שקילות בין משוואה דיפרנציאלית מסדר גבוה ובין מערכת של משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \iff$ ($y_1=y$, $y_2=y'$, $\vdots$, $y_n=y^{(n-1)}$)

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

תנאי התחלה:
$$\begin{cases} y(x_0) = a_0 \\ y'(x_0) = a_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \end{cases} \iff$$

תנאי התחלה:
$$\begin{cases} y_1(x_0) = a_0 \\ y_2(x_0) = a_1 \\ \vdots \\ y_n(x_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

משפט Picard למשוואה דיפרנציאלית מסדר n

$f(x, y_1, \dots, y_n)$ רציפה ב-D

$\partial f / \partial y_i$ $(1 \le i \le n)$ רציפות ב-D

D קבוצה סביב $(x_0, a_0, \dots, a_{n-1})$ ($(n+1)$-מימדית)

$\Longleftarrow$ קיים קטע I סביב x_0 כך שקיים פתרון יחיד $y(x)$ $(x \in I)$ למשוואה $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ תחת תנאי התחלה $y(x_0)=a_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$

דוגמאות

א) $\ddot x = -k\dot x - cx + f(t) \iff$ ($y \equiv \dot x$)
$$\begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -ky - cx + f(t) \end{cases}$$

תנאי התחלה:
$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot x(t_0) = y_0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

ב) לכל משוואה מסדר גבוה, אפשר לכתוב מערכת שקולה מסדר ראשון.
אבל לא לכל מערכת מסדר ראשון קיימת משוואה שקולה מסדר גבוה.

ג) $? \iff$
$$\begin{cases} ① \ \dot x = -ax + bxy \\ ② \ \dot y = cy - dxy \end{cases}$$

$① \Rightarrow y = (\dot x + ax)/(bx) = \frac{\dot x}{bx} + \frac{a}{b}$ ③

$② \Rightarrow \frac{\ddot x}{bx} + \frac{\dot x^2}{bx^2} = c\left(\frac{\dot x}{bx} + \frac{a}{b}\right) - \frac{d}{b}\dot x - \frac{dax}{b}$ ⊛

פתרון של ⊛ $\Leftarrow$ פתרון ל-(①,②)
(נגזר 2 ל-$x(t)$) כאשר y נתון לפי ③

דוגמה

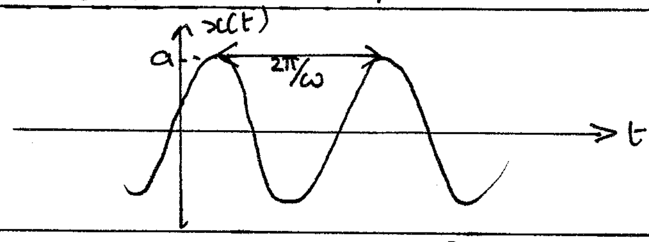
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \iff_{y = dx/dt} \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x \end{cases}$$

פתרון כללי (ראו 3-5)

$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$\Updownarrow$ שקולים

או $x(t) = a\sin(\omega t + \phi)$



תנאי התחלה:
$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot x(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow$$ אפשר למצוא את A, B (או a, ϕ)

פתרון כללי
$$\begin{cases} x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ y(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \end{cases}$$

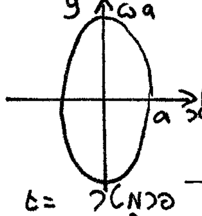
$\Updownarrow$ שקולות

$$\begin{cases} x(t) = a\sin(\omega t + \phi) \\ y(t) = \omega a\cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

התמונה במישור (x,y) היא אליפסה

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\omega^2 a^2} = 1$$

($\omega = 1$: מקבלים מעגל) בכיוון שעון
סיבוב אחד בזמן $2\pi/\omega$.



$t =$ פרמטר באליפסה

תנאי התחלה:
$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow$$ אפשר למצוא את A, B

משוואות דיפרנציאליות ליניאריות והומוגניות

HOMOGENEOUS LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

הערה: מרחב וקטורי (על $\mathbb{R}$) הוא V קבוצה של "וקטורים" שסגורה תחת סכום וכפל ע"י מספר ב-$\mathbb{R}$

$$v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1+v_2 \in V$$
$$v \in V,\ a\in\mathbb{R} \Rightarrow a\cdot v \in V$$

הערה: העתקה ליניארית היא העתקה $T: V \to W$ בין מרחבים וקטוריים כך ש-

$$\left.\begin{aligned} T(v_1+v_2) &= T(v_1)+T(v_2) \\ T(a\cdot v_1) &= a\,T(v_1) \end{aligned}\right\}$$

לכל $v_1, v_2 \in V$, $a\in\mathbb{R}$.

דוגמאות

א) $V = \{$פונקציות רציפות על $[-1,1]\}$

ב) $V = \{ax+be^x \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

$$2(3x+e^x) = 6x+2e^x$$
$$(x+e^x)+(4x-2e^x) = 5x-e^x$$

ג) $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{pmatrix} \middle| \right.$ x_1 ו- x_2 פונק' רציפות על $(-2,1)$ $\left.\right\}$

$= \{ \underline{x}(t) \mid \underline{x}: (-2,1) \xrightarrow[\text{רציפה}]{} \mathbb{R}^2 \}$

דוגמאות

א) $L: y(x) \longmapsto dy/dx + x^2\cdot y(x)$

{פונק' רציפות} ⟶ {פונקציות}

$$L(x^3) = 3x^2 + x^2\cdot x^3$$
$$L(e^x) = e^x + x^2\cdot e^x$$
$$L(x^3+e^x) = (3x^2+e^x) + x^2\cdot(x^3+e^x)$$

ב) $L: \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t)\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \dot{x}_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 - x_1\end{pmatrix} \quad (\cdot \equiv \frac{d}{dt})$

$$L\begin{pmatrix} t \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 0-t\end{pmatrix}$$

משוואה דיפרנציאלית ליניארית

מסדר n (הומוגנית)

$$(*)\quad a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

בדרך כלל $(a_n(x)=1)$

כאשר $\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}, \dots, \frac{a_0(x)}{a_n(x)}$ רציפות על קטע $x_0\in[a,b]$

$$L: y \longmapsto a_n(x)\,y^{(n)} + \dots + a_0(x)\,y$$

פונקציה רציפה $y(x)$

מערכת של משוואות ליניאריות מסדר 1

(הומוגנית)

$$(*)\quad \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \underline{A}(x) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

מטריצה של פונקציות רציפות על $x_0\in[a,b]$

$$L: \underline{y} \longmapsto \frac{d\underline{y}}{dx} - \underline{A}(x)\,\underline{y}$$

פונקציה וקטורית $\underline{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x)\end{pmatrix}$

$$\boxed{Ly = 0}$$

$\boxed{L \text{ העתקה ליניארית}}$

דוגמא

$$y'' + (\sin x)\,y' - x^2 y = 0$$

אפשר לכתוב בצורה $Ly=0$ כאשר L היא העתקה ליניארית

$$L: y(x) \longmapsto y''(x) + (\sin x)\,y'(x) - x^2 y(x)$$

דוגמא

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= xy_1 - y_2 \end{aligned}\right\}$$

אפשר לכתוב בצורה $L\underline{y}=0$ כאשר $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2\end{pmatrix}$

$$L: \underline{y} \longmapsto \underline{y}' - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & -1 \end{pmatrix} \underline{y}$$

נסמן את קבוצת הפתרונות ל-⊛ ב-V

$V = \{$ פונקציות גזירות n פ' $y \mid$ ⊛ $\}$

נסמן את קבוצת הפתרונות ל-⊛ ב-V

$V = \{$ פונקציות וקטוריות גזירות $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \mid$ ⊛ $\}$

טענה: V הוא מרחב וקטורי

$V = \{ y \mid Ly = 0 \}$

נגדיר העתקה $A: V \to \mathbb{R}^n$ ע"י

$$A(y(x)) = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

נגדיר העתקה $T_{x_0}: V \to \mathbb{R}^n$ ע"י

$$T_{x_0}(\underline{y}(x)) = \underline{y}(x_0)$$

טענה: T_{x_0} העתקה ליניארית

טענה: T_{x_0} חח"ע ועל

⇐ מכאן Picard

תנאי התחלה: $y(x_0) = y_1^0, \ \dots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_n^0$; $T_{x_0}(y(x)) = \underline{y}^0$

⇒ מכאן Picard ל מערכת של משוואות דיפרנציאליות

תנאי התחלה: $y_1(x_0) = y_1^0, \ \dots, \ y_n(x_0) = y_n^0$; $T_{x_0}(\underline{y}(x)) = \underline{y}^0$

מסקנה: $\dim V = n$

הגדרה: בסיס ל-V נקרא מערכת יסודית של פתרונות ל-⊛

מסקנה כל קבוצה של n פתרונות בלתי תלויה ליניארית היא מערכת יסודית של פתרונות.

מסקנה יהיו $f_1, \dots, f_n \in V$ (n פתרונות). אזי $\{f_1, \dots, f_n\}$ מערכת יסודית של פתרונות ל-⊛ אם"ם $T_{x_0}(f_1), \dots, T_{x_0}(f_n) \in \mathbb{R}^n$ בלתי תלוים ליניארית (כוקטורים ב-$\mathbb{R}^n$)

$$\begin{vmatrix} f_1(x_0) & \cdots & f_n(x_0) \\ f_1'(x_0) & \cdots & f_n'(x_0) \\ \vdots & & \\ f_1^{(n-1)}(x_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

נקרא ה-Wronskian של $f_1 \cdots f_n$; $W(f_1, \dots, f_n)$

$$\begin{vmatrix} \underline{f_1}(x_0) & \cdots & \underline{f_n}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

הערה אם הWronskian של n פתרונות $f_1 \cdots f_n$ לא מתאפס בנקודה אחת אז הוא אינו מתאפס בכל נקודה אחרת בתחום ההגדרה של הפתרונות.

דוגמא ⊛ $(x-1)y'' - xy' + y = 0$

העתקה L: $L(y(x)) = (x-1)y''(x) - xy'(x) + y(x)$

(בפונקציות על קטע שאינו כולל את $x=1$)

דוגמא: $\boxed{x_0 = 0}$

אפשר לבדוק ש- $\begin{cases} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = x \end{cases}$ הם פתרונות

$\{y_1, y_2\}$ מערכת יסודית של פתרונות

$$W(e^x, x) = \begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix} = (1-x)e^x \neq 0$$

ב- $x = x_0$

$T_0(y_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T_0(y_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ בלתי תלוים ליניארית

לכן הפתרון הכללי הוא: $\boxed{y(x) = ae^x + bx}$

(a, b מספרים קבועים)

תנאי התחלה

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = 2 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{y(x) = e^x + 2x}$$

דוגמא

⊛ $$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1/t & -t \\ 1/t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad t_0 = 1$$

העתקה L:

$$L\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 - (1 + 1/t)x_1 + t x_2 \\ \dot{x}_2 - 1/t \, x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$(\bullet \equiv d/dt)$ (פונקציות $\underline{x}(t): I \to \mathbb{R}^2$ קטע שאינו כולל את 0)

אפשר לבדוק ש- $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 \\ t-1 \end{pmatrix}$ הם פתרונות

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1/t & -t \\ 1/t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1/t & -t \\ 1/t & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t-1 \end{pmatrix}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^2 \\ t-1 \end{pmatrix} \right\}$ מערכת יסודית של פתרונות

(בדוק! $T_1\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T_1\begin{pmatrix} t^2 \\ t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$) בלתי תלוים ליניארית

פתרון כללי: $\boxed{\begin{matrix} x_1(t) = at + bt^2 \\ x_2(t) = a + b(t-1) \end{matrix}}$

תנאי התחלה

$$\begin{cases} x_1(1) = 3 \\ x_2(1) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_1(t) = 4t - t^2 \\ x_2(t) = 5 - t \end{matrix}}$$

איך למצוא מערכת בסיסית למשוואה דיפרנציאלית ליניארית

① משוואות דיפרנציאליות ליניאריות הומוגניות עם מקדמים קבועים
constant coefficients

$$(*)\quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

a_i מספרים קבועים (ממשיים)

יש פתרון בצורה $y=e^{\lambda x}$ כאשר

$$(\#)\quad \boxed{a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0}$$

המשוואה האופיינית characteristic equation

* λ שורש של (#) ⇐ $y=e^{\lambda x}$ פתרון של (*) (בדוק: $a_n\lambda^n e^{\lambda x}+\dots+a_1\lambda e^{\lambda x}+a_0e^{\lambda x}=0$)

* $\lambda=\alpha\pm i\beta$ שורשים של (#) ⇐ $\left.\begin{array}{l} y=e^{\alpha x}\cos\beta x \\ y=e^{\alpha x}\sin\beta x\end{array}\right\}$ פתרונות של (*)

$$\left(e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}\underbrace{(\cos\beta x + i\sin\beta x)}_{e^{i\beta x}}\right)$$

---

* λ שורש מרובה (multiple root) מריבוי (multiplicity) n ⇐ $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{n-1}e^{\lambda x}$ פתרונות של (*)

---

* $\alpha\pm i\beta$ שורשים מריבוי n ⇐
$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x$
$xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x$
$\vdots$
$x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{n-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$
פתרונות של (*)

---

n שורשים של (#) (כולל ריבוי) ⇐ n פתרונות בלתי תלוים ליניארית (מערכת בסיסית)

תנאי התחלה ⇐ ערכים של קבועי אינטגרציה

$y(x_0)=y_0^0$
$y'(x_0)=y_1^0$
$\vdots$
$y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}^0$

דוגמאות

1א) $\boxed{y''-4y'-5y=0}$

$\lambda^2-4\lambda-5=0$

$(\lambda+1)(\lambda-5)=0$ שורשים $\lambda=-1,5$

$\Downarrow$

$y=e^{-x}, e^{5x}$ פתרונות $\Rightarrow \underline{y=Ae^{-x}+Be^{5x}}$ פתרון כללי

1ב) $\boxed{y''-4y'+4y=0}$

$\lambda^2-4\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda=2$ שורש כפול

$\Downarrow$

$y=e^{2x}, xe^{2x}$ פתרונות

$\Downarrow$

פתרון כללי: $\underline{y=(A+Bx)e^{2x}}$ (A, B קבועים)

1ג) $\boxed{y^{(3)}-4y''+5y'=0}$

$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda=0 \Rightarrow \lambda((\lambda-2)^2+1)=0$

$\lambda=0,\ 2\pm i$

$\Downarrow$

פתרונות: $y=\underset{e^{0\cdot x}}{1},\ \underbrace{e^{2x}\cos x,\ e^{2x}\sin x}_{e^{(2\pm i)x}}$

פתרון כללי: $\underline{y=A+e^{2x}(B\cos x+C\sin x)}$

1ד) $\boxed{y^{(4)}+2y''+y=0}$

$\lambda^4+2\lambda^2+1=0 \Rightarrow (\lambda^2+1)^2=0 \Rightarrow \lambda=\pm i$ שורשים כפולים

פתרונות: $y=\cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x$

פתרון כללי: $\underline{y=A\cos x+B\sin x+Cx\cos x+Dx\sin x}$ (A, B, C, D קבועים)

1א') $y(0)=1,\ y'(0)=1$

$\begin{cases} y=Ae^{-x}+Be^{5x} \\ y'=-Ae^{-x}+5Be^{5x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1=A+B \\ 1=-A+5B\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} B=1/3 \\ A=2/3\end{array}$

$\underline{y(x)=\tfrac{1}{3}e^{5x}+\tfrac{2}{3}e^{-x}}$

1ד') $y(0)=1,\ y'(0)=2,\ y''(0)=1,\ y^{(3)}(0)=0$

$y=A\cos x+B\sin x+Cx\cos x+Dx\sin x$
$y'=(B+C)\cos x+(D-A)\sin x+Dx\cos x-Cx\sin x$
$y''=(2D-A)\cos x-(B+2C)\sin x-Cx\cos x-Dx\sin x$
$y^{(3)}=-(B+3C)\cos x+(A-3D)\sin x-Dx\cos x+Cx\sin x$

$\Rightarrow \begin{cases} 1=A \\ 2=B+C \\ 1=2D-A \\ 0=-B-3C\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=3 \\ C=-1 \\ D=1\end{cases}$

$\underline{y=(1-x)\cos x+(3+x)\sin x}$

② משוואות דיפרנציאליות הומוגניות עם מקדמים $a_r(x) \propto x^r$

(*) $a_n x^n y^{(n)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = 0$

($a_0,\dots,a_n$ מספרים קבועים)

פתרון $y = x^\lambda$ ⇔ לכל x מתקיים:

$a_n x^n \cdot \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)x^{\lambda-n} + \cdots + a_1 x \cdot \lambda x^{\lambda-1} + a_0 x^\lambda = 0$

⇔ (#) $\boxed{a_n\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)+\cdots+a_1\lambda+a_0=0}$

נקראת <u>המשוואה האופיינית</u> של (*)

(משוואה פולינומית מסדר n)

n שורשים ⇐ n פתרונות בלתי תלויים ליניארית

<u>הערה</u>

$x^{a+ib} = x^a \cdot x^{ib}$

$= x^a \cdot e^{ib\ln x}$

$= x^a (\cos(b\ln x) + i\sin(b\ln x))$

לכל זוג שורשים $a\pm ib$ של (#) ⇐ $\begin{cases} x^a\cos(b\ln x) \\ x^a\sin(b\ln x) \end{cases}$ פתרונות של (*)

אם λ שורש של (#) מכיבוי m ⇐ $\left.\begin{matrix} x^\lambda \\ x^\lambda(\ln x) \\ \cdots x^\lambda(\ln x)^{m-1} \end{matrix}\right\}$ פתרונות של (*)

<u>הערה</u> יש שקילות בין משוואות דיפרנציאליות מסוג ② ובין משוואות דיפרנציאליות מסוג ① שמתקבלים תחת ההצבה $x=e^t$

$x^\lambda \xleftrightarrow{x=e^t} e^{\lambda t}$

$x^\lambda (\ln x)^\alpha \longleftrightarrow t^\alpha e^{\lambda t}$

$x^a\cos(b\ln x) \longleftrightarrow t^a\cos(bt)$

[ראו את התרגילים על פרק 3]

<u>הערה</u> בכל מקום אפשר להחליף

$|x|^\alpha \longleftrightarrow x^\alpha$, $\ln|x| \longleftrightarrow \ln x$

($x=0$ נקודה סינגולרית של המשוואה דיפרנציאלית (*))

2א

$\boxed{x^2y''+4xy'+2y=0}$

$\lambda^2+3\lambda+2 = \lambda(\lambda-1)+4\lambda+2=0$

שורשים $\lambda=-1,-2$ ⇐ פתרונות $y=x^{-1},x^{-2}$

פתרון כללי: $\underline{y = A/x + B/x^2}$

2ב

$\boxed{x^2y''+3xy'+y=0}$

$\lambda^2+2\lambda+1 = \lambda(\lambda-1)+3\lambda+1=0$

$\lambda=-1$ שורש כפול ⇐ $y=\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\ln x$ פתרונות

פתרון כללי: $\underline{y=(A+B\ln x)/x}$

2ג

$\boxed{x^2y''+3xy'+2y=0}$

$\lambda^2+2\lambda+2 = \lambda(\lambda-1)+3\lambda+2=0$

$(\lambda+1)^2+1$

$\lambda=-1\pm i$ שורשים ⇐ $y=\frac{1}{x}\cos(\ln x)$, $\frac{1}{x}\sin(\ln x)$ פתרונות

פתרון כללי: $\underline{y=\frac{1}{x}(A\cos(\ln x)+B\sin(\ln x))}$

2ד

$\boxed{y(1)=2, y'(1)=3, 4x^2y''+2y=0}$

$4\lambda^2-4\lambda+2=0 \Leftarrow 4\lambda(\lambda-1)+2=0 \Leftarrow y=x^\lambda$

$(2\lambda-1)^2+1$

$\lambda=\frac12\pm\frac{i}{2}$ שורשים ⇐ פתרונות $\sqrt{x}\,{\cos \atop \sin}(\frac12\ln x)$

פתרון כללי $y(x)=\sqrt{x}\,(A\cos(\frac12\ln x)+B\sin(\frac12\ln x))$

$y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(A\cos(\frac12\ln x)+B\sin(\frac12\ln x))$

$+\sqrt{x}\,(-A\sin(\frac12\ln x)\cdot\frac{1}{2x}+B\cos(\frac12\ln x)\cdot\frac{1}{2x})$

$=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left((A+B)\cos(\frac12\ln x)+(B-A)\sin(\frac12\ln x)\right)$

$y(1)=2 \Rightarrow A=2$

$y'(1)=3 \Rightarrow \frac12(A+B)=3 \Rightarrow B=4$

$\underline{y(x)=\sqrt{x}\,(2\cos(\frac12\ln x)+4\sin(\frac12\ln x))}$

③ Reduction of order : הורדת סדר המשוואה

אם ידוע פתרון אחד $y=y_0(x)$

$$(*)\quad a_n(x)y^{(n)}+\dots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

הצבה: $\boxed{y(x)=y_0(x)\cdot v(x)}$

$$y'=y_0v'+y_0'v$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=y_0v^{(n)}+ny_0'v^{(n-1)}+\dots+y_0^{(n)}v$$

(נוסחת Leibnitz)

$$\boxed{a_n\left(y_0v^{(n)}+ny_0'v^{(n-1)}+\dots+y_0^{(n)}v\right)+\dots+a_1(y_0v'+y_0'v)+a_0y_0v=0}$$

מקדם של v: $\quad a_ny_0^{(n)}+\dots+a_1y_0'+a_0y_0=0$

$y=y_0(x)$ פתרון של $(*)$

לכן המשוואה החדשה שקיבלנו ל-v היא משוואה דיפרנציאלית לינארית והומוגנית ל-v' מסדר $n-1$:

$$\boxed{a_ny_0v^{(n)}+(a_nny_0'+a_{n-1}y_0)v^{(n-1)}+\dots+(a_nny_0^{(n-1)}+\dots+a_1y_0)v'=0}$$

לדוגמה: אם $n=2$ מקבלים משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון ל-v' ... אחרי שמוצאים פתרון ל-v', מקבלים את v דרך $\int$

$\Downarrow$

מקבלים את כל הפתרונות של $*$: $\quad y(x)=y_0(x)\cdot v(x)$

דוגמא ⓐ

$$(*)\quad \boxed{xy''-(x+1)y'+y=0}$$

$y_0=e^x$ פתרון: $\quad x\cdot e^x-(x+1)e^x+e^x=0\ \checkmark$

$$y=e^x\cdot v\ \Rightarrow\ y'=e^x(v+v')$$

$$y''=e^x(v+2v'+v'')$$

$$(*)\Rightarrow\ x(v+2v'+v'')-(x+1)(v+v')+v=0$$

$$\Rightarrow\ xv''+(x-1)v'=0$$

$$w=v'\ \Rightarrow\ \boxed{xw'+(x-1)w=0}$$

$$\int\frac{dw}{w}=\int\frac{1-x}{x}\,dx+\text{קבוע}$$

$$\ln w=\ln x-x+\text{קבוע}$$

$$\underline{\underline{w=Cxe^{-x}}}$$

$$w=v'\ \Rightarrow\ v=C\int xe^{-x}dx+\text{קבוע}$$

$$=C\left(x\int e^{-x}dx-\int\left(\int e^{-x}dx\right)dx\right)+\text{קבוע}$$

$$=\underline{\underline{C(-xe^{-x}-e^{-x})+D}}$$

$$y=e^x\cdot v\ \Rightarrow\ \underline{\underline{y=C(-x-1)+De^x}}$$

ⓑ למציאת פתרון אחד y_0, לפעמים כדאי לחפש פתרון בצורה

— לינארית. לדוגמה: $(1+x^2)y''-(x+3)y'+y=0$

$$\begin{matrix}y=Ax+B\\ y'=A\\ y''=0\end{matrix}\ \Rightarrow -(x+3)A+y=0\ \Rightarrow\ B=3A \text{ -ל פתרון}$$

(נ"א $y=x+3$ פתרון)

— e^{ax} (כמו ב-ⓐ)

לדוגמה: $(x^2+x)y''-(x^2+1)y'+(1-x)y=0$

$$x^2+x-(x^2+1)+(1-x)=0$$

$\Rightarrow\ y=e^x$ פתרון

מערכות של משוואות דיפרנציאליות לינאריות

מסדר ראשון שמקדמיהן קבועים (הומוגניות).

$$\frac{d\underline{y}}{dx} = \underline{A}\,\underline{y}$$

$\underline{A}$: מטריצה $n \times n$

$\underline{y}$: פונקציה וקטורית $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$

דוגמא 1

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 4y_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{y}' = \underline{A}\,\underline{y} \leftarrow \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},\ \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$\underline{y} = e^{\lambda x}\underline{v}$ ($\underline{v}$ וקטור קבוע) פתרון אמ"מ $\underbrace{\lambda e^{\lambda x}\underline{v}}_{dy/dx} = \underline{A}(e^{\lambda x}\underline{v})$

אמ"מ $\lambda \underline{v} = \underline{A}\underline{v}$

λ כך שקיים וקטור $\underline{v} \neq \underline{0}$ כך ש- $\lambda\underline{v} = \underline{A}\underline{v}$

נקרא ערך עצמי (eigenvalue) ווקטור $\underline{v}$ נקרא וקטור עצמי (eigenvector)

$$\left(\begin{aligned} &\text{קיים } \underline{v} \neq \underline{0} \\ &(\underline{A} - \lambda\underline{I})\,\underline{v} = \underline{0} \end{aligned}\right) \Leftrightarrow \left(\det(\underline{A} - \lambda\underline{I}) = 0\right)$$

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

משוואה אופיינית (characteristic equation)

פולינום אופייני (עד כדי סימן) (characteristic polynomial)

שורשים = ערכים עצמיים

λ ערך עצמי

$\Leftarrow \det(\underline{A} - \lambda\underline{I}) = 0$

$\Leftarrow$ קיים $\underline{v} \neq \underline{0}$ כך ש- $(\underline{A} - \lambda\underline{I})\underline{v} = 0$

$\underline{v}$ = וקטור עצמי

משוואה אופיינית:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda = 2, 3$$

ערכים עצמיים

$$\underline{v} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}_{\underline{A}-\lambda\underline{I}} \underline{v} = \underline{0} \Leftarrow \lambda = 2$$

$$\underline{v} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0} \Leftarrow \lambda = 3$$

פתרונות: $\underline{y} = e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

פתרון כללי: $\underline{y} = Ae^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Be^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

אם כל השורשים של המשוואה האופיינית אינם מרובים (רבויים $n=1$)

אז קיימים n שורשים ו- n פתרונות בצורה $e^{\lambda x}\underline{v}$

אם יש שורש מרובה, יכול להיות שאין מספיק

פתרונות בצורה $e^{\lambda x}\underline{v}$!

$\underline{y} = xe^{\lambda x}\underline{v} + e^{\lambda x}\underline{w}$ פתרון $\Leftrightarrow$ $(\lambda x e^{\lambda x} + e^{\lambda x})\underline{v} + \lambda e^{\lambda x}\underline{w} = \underline{A}(xe^{\lambda x}\underline{v} + e^{\lambda x}\underline{w})$

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda\underline{v} &= \underline{A}\underline{v} \\ \underline{v} + \lambda\underline{w} &= \underline{A}\underline{w} \end{aligned}\right\}$$

(מקדם של $xe^{\lambda x}$)

(מקדם של $e^{\lambda x}$)

$$\Updownarrow$$

$$\left.\begin{aligned} (\underline{A} - \lambda\underline{I})\underline{v} &= 0 \\ (\underline{A} - \lambda\underline{I})\underline{w} &= \underline{v} \end{aligned}\right\}$$

λ = ערך עצמי, $\underline{v}$ = וקטור עצמי

$\underline{w}$ = secondary vector

$$\underline{w} \xrightarrow{\underline{A}-\lambda\underline{I}} \underline{v} \xrightarrow{\underline{A}-\lambda\underline{I}} \underline{0}$$

דוגמא 2

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{y}' = \underline{A}\,\underline{y} \qquad \underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

משוואה אופיינית:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

ערך עצמי

$$\underline{v} = C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}-\lambda\underline{I}} \underline{v} = \underline{0} \Leftarrow \lambda = 2$$

[צורת Jordan של $\underline{A}$ היא $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$]

$\boxed{\text{פתרון } e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

$$\underline{w} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{+\text{קבוע}\cdot\underline{v}} \Leftarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{w} = \underline{v},\quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{פתרון } xe^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

פתרון כללי: $\underline{y} = Ae^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + B\left[xe^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2x}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

בבלוק 2×2 Jordan לערך עצמי λ $\Leftarrow$ קיימים וקטורים $\underline{v}, \underline{w}$

$\Leftarrow$ פתרונות $e^{\lambda x}\underline{v},\ xe^{\lambda x}\underline{v} + e^{\lambda x}\underline{w}$

התנהגות הפתרונות למערכת של 2 משוואות דיפרנציאליות ליניאריות והומוגניות עם מקדמים קבועים

$x = \binom{x_1}{x_2}$, $x' = Ax$ ⟿ משוואה אופיינית $\det(A - \lambda I) = 0$ היא משוואה ריבועית

A מטריצה קבועה 2x2

מקרים: ① שורשים ממשיים ושונים $\lambda_1 \neq \lambda_2$

② שורשים מרוכבים $a \pm ib$

③ שורש (ממשי) כפול λ (וקטור עצמי אחד)

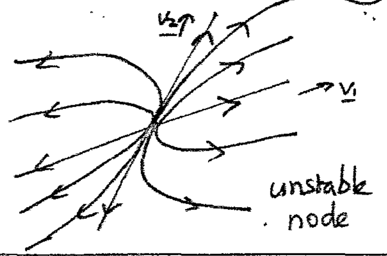
④ $A = \lambda I$

תמונות של הפתרונות במישור x_1, x_2:

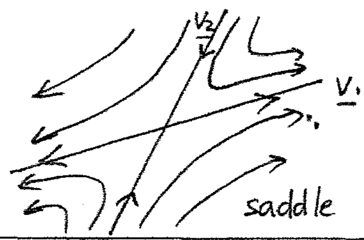
(כיוון החץ: t עולה)

① $x = Ae^{\lambda_1 t}v_1 + Be^{\lambda_2 t}v_2$

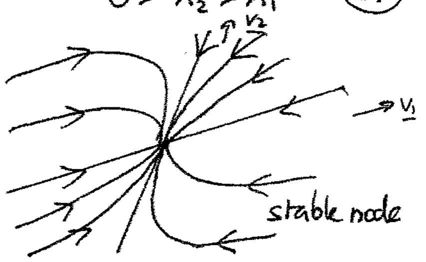
1א $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$



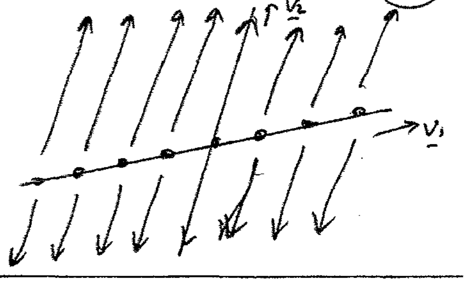
1ב $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$



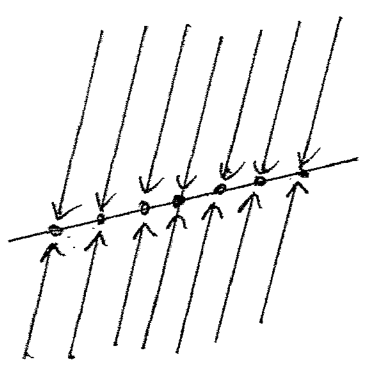
1ג $0 > \lambda_2 > \lambda_1$



1ד $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$



1ה $\lambda_1 = 0 > \lambda_2$



② $\lambda = a \pm ib$, $v \pm iw$
ערך עצמי, וקטור עצמי

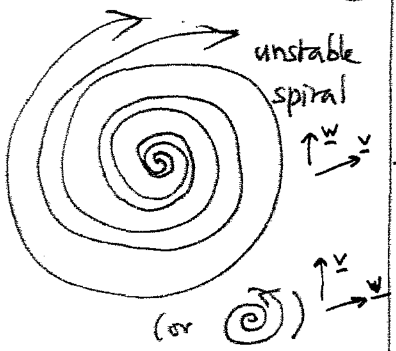
$e^{(a+ib)t}(v + iw)$

$= [(e^{at}\cos bt)v - (e^{at}\sin bt)w]$

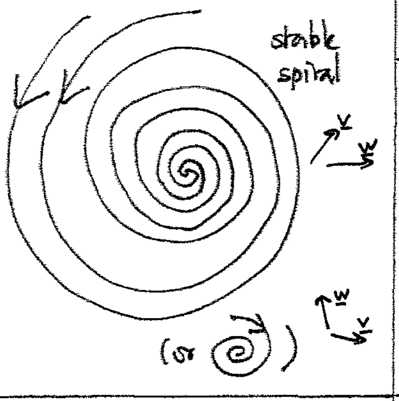
$+ i[(e^{at}\cos bt)w + (e^{at}\sin bt)v]$

החלק הממשי
החלק המרוכב } פתרונות

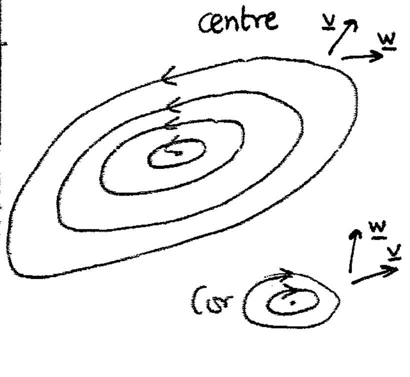
2א $a \pm ib$, $a > 0$



2ב $a \pm ib$, $a < 0$

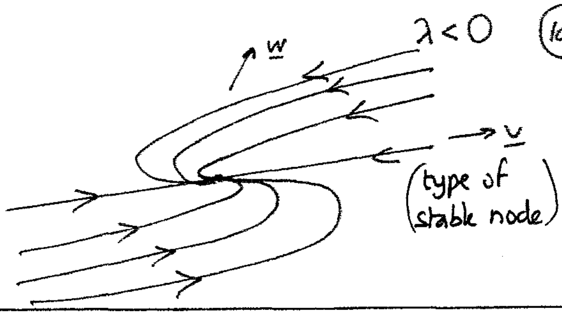


2ג $a \pm ib$, $a = 0$

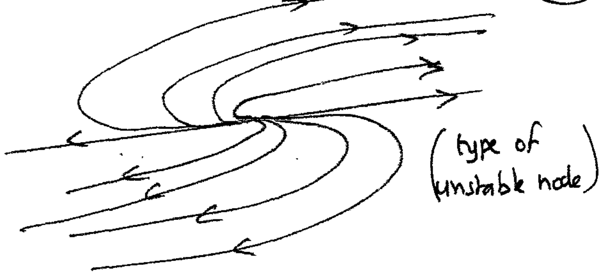


③ $x = Ae^{\lambda t}v + B(te^{\lambda t}v + e^{\lambda t}w)$

3א $\lambda < 0$

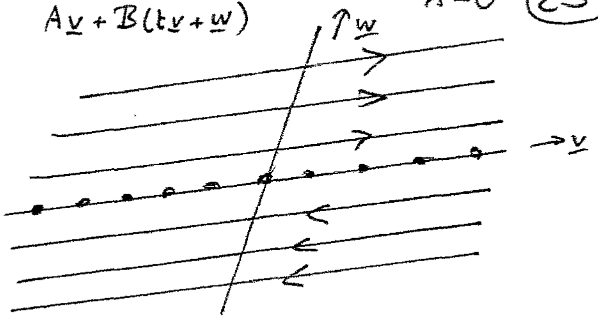


3ב $\lambda > 0$



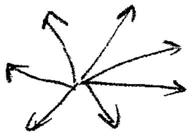
3ג $\lambda = 0$

$Av + B(tv + w)$



④ $x = e^{\lambda t}v$

4א $\lambda > 0$



(type of unstable node)

4ב $\lambda < 0$

(type of stable node)

4ג $\lambda = 0$

כל x קבוע
הוא פתרון!

דינמיות

$$\left.\begin{aligned}\dot x_1 &= x_2\\ \dot x_2 &= x_1\end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x},\quad \underline{A} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

משוואה אופיינית:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\underline{v} = C\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \Leftarrow \underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}}_{\underline{A}-\lambda \underline{I}}\underline{v} = \underline{0} \Leftarrow \lambda = 1$$

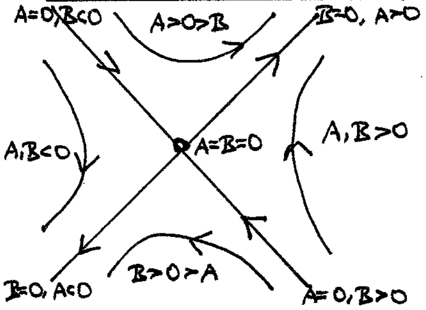
$$\underline{v} = C\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\underline{v} = \underline{0} \Leftarrow \lambda = -1$$

פתרון כללי:

$$\underline{x} = Ae^{t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + Be^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$A, B \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases}\underline{x} \sim Ae^{t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} & t \to \infty\\ \underline{x} \sim Be^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} & t \to -\infty\end{cases}$$



(ב1)

$$\left.\begin{aligned}\dot x_1 &= -x_2\\ \dot x_2 &= 2x_1 - 2x_2\end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x},\quad \underline{A} = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

משוואה אופיינית

$$\begin{vmatrix}-\lambda & -1\\ 2 & -2-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \pm i$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{v} = \text{קבוע}\begin{pmatrix}1\\ 1\mp i\end{pmatrix} \Leftarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1\mp i & -1\\ 2 & -1\mp i\end{pmatrix}}_{\underline{A}-\lambda \underline{I}}\underline{v} = \underline{0}$$

פתרון כללי:

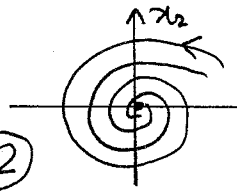
$$\underline{x} = Ae^{(-1+i)t}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix} + Be^{(-1-i)t}\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}$$

$$e^{(-1+i)t}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix} = e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t + i\sin t\\ (\cos t+\sin t) + i(\sin t - \cos t)\end{pmatrix}$$

החלק הממשי והחלק המדומה נותנים 2 פתרונות ממשיים

$\Leftarrow$ פתרון כללי:

$$\underline{x} = Ce^{-t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix} + De^{-t}\begin{pmatrix}\sin t\\ \sin t - \cos t\end{pmatrix}$$



כאשר $\underline{x} \to \underline{0}$, $t \to \infty$

כיוון: נגד השעון

אותו כיוון של $\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix}$

$\cos t\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \sin t\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} =$ (אליפסה)

(ב2)

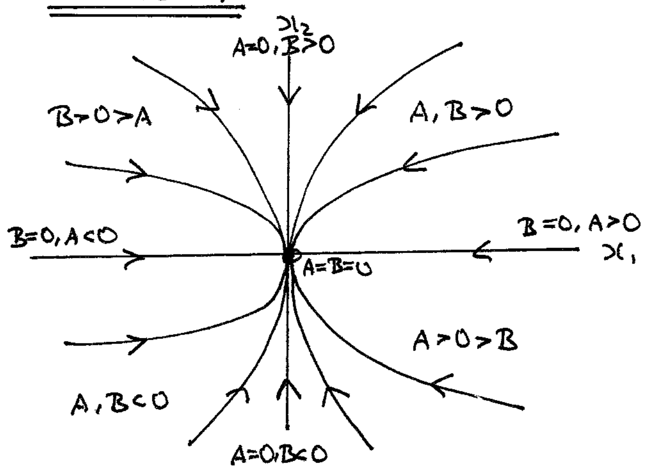
$$\left.\begin{aligned}\dot x_1 &= -2x_1\\ \dot x_2 &= -x_2\end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x}\qquad \underline{A} = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

ערכים עצמיים $-2, -1$

וקטורים עצמיים $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

פתרון כללי: $\underline{x} = Ae^{-2t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + Be^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix}Ae^{-2t}\\ Be^{-t}\end{pmatrix}$$



כאשר $t \to \infty$, $\underline{x} \to \underline{0}$

$$B \neq 0 \Rightarrow x_1 = A/B^2\, x_2^2 \quad (\text{פרבולה})$$

(ג1)

$$\left.\begin{aligned}\dot x_1 &= x_1 - x_2\\ \dot x_2 &= 2x_1 - x_2\end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x},\quad \underline{A} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

משוואה אופיינית:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{v} = \text{קבוע}\begin{pmatrix}1\\ 1\mp i\end{pmatrix} \Leftarrow \underbrace{\begin{pmatrix}1\mp i & -1\\ 2 & -1\mp i\end{pmatrix}}_{\underline{A}-\lambda \underline{I}}\underline{v} = \underline{0}$$

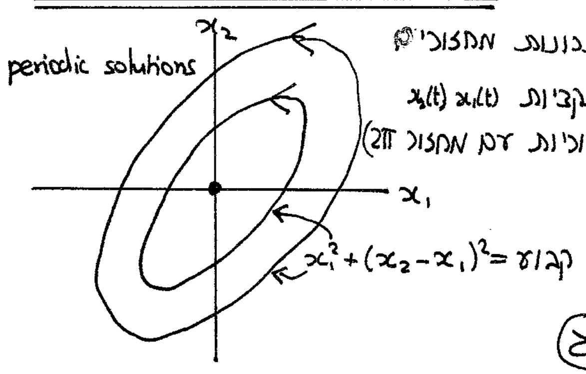
פתרון כללי:

$$\underline{x} = Ae^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix} + Be^{-it}\begin{pmatrix}1\\1+i\end{pmatrix}$$

$$e^{it}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t + i\sin t\\ (\cos t+\sin t) + i(\sin t - \cos t)\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ פתרון כללי:

$$\underline{x} = C\begin{pmatrix}\cos t\\ \cos t+\sin t\end{pmatrix} + D\begin{pmatrix}\sin t\\ \sin t - \cos t\end{pmatrix}$$



פתרונות מחזוריים (הפונקציות $x_1(t)$ $x_2(t)$ מחזוריות עם מחזור 2π)

(ג2)

דוגמאות של התנהגות של פתרונות של מד"ר ליניאריות והומוגניות מסדר 2 עם מקדמים קבועים

קפיץ מרוסן
DAMPED SPRING

$(\dot{} \equiv d/dt, \ \ \ddot{} \equiv d^2/dt^2)$

$x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$

(כוח)

$m\ddot{x} = -kx - c\dot{x}$ ⊛

מסה, קפיץ, "damping"

$m>0$, $k>0$, $c\geq 0$ ריסון

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k/m\, x_1 - c/m\, x_2 \end{cases}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -c/m \end{pmatrix}$$

משוואה אופיינית

$$\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \frac{k}{m} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k/m & -c/m-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$m\lambda^2 = -k - c\lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{2m}\left(-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}\right)$$

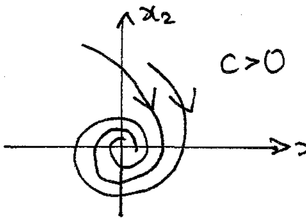
מקרה א': $c^2 < 4km$
תת-ריסון
UNDER-DAMPED

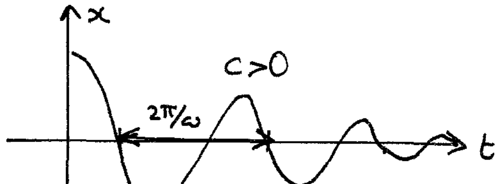
$$\lambda_1, \lambda_2 = -\frac{c}{2m} \pm i\underbrace{\frac{\sqrt{4km-c^2}}{2m}}_{\omega}$$

פתרונות:

$$x(t) = e^{-ct/2m}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

2ב

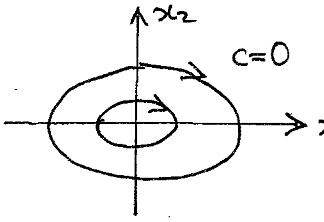




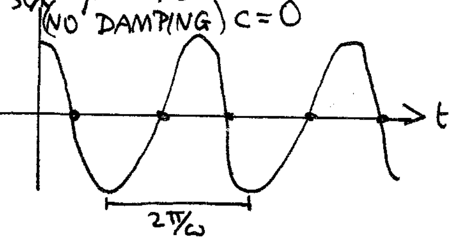
ניתן לצהות הכיוון ע"י $\dot{x}_1 = x_2$:
כאשר $x_2>0$ גם $\dot{x}_1>0$ (x עולה)

מספר אינסופי של פתרונות ל- $x(t)=0$ לכל פתרון $x=x(t)$ של ⊛

2ג



ללא ריסון (NO DAMPING) $c=0$



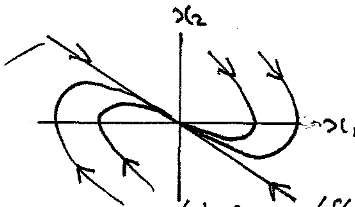
מקרה ב': $c^2 = 4km$
ריסון קריטי
CRITICAL DAMPING

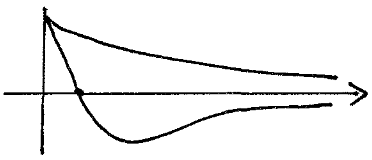
$$\lambda = -c/2m$$

$$x(t) = e^{-ct/2m}(A + Bt)$$

כיוון $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -c/2m \end{pmatrix}$

3א





וקטור עצמי:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -c/2m \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} c/2m & 1 \\ -k/2m & -c/2m \end{pmatrix}\underline{v} = \underline{0}$$ (או · קבוע)

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} c/2m & 1 \\ -k/2m & -c/2m \end{pmatrix}\underline{w} = \underline{v}$$

$$\underline{x} = Ae^{-ct/2m}\begin{pmatrix} 1 \\ -c/2m \end{pmatrix} + B\left[te^{-ct/2m}\begin{pmatrix} 1 \\ -c/2m \end{pmatrix} + e^{-ct/2m}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

מספר השורשים ל- $x(t)=0$ הוא 0 או 1 לכל פתרון $x=x(t)$ של ⊛

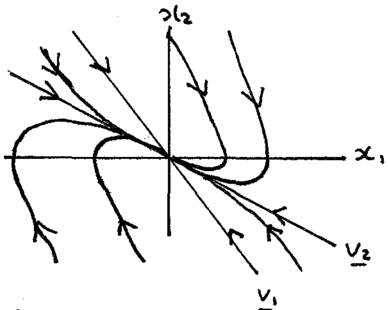
מקרה ג': $c^2 > 4km$
ריסון יתר
OVER DAMPING

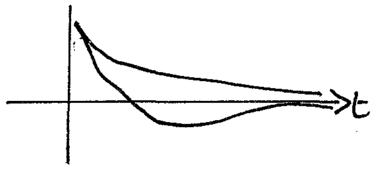
$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$$

$$\lambda_i = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

1ג





(כיוון של $\underline{x}$) $\rightarrow$ $\begin{cases} \text{כיוון של } \underline{v}_1 & t\to-\infty \\ \text{כיוון של } \underline{v}_2 & t\to+\infty \end{cases}$
$[A, B \neq 0]$

$$\underline{x}(t) = Ae^{\lambda_1 t}\underline{v}_1 + Be^{\lambda_2 t}\underline{v}_2, \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}, \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

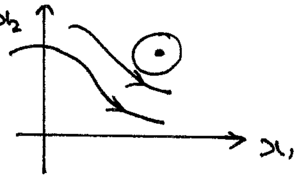
מערכת של שתי משוואות דיפרנציאליות אי-ליניאריות מסדר ראשון, שאינה תלויה ב-t

"PHASE PLANE ANALYSIS"/LINEARISATION

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)\\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)\end{array}\right. \quad ⊛$$

לא תלוי ב-t

← קבוצה של פתרונות $\underline{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{pmatrix}$ ← תמונה במישור x_1x_2



(חץ = כיוון של t עולה)

<u>תכונות:</u>

* לכל פתרון $\underline{x}(t)$, גם $\underline{x}(t+a)$ פתרון והתמונות שוות במישור (x_1,x_2)
* שתי "מסילות" שונות לא חותכות זו את זו:
* תמונה של פתרון לא חותכת עצמה

$$\left\{\begin{array}{l}f_1(x_1^0,x_2^0)=0\\ f_2(x_1^0,x_2^0)=0\end{array}\right. \longleftrightarrow$$ פתרון קבוע $x_1(t)=x_1^0$, $x_2(t)=x_2^0$ ⟷ תמונה = נקודה

equilibrium/steady-state solution
שיווי משקל

אומרים ש- (x_1^0,x_2^0) <u>נקודת שבת</u>
fixed point
equilibrium point

בסביבה של נקודת שבת (x_1^0,x_2^0):

$$\left\{\begin{array}{l}x_1=x_1^0+h\\ x_2=x_2^0+k\end{array}\right.$$

$$f_1(x_1,x_2)=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}h+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}k+ \text{סדר שני}$$

$$f_2(x_1,x_2)=\frac{\partial f_2}{\partial x_1}h+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}k+ \text{סדר שני}$$

בנקודה (x_1^0,x_2^0)

$$\Leftarrow \begin{pmatrix}\dot h\\ \dot k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2\\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix} + \text{סדר שני} \Leftarrow$$

התנהגות תמונת הפתרונות של ⊛ במישור x_1x_2 בסביבת הנק' (x_1^0,x_2^0) היא כהתנהגות הפתרונות למערכת ליניארית

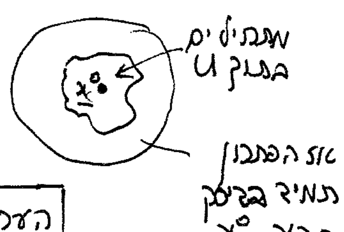
$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x}}$$ ← "linearisation of ⊛ near $\underline{x}^0$"
ליניאריזציית המשוואה סביב $\underline{x}^0$

כאשר
$$\underline{A} = \begin{pmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2\\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2\end{pmatrix} = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)}$$
(בכתיבה = יעקוביאן)

A היא הנגזרת $D\underline{f}$ של הפונקציה $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}f_1(x_1,x_2)\\f_2(x_1,x_2)\end{pmatrix}$ בנקודה (x_1^0,x_2^0)

אומרים שנקודת שבת $\underline{x}^0$ <u>יציבה</u> stable אם"ם (לכל $\varepsilon>0$, קיימת סביבה U של $\underline{x}^0$ כך שלכל תנאי התחלה $\underline{x}(0)=\underline{x}'$ כאשר $\underline{x}'\in U$ הפתרון כך ש- $\|\underline{x}(t)-\underline{x}^0\|<\varepsilon$ לכל $t>0$)

ז"א (לכל תנאי התחלה מספיק קרוב ל-$\underline{x}^0$, הפתרונות קרובים ל-$\underline{x}^0$ כרצוננו לכל זמן $t>0$)



<u>הערות</u> * למערכת ליניארית והומוגנית, $\underline{x}^0=\underline{0}$ תמיד נקודת שבת (דף 3-17) ← במקרים 1ב,א, 2ב,ב, 3א, 4ב,ב, $\underline{x}^0=\underline{0}$ נקודת שבת יציבה

* לנקודת שבת יציבה, פתרון עם תנאי התחלה קרוב ל-$\underline{x}^0$ <u>לא</u> חייב לשאוף ל-$\underline{x}^0$ כאשר $t\to\infty$ (כאן דף 3-17 מקרה 2ב)

<u>הערה</u> היציבות של נקודת שבת $\underline{x}^0$ תלויה בערכים העצמיים של הנגזרת $D\underline{f}$ של $(\underline{f})$ ב-$\underline{x}^0$

דוגמאות

מטוטלת (מתמטית)
Oscillating pendulum (א)

$$\ddot\theta + \sin\theta = 0$$

$$\left.\begin{aligned}\dot x_1 &= x_2\\ \dot x_2 &= -\sin x_1\end{aligned}\right\} \quad x_1=\theta,\ x_2=\dot\theta$$

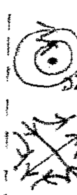
$$\left.\begin{aligned}x_2&=0\\ \sin x_1&=0\end{aligned}\right\} \Leftarrow \text{נקודת שבת}$$

$$\underset{n\in\mathbb{Z}}{\underline{(x_1,x_2)=(n\pi,0)}} \Leftarrow$$

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -\cos x_1 & 0\end{pmatrix} \Leftarrow \begin{cases} f_1 = x_2\\ f_2 = -\sin x_1\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ (-1)^{n+1} & 0\end{pmatrix} \ : \ (n\pi,0)$$

$\dot x_1 = x_2 \Rightarrow \left.x_2>0\right\}$ x_1 עולה



כיוון הסיבוב

יציבה

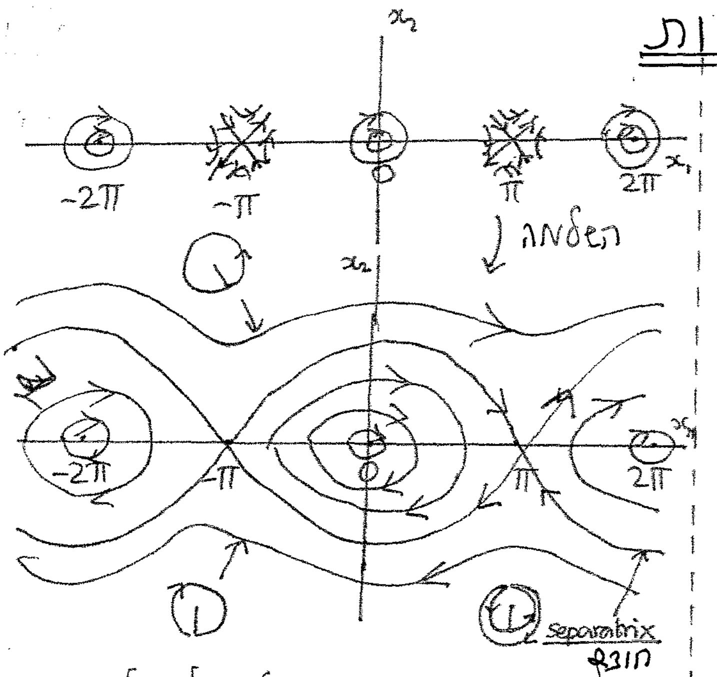
$\lambda^2+1=0$, $\lambda=\pm i$ $\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \Leftarrow$ n זוגי

$\lambda^2-1=0$, $\lambda=\pm1$ $\quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \Leftarrow$ n אי זוגי

לא יציבה

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\lambda=1$

$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\lambda=-1$



פוטנציאל של $\sin\theta$ $\quad \phi(\theta) = -\cos\theta$

(ג) $\Rightarrow \boxed{\frac12\dot\theta^2 - \cos\theta = \text{קבוע}}$

(ב)

$[-f/m = \text{כוח}]$ $\quad (*)\ \ddot x + f(x) = 0$

$$\left.\begin{aligned}\dot x_1 &= x_2\\ \dot x_2 &= -f(x_1)\end{aligned}\right\} \quad x_1=x,\ x_2=\dot x$$

נקודת שבת $(a,0)$ כאשר $f(a)=0$

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x_1,x_2)} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -f'(a) & 0\end{pmatrix} \Leftarrow \begin{cases} f_1 = x_2\\ f_2 = -f(x_1)\end{cases}$$

$\Downarrow$

משוואה אופיינית

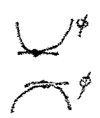
$$\lambda^2 + f'(a) = 0$$

יציבה $\quad \lambda = \pm i\sqrt{f'(a)} \Leftarrow f'(a)>0$

לא יציבה $\quad \lambda = \pm\sqrt{-f'(a)} \Leftarrow f'(a)<0$

פונקציה ϕ היא כך ש- $\phi'(x)=f(x)$

נקודת שבת $(a,0)$ כאשר $\phi'(a)=0$



$\phi''(a)>0$: יציבה

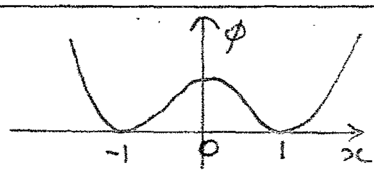
$\phi''(a)<0$: לא יציבה

פתרון של $(*)$: $\ v = dx/dt \Rightarrow \ddot x = v\, dv/dx$

$$v\frac{dv}{dx} + \phi'(x) = 0 \Leftrightarrow (*)$$

$$\int v\,dv + \int\phi'(x)\,dx = 0 \Leftarrow$$

$$\boxed{\underbrace{\tfrac12 v^2}_{\text{אנרגיה קינטית}} + \underbrace{\phi(x)}_{\text{אנרגיה פוטנציאלית}} = \text{קבוע}}$$



דוגמא: $\phi(x) = (x^2-1)^2$

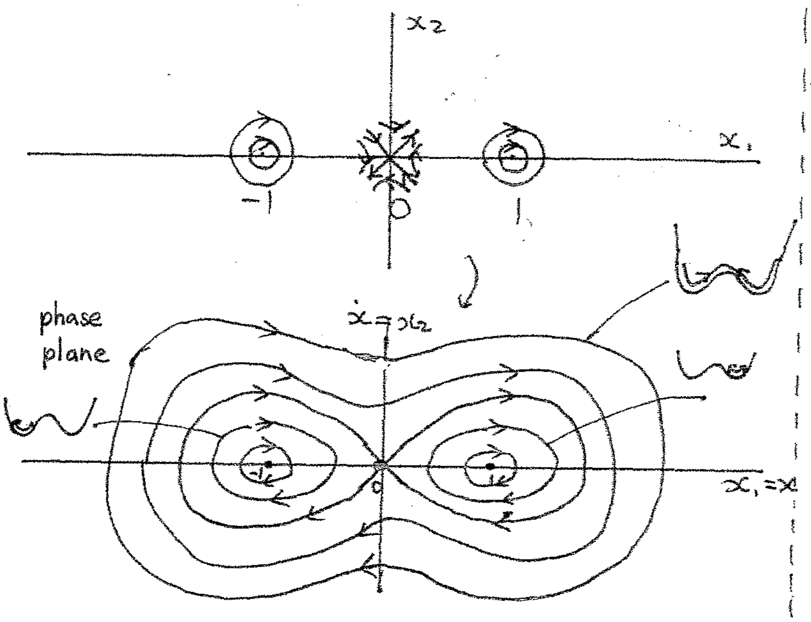
$f(x) = 4x(x^2-1)$ $\quad (f=\phi')$

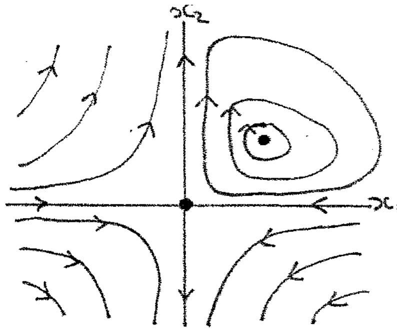
$$(*)\ \ddot x + 4x(x^2-1) = 0$$

נקודת שבת $(a,0)$ כאשר $f(a)=0$

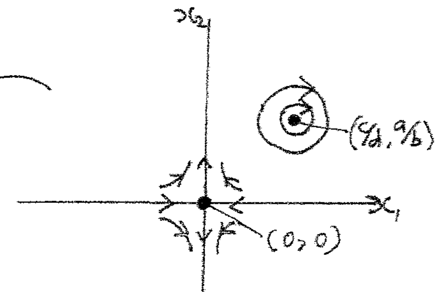
$\underline{a = 0, \pm1}$

$\phi''<0$	$\phi''>0$
$(f'<0)$	$(f'>0)$
לא יציבה	יציבה
unstable equilibrium	stable equilibria





תמונה מלאה



נקודות שבת וסביבתן

(ג)

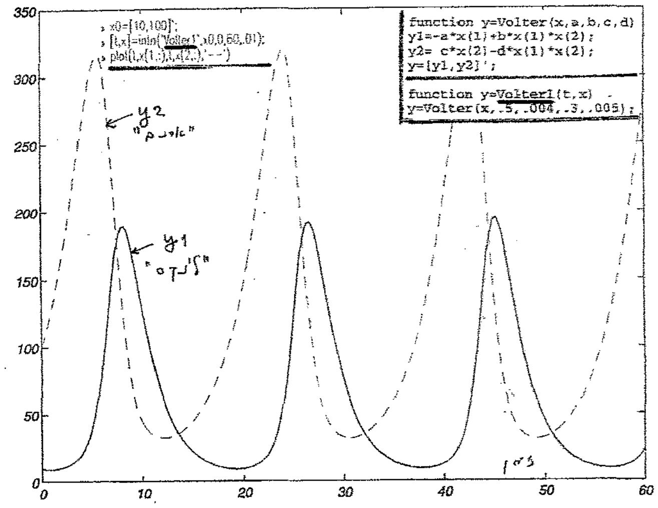
Preditor – Prey Model (x – Preditor, y – Prey)

$$\left.\begin{aligned} dx/dt &= -ax + bxy \\ dy/dt &= cy - dxy \end{aligned}\right\} \quad a,b,c,d>0 \text{ קבועים}$$

$$\left.\begin{aligned} -ax+bxy &= 0 \\ cy-dxy &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftarrow \underline{\text{נקודת שבת}}$$

$$\left.\begin{aligned} y=a/b \ \text{או}\ x=0 \\ x=c/d \ \text{או}\ y=0 \end{aligned}\right\} \Leftarrow$$

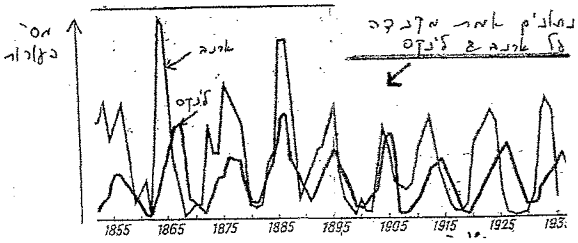
$$\underline{\underline{(x,y) = (0,0),\ (c/d,\ a/b)}} \Leftarrow$$



$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} -a+by & bx \\ -dy & c-dx \end{pmatrix} \Leftarrow \left\{\begin{aligned} f_1 &= -ax+bxy \\ f_2 &= cy-dxy \end{aligned}\right.$$

$(0,0)$: $\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ $\quad \lambda = -a, c$ $\quad \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ (לא יציבה)

$(c/d, a/b)$: $\begin{pmatrix} 0 & bc/d \\ -ad/b & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \lambda^2+ac=0$, $\quad \lambda = \pm i\sqrt{ac}$ (יציבה)



מא. נוימרק

<u>הערות</u> * במקרה שמערכת המשוואות מגיעה ממשוואת תנועה $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f(x_1, x_2) \end{aligned}\right\}$$

המישור x_1, x_2 נקרא PHASE PLANE (מישור הפאזה)

לפעמים משתמשים ב- x, p במקום $x, \dot{x}$ ($p = m\dot{x}$)

* אפשר לקבל הערכה טובה על ההתנהגות הפתרונות (ז"א על צורת התמונה של המערכת במישור הפאזה) רק מהנקודות שבת וההתנהגות של המערכת בסביבתן (מהקירוב ליניארי למערכת בסביבה של נקודת שבת)