_0)^{-1}*x^0$

$$x(t)=\Phi(t)*\Phi(t_0)^{-1}*x^0$$

הערה [חומר רשות] כאשר $A(t)=A$ לא תלוי ב-t (מקדמים קבועים)
מקבלים מטריצה בסיסית $\Phi(t)=\exp(tA)$

בדיקה: $\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A*\exp(tA)$

[קיימות 2 הגדרות שקולות של $\exp X$ כאשר X
מטריצה: $\exp X = \lim_{n\to\infty}\left(I+X/n\right)^n$

$$=1+X+\frac{1}{2!}X^2+\dots+\frac{1}{n!}X^n+\dots$$

ניתן לבדוק את התכונות של $\exp X$
בשתי דרכים — ראו תרגילים]

הערה לפעמים כותבים את הפתרון ל- $\dot{x}=A(t)x$
כאשר $x(0)=x_0$ בצורה $x(t)=\left(P\exp\int_0^t A(u)\,du\right)x_0$
"path-ordered exponential"

דוגמאות א) (מדף 3-12)

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}1+1/t & -t\\ 1/t & -1\end{pmatrix}x$$

מערכת בסיסית של פתרונות $\left\{\begin{pmatrix}t\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}t^2\\t-1\end{pmatrix}\right\}$ $\Rightarrow$ $\Phi=\begin{pmatrix}t&t^2\\1&t-1\end{pmatrix}$

בדיקה: $\dot{\Phi} = \begin{pmatrix}1&2t\\0&1\end{pmatrix} \overset{?}{=} \underbrace{\begin{pmatrix}1+1/t&-t\\1/t&-1\end{pmatrix}}_{A(t)}\underbrace{\begin{pmatrix}t&t^2\\1&t-1\end{pmatrix}}_{\Phi}$

ב) (מדף 3-18)

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}x$$

מערכת בסיסית של פתרונות $\left\{\begin{pmatrix}e^t\\e^t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}e^{-t}\\-e^{-t}\end{pmatrix}\right\}$ $\Rightarrow$ $\Phi=\begin{pmatrix}e^t&e^{-t}\\e^t&-e^{-t}\end{pmatrix}$

ג) (מדף 3-18)

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}x$$

$$\Phi=\begin{pmatrix}\cos t&\sin t\\ \cos t+\sin t & \sin t-\cos t\end{pmatrix}$$
$$\Psi=\begin{pmatrix}e^{it}&e^{-it}\\(1-i)e^{it}&(1+i)e^{-it}\end{pmatrix}$$

Φ,Ψ מטריצות בסיסיות של פתרונות

הסבר (א) Φ מטריצה בסיסית $(f^1\vdots\cdots\vdots f^n)$ $\iff$ (עמודות של Φ הם פתרונות) ו(עמודות של Φ בלתי תלויות ליניארית)

$\Updownarrow$

$\dot{f}^r=A(t)f^r$ $(r=1,2,\dots,n)$ $\iff \left(\dot{f}^1 \vdots\cdots\vdots \dot{f}^n\right)=A(t)\left(f^1\vdots\cdots\vdots f^n\right) \iff \dot{\Phi}=A(t)\Phi$

$\Updownarrow$

$\det\Phi\neq0$

דוגמא

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}1+1/t&-t\\1/t&-1\end{pmatrix}x,\quad x(1)=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$

$\Phi(t)=\begin{pmatrix}t&t^2\\1&t-1\end{pmatrix} \Rightarrow$ $x(t)=\underbrace{\begin{pmatrix}t&t^2\\1&t-1\end{pmatrix}}_{\Phi(t)}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{-1}}_{\Phi(1)^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}_{x^0}$

$$=\begin{pmatrix}t&t^2\\1&t-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}t&t^2\\1&t-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4t-t^2\\5-t\end{pmatrix}$$

בדיקה: $\begin{pmatrix}4-2t\\-1\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}1+1/t&-t\\1/t&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4t-t^2\\5-t\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}4-1\\5-1\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

הערות * קיים מספר אינסופי של מטריצות בסיסיות
של מערכת $\dot{x}=A(t)x$: אם Φ מטריצה
בסיסית, כל מטריצה בסיסית אחרת שצורתה
$\Psi(t)=\Phi(t)*B$ מהווה אף היא מטריצה בסיסית,
כאשר B מטריצה קבועה, $\det B\neq 0$ (תרגיל!)

* שיטת Euler ל- $\dot{x}=Ax$, $x(0)=x_0$ נותנת
קירובים $x_n\approx x(nh)$ כאשר $x_{n+1}=x_n+h\cdot Ax_n$

$\Rightarrow x_{n+1}=(I+hA)x_n \Rightarrow x_n=(I+hA)^n x_0$

$\Rightarrow \underset{(t=nh)}{x(t)}\approx(I+tA/n)^n x_0 \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{\exp(tA)\,x_0}_{\text{פתרון מדויק}}$

משוואות דיפרנציאליות רגילות לינאריות אי-הומוגניות

משוואה מסדר n

$$(*)\; a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

$$L: y \longmapsto a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

מערכת של n משוואות מסדר ראשון

$$(*)\; \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \underline{A}(x)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \underline{b}(x)$$

$$L: \underline{y} \longmapsto \frac{d\underline{y}}{dx} - \underline{A}(x)\underline{y}$$

$$\boxed{L(y) = b}$$

$$(\#)\; \frac{d\underline{y}}{dx} = \underline{A}(x)\underline{y} \iff \boxed{L(y) = 0} \iff (\#)\; a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

משוואה הומוגנית מתאימה ל-$(*)$

L העתקה לינארית $\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix}\text{פתרון כללי} \\ \text{ל-}(*) \\ L(y)=b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{פתרון כללי} \\ \text{ל-}(\#) \\ L(y)=0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{פתרון אחד} \\ \text{ל-}(*)\end{pmatrix}$$

"פתרון פרטי"

particular solution + complementary solution = general solution

<u>הוכחה</u> נניח ש- $L(y_0) = b$

$L(y) = b \iff L(y) = L(y_0)$

$\iff L(y - y_0) = 0$

$\iff y - y_0 \in \ker L$

$\iff y \in y_0 + \ker L$

שיטות למציאת פתרון פרטי ל-$(*)$

① אם המשוואה עם מקדמים קבועים וגם b בצורה מיוחדת (צירוף לינארי של פונקציות (פולינום)·(אקספוננט)·$\cos$/$\sin$)

שיטת מקדמים בלתי מוגדרים :

method of undetermined coefficients

פתרון y כתוב כצירוף לינארי של פונקציות

$b(x) = x^n e^{ax} \begin{smallmatrix}\cos \\ \sin\end{smallmatrix}(bx)$ $\longrightarrow$ $x^m e^{ax} \begin{smallmatrix}\cos \\ \sin\end{smallmatrix}(bx)$ $\quad r \le m \le n+r$ — r = ריבוי של $a+ib$ כשורש של משוואה האופיינית

$b(x) = x^n e^{ax}$ $\longrightarrow$ $x^m e^{ax}$ $\quad r \le m \le n+r$ — r = ריבוי של a כשורש של משוואה האופיינית (0 אם אינו שורש)

---

② כללית, כאשר ידועה מערכת בסיסית של פתרונות למשוואה הומוגנית $(\#)$:

method of variation of parameters

שיטת וריאציה של פרמטרים

<u>למשוואה מסדר גבוה</u> (ראו 3-32)

$$y = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) + \cdots + v_n(x)y_n(x)$$

כאשר $\{y_1, \ldots, y_n\}$ מערכת בסיסית של פתרונות למד"ר הומוגנית

ואת הפונקציות $v_1(x), \ldots, v_n(x)$ מוצאים כפתרונות למערכת של משוואות לינאריות (לא דיפרנציאליות) דרך אלגברה לינארית!

$v_1(x) \cdots v_n(x)$ = "parameters" which are "varied"

אם כותבים את המערכת השקולה למד"ר שלנו אז מקבלים את הפתרון

<u>למערכות של משוואות מסדר ראשון</u>

$\underline{\dot{x}} = \underline{A}(t)\underline{x} + \underline{b}(t)$, $\underline{\Phi}$ מטריצה בסיסית ל- $\underline{\dot{x}} = \underline{A}(t)\underline{x}$

$$\Longleftarrow \quad \underline{\Phi}(t)^{-1}\underline{\dot{x}} - \underline{\Phi}(t)^{-1}\underline{A}(t)\underline{x} = \underline{\Phi}(t)^{-1}\underline{b}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\underline{\Phi}^{-1}) \overset{\text{תרגיל}}{=} -\underline{\Phi}^{-1}\underline{\dot{\Phi}}\,\underline{\Phi}^{-1} = -\underline{\Phi}^{-1}(\underline{A}\underline{\Phi})\underline{\Phi}^{-1} = -\underline{\Phi}^{-1}\underline{A}$$

$$\Longleftarrow \quad \underline{\Phi}(t)^{-1}\underline{\dot{x}} + \frac{d}{dt}(\underline{\Phi}(t)^{-1})\,\underline{x} = \underline{\Phi}(t)^{-1}\underline{b}(t)$$

$$\Longleftarrow \quad \frac{d}{dt}(\underline{\Phi}(t)^{-1}\underline{x}) = \underline{\Phi}(t)^{-1}\underline{b}(t)$$

$$\Longleftarrow \quad \underline{\Phi}(t)^{-1}\underline{x} = \int \underline{\Phi}(t)^{-1}\underline{b}(t)\,dt \quad \Longrightarrow \text{פתרון } \underline{x}(t)$$

$$\underline{x} = \underline{\Phi}(t)\left(\int_{t_0}^{t} \underline{\Phi}(u)^{-1}\underline{b}(u)\,du\right) + \underline{x}_0$$

פתרון תחת תנאי התחלה $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$

(דומה לפתרון של משוואה לינארית מסדר ראשון רק ④ 3-4)

דוגמאות למציאת פתרון פרטי למד"ר לינארית ואי-הומוגנית

שיטה ①: METHOD OF UNDETERMINED COEFFICIENTS | **הסבר**

א) $y''+2y'+y=x^2$:

$y=Ax^2+Bx+C$

$y'=2Ax+B$

$y''=2A$

$\Rightarrow 2A+2(2Ax+B)+(Ax^2+Bx+C)=x^2$

מקדמים של $1, x, x^2$:

$$\begin{cases} 1: & 2A+2B+C=0 \\ x: & 4A+B=0 \\ x^2: & A=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow A=1,\ B=-4,\ C=6$, $y=x^2-4x+6$ פתרון פרטי

פתרון כללי: $\underline{y=ae^{-x}+bxe^{-x}+x^2-4x+6}$

הסבר: $x^2=x^2\cdot e^{0\cdot x}$

$\lambda=0$ לא שורש של המשוואה האופיינית $\lambda^2+2\lambda+1=0$

שורשים של משוואה האופיינית: $\lambda=-1$ כפול

$\Downarrow$

$\{e^{-x}, xe^{-x}\}$ מערכת בסיסית למשוואה הומוגנית

ב) $y''+2y'=x^2$:

$y=x(Ax^2+Bx+C)$

$y'=3Ax^2+2Bx+C$

$y''=6Ax+2B$

מקדמים של $1, x, x^2$:

$$\begin{cases} 1: & 2B+2C=0 \\ x: & 6A+4B=0 \\ x^2: & 6A=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow A=1/6,\ B=-1/4,\ C=1/4$, $y=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}$ פתרון פרטי

פתרון כללי: $\underline{y=a+be^{-2x}+x^3/6-x^2/4+x/4}$

הסבר: $x^2=x^2\cdot e^{0x}$

משוואה אופיינית: $\lambda^2+2\lambda=0$

$\lambda=0$ שורש בריבוי 1

שורשים של משוואה אופיינית $\lambda=0,-2$

$\Downarrow$

$\{1, e^{-2x}\}$ מערכת בסיסית של פתרונות למשוואה הומוגנית

ג) $y''+2y'+y=e^x$:

$y=Ae^x$

$y'=Ae^x$

$y''=Ae^x$

$(Ae^x)+2(Ae^x)+(Ae^x)=e^x$

$4A=1 \Rightarrow A=1/4$

$y=\frac{1}{4}e^x$ פתרון פרטי

פתרון כללי: $\underline{y=ae^{-x}+bxe^{-x}+1/4\,e^x}$

הסבר: $e^x=e^{1\cdot x}$

משוואה אופיינית: $\lambda^2+2\lambda+1=0$

$\lambda=1$ לא שורש

ד) $y''+2y'+y=e^{-x}$:

$y=Ax^2e^{-x}$

$y'=(2Ax-Ax^2)e^{-x}$

$y''=(2A-4Ax+Ax^2)e^{-x}$

$(2A-4Ax+Ax^2+4Ax-2Ax^2+Ax^2)e^{-x}=e^{-x}$

$A=1/2 \Rightarrow y=1/2\,x^2e^{-x}$:פתרון פרטי

פתרון כללי: $\underline{y=ae^{-x}+bxe^{-x}+1/2\,x^2e^{-x}}$

הסבר: $e^{-x}=e^{(-1)x}$

$\lambda=-1$ שורש כפול של המשוואה האופיינית

ה) $y''+2y'+y=e^{2x}\cos x$:

$y=e^{2x}(A\cos x+B\sin x)$

הסבר: $e^{2x}\cos x=\Re(e^{(2+i)x})$

$\lambda=2+i$ לא שורש של המשוואה האופיינית

ו) $y''+4y'+5y=e^{2x}\cos x$:

$y=xe^{2x}(A\cos x+B\sin x)$

הסבר: $\lambda=2+i$ שורש של המשוואה האופיינית $\lambda^2+4\lambda+5=0$

ז) $y''+2y'+y=xe^{-x}$:

$y=\underbrace{x^2}_{\text{שורש כפול}}\underbrace{(Ax+B)}_{x}e^{-x}$

הסבר: $\lambda=-1$ שורש כפול של המשוואה האופיינית $\lambda^2+2\lambda+1=0$

ח) $y''+2y'+y=xe^{-x}\sin x$:

$y=(Ax+B)e^{-x}\cos x+(Cx+D)e^{-x}\sin x$

הסבר: $\lambda=-1+i$ לא שורש של $\lambda^2+2\lambda+1=0$

שיטה ② : "variation of parameters" (n=2)

(*) $$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a(x)y=b(x)$$

נניח שמערכת בסיסית לפתרונות של
המשוואה ההומוגנית המתאימה $\left(a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y\right)=0$ (#)
נתונה: $\{y_1,\ y_2\}$

רוצים למצוא פתרון פרטי ל-(*) בצורה

$$y=v_1(x)\,y_1(x)+v_2(x)\,y_2(x)$$

פונקציות שאנחנו מחפשים

$$y'=v_1\,y_1'+v_2\,y_2'+(v_1'y_1+v_2'y_2)$$

נניח שזה $=0$

$\boxed{v_1'y_1+v_2'y_2=0}$ ◎

$$y''=v_1\,y_1''+v_2\,y_2''+v_1'y_1'+v_2'y_2'$$

(*) $\Leftrightarrow$ $a_2(v_1'y_1'+v_2'y_2')=b(x)$
$+\,v_1(a_2y_1''+a_1y_1'+a_0y_1)\to 0$ (y_1 פתרון של #)
$+\,v_2(a_2y_2''+a_1y_2'+a_0y_2)\to 0$ (y_2 פתרון של #)

לכן אם v_1,v_2 פונקציות כך ש-

$$\left.\begin{aligned}v_1'y_1+v_2'y_2&=0\\ v_1'y_1'+v_2'y_2'&=b/a_2\end{aligned}\right\}\ ◎$$

אזי $y=v_1y_1+v_2y_2$ הוא פתרון של (*)

◎ היא מערכת של שתי משוואות ליניאריות
ל- v_1',v_2' $\longleftarrow$

$$\left.\begin{aligned}v_1'&=-\frac{b}{a_2}\,\frac{y_2}{y_1y_2'-y_2y_1'}\\ v_2'&=\frac{b}{a_2}\,\frac{y_1}{y_1y_2'-y_2y_1'}\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\int}$$ פונקציות v_1,v_2

$\Downarrow$

פתרון פרטי $y=v_1y_1+v_2y_2$ של (*)

דוגמאות

א) (*) $$4y''+36y=\frac{1}{\sin 3x}$$

משוואה הומוגנית: $4y''+36y=0$
משוואה אופיינית: $4\lambda^2+36=0 \Rightarrow \lambda=\pm3i$
מערכת בסיסית של פתרונות: $\{\cos3x,\ \sin3x\}$

רוצים פתרון פרטי של (*) בצורה: $y=v_1\cos3x+v_2\sin3x$

$y'=-v_1\cdot3\sin3x+v_2\cdot3\cos3x$ $\quad\boxed{v_1'\cos3x+v_2'\sin3x=0}$

$y''=-v_1\cdot9\cos3x-v_2\cdot9\sin3x$
$\quad-v_1'\cdot3\sin3x+v_2'\cdot3\cos3x$

(*) $\rightsquigarrow$ $\boxed{12(-v_1'\sin3x+v_2'\cos3x)=\frac{1}{\sin3x}}$

$\Downarrow$

$$v_1'=-1/12$$
$$v_2'=\frac{1}{12}\,\frac{\cos3x}{\sin3x}$$

$\Downarrow\int$

$v_1=-x/12+$ קבוע
$v_2=\frac{1}{36}\ln|\sin3x|+$ קבוע

$\Downarrow$

פתרון פרטי: $y=-\frac{x}{12}\cos3x+\frac{1}{36}\sin3x\ln|\sin3x|$

פתרון כללי: $y=-\frac{x}{12}\cos3x+\frac{1}{36}\sin3x\ln|\sin3x|+A\cos3x+B\sin3x$

ב) (*), תנאי התחלה: $y(\pi/6)=1,\ y'(\pi/6)=0$

$$y'=\frac{x}{4}\sin3x+\frac{1}{12}\cos3x\ln|\sin3x|-3A\sin3x+3B\cos3x$$

$y(\pi/6)=B \Rightarrow B=1$
$y'(\pi/6)=\frac{\pi}{24}-3A \Rightarrow A=\pi/72$

$$\boxed{y=(\pi/72-x/12)\cos3x+\sin3x+\frac{1}{36}\sin3x\ln|\sin3x|}$$

דוגמאות של מציאת פתרון פרטי למערכות מסדר ראשון

שיטה ①

$$\circledast\quad \dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\underline{x} + \begin{pmatrix}e^t\\e^{2t}\end{pmatrix}$$

פתרון פרטי בצורה: $\underline{x} = e^t\underline{A} + e^{2t}(t\underline{B}+\underline{C})$

כאשר $\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ וקטורים קבועים

$$\dot{\underline{x}} = e^t\underline{A} + (e^{2t}+2e^{2t}t)\underline{B} + 2e^{2t}\underline{C}$$

$$\circledast \Rightarrow e^t\underline{A} + (e^{2t}+2te^{2t})\underline{B} + 2e^{2t}\underline{C} = \begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\left(e^t\underline{A}+e^{2t}(t\underline{B}+\underline{C})\right) + \begin{pmatrix}e^t\\e^{2t}\end{pmatrix}$$

מקדמים

e^t: ① $\underline{A} = \begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\underline{A} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}0&-2\\1&-3\end{pmatrix}\underline{A} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A} = \begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\end{pmatrix}$

e^{2t}: ② $\underline{B} + 2\underline{C} = \begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\underline{C} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\end{pmatrix}\underline{C} = \underline{B} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

te^{2t}: ③ $2\underline{B} = \begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\underline{B} \Rightarrow \begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\end{pmatrix}\underline{B} = \underline{0} \Rightarrow \underline{B} = \begin{pmatrix}2k\\k\end{pmatrix}$

② $\Rightarrow \begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\end{pmatrix}\underline{C} = \begin{pmatrix}2k\\k-1\end{pmatrix} \Rightarrow 2k = k-1 \Rightarrow k=-1 \Rightarrow \underline{B} = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\end{pmatrix}\underline{C} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{C} = \begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} + *\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

פתרון פרטי: $\underline{x} = e^t\begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

פתרון כללי: $\underline{x} = Ae^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + Be^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + e^t\begin{pmatrix}-3/2\\-1/2\end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$

הסבר

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\-1&4-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2-5\lambda+6 = (\lambda-2)(\lambda-3)$$

ערכים עצמיים $\lambda = 2, 3$

$\begin{pmatrix}-1&2\\-1&2\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0}$, $\underline{v}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-2&2\\-1&1\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0}$, $\underline{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\Leftarrow$ $\left\{e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ מערכת בסיסית של פתרונות למשוואה ההומוגנית $\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\underline{x}$

הערה: בדרך כלל לא משתמשים בשיטה זו למצוא פתרונות למערכות!

הערה: המערכת שלנו בצורה $L(\underline{x}) = \begin{pmatrix}e^t\\e^{2t}\end{pmatrix}$

כאשר $L(\underline{x}) = \dot{\underline{x}} - \begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\underline{x}$

$L(\underline{x}) = \begin{pmatrix}e^t\\0\end{pmatrix}$: $\underline{x} = e^t\underline{A}$

($\lambda=1$ לא ערך עצמי)

$L(\underline{x}) = \begin{pmatrix}0\\e^{2t}\end{pmatrix}$: $\underline{x} = te^{2t}\underline{B} + e^{2t}\underline{C}$

($\lambda=2$ ערך עצמי)

חלק זה חשוב (קבוע מתאים למשוואה אחד מסדר גבוה)

שיטה ②

$$\dot{\underline{x}} = \begin{pmatrix}1&2\\-1&4\end{pmatrix}\underline{x} + \underbrace{\begin{pmatrix}e^t\\e^{2t}\end{pmatrix}}_{\underline{b}(t)}$$

(עמ' 3-30 ②)

פתרון: $\underline{x} = \Phi(t)\int\Phi(t)^{-1}\underline{b}(t)\,dt$

$$= \begin{pmatrix}2e^{2t}&e^{3t}\\e^{2t}&e^{3t}\end{pmatrix}\cdot\int\begin{pmatrix}e^{-2t}&-e^{-2t}\\-e^{-3t}&2e^{-3t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t\\e^{2t}\end{pmatrix}dt$$

$$= \begin{pmatrix}2e^{2t}&e^{3t}\\e^{2t}&e^{3t}\end{pmatrix}\cdot\int\begin{pmatrix}e^{-t}-1\\-e^{-2t}+2e^{-t}\end{pmatrix}dt$$

$$= \begin{pmatrix}2e^{2t}&e^{3t}\\e^{2t}&e^{3t}\end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix}-e^{-t}-t\\ \frac{1}{2}e^{-2t}-2e^{-t}\end{pmatrix} + \text{וקטור קבוע}\right)$$

$$= \begin{pmatrix}2e^{2t}(-e^{-t}-t)+e^{3t}(\frac{1}{2}e^{-2t}-2e^{-t})\\e^{2t}(-e^{-t}-t)+e^{3t}(\frac{1}{2}e^{-2t}-2e^{-t})\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}2e^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}e^{3t}\\e^{3t}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}e^t-2te^{2t}-2e^{2t}\\-\frac{1}{2}e^t-te^{2t}-2e^{2t}\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}2e^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix} + B\begin{pmatrix}e^{3t}\\e^{3t}\end{pmatrix}$$

$\left\{e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ מערכת בסיסית של פתרונות למשוואה הומוגנית

$\Leftarrow$ מטריצה בסיסית $\Phi = \begin{pmatrix}2e^{2t}&e^{3t}\\e^{2t}&e^{3t}\end{pmatrix}$

$\Leftarrow$ $\Phi^{-1} = \begin{pmatrix}e^{-2t}&-e^{-2t}\\-e^{-3t}&2e^{-3t}\end{pmatrix}$

דוגמה אחרת

$$\left.\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2\\ \dot{y}_2 &= -2y_2 - y_1 + e^{-t}\end{aligned}\right\} \underset{\substack{y_1=y\\y_2=\dot{y}}}{\Longleftrightarrow} \ddot{y}+2\dot{y}+y = e^{-t}$$

$$\underline{y} = \Phi(t)\cdot\int\Phi(t)^{-1}\begin{pmatrix}0\\e^{-t}\end{pmatrix}dt$$

$$= \begin{pmatrix}e^{-t}&te^{-t}+e^{-t}\\-e^{-t}&-te^{-t}\end{pmatrix}\cdot\int\begin{pmatrix}-t&-1-t\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}dt$$

$$= e^{-t}\begin{pmatrix}1&t+1\\-1&-t\end{pmatrix}\int\begin{pmatrix}-1-t\\1\end{pmatrix}dt = e^{-t}\begin{pmatrix}1&t+1\\-1&-t\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-t-t^2/2\\t\end{pmatrix} + \text{קבוע}\right]$$

פתרון פרטי $\underline{y} = e^{-t}\begin{pmatrix}t^2/2\\t-t^2/2\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \boxed{y_1 = \frac{1}{2}t^2e^{-t}}$

מערכת הומוגנית $\longrightarrow$ $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}-\lambda&1\\-1&-2-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2+2\lambda+1 \Rightarrow \lambda=-1$; $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\underline{v}=\underline{0} \Rightarrow \underline{v}=*\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\underline{w}=\underline{v} \Rightarrow \underline{w}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ פתרון

$\left\{e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, te^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ מערכת בסיסית של פתרונות

$\Phi^{-1} = e^t\begin{pmatrix}-t&-1-t\\1&1\end{pmatrix} \Leftarrow \Phi = \begin{pmatrix}e^{-t}&te^{-t}+e^{-t}\\-e^{-t}&-te^{-t}\end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix}1&1+t\\-1&-t\end{pmatrix}$

הערה: בדוגמה הזה, יותר טוב בשיטה ① (רק 3-31 ②)