פרק 3: משוואות דיפרנציאליות רגילות (מד"ר)

ORDINARY DIFFENTIAL EQUATIONS (ODEs)

משוואה דיפרנציאלית היא משוואה לפונקציה ונגזרותיה

משוואה דיפרנציאלית רגילה (מד"ר) (ODE) ordinary differential equation

היא משוואה לפונקציה של משתנה אחד ($x(t)$ או $y(x)$) ומופיעות בה נגזרות רגילות של הפונקציה... $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}$ או $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\dots$

משוואה דיפרנציאלית חלקית (מד"ח) (PDE) partial differential equation

היא משוואה לפונקציה של כמה משתנים ($f(x,y)$) ומופיעות בה נגזרות חלקיות של הפונקציה ($\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial^2 f/\partial x^2, \dots \Delta f, \dots$)

מערכת של משוואות דיפרנציאליות

היא קבוצה של משוואות דיפרנציאליות למספר פונקציות של משתנה אחד (אם רגילה) / כמה משתנים (אם חלקית)

משוואה דיפרנציאלית רגילה כללית ל-$y=y(x)$:

$$(*)\quad y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots y'', y', y, x)$$

פונק' נתונה

$y^{(n)} \equiv \frac{d^n y}{dx^n}$

- n נקרא **הסדר** (order) של (*)
- אם f נתונה ע"י פונקציה סתומה $G(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0$ ו-G פולינום ב-$y^{(n)}$ ממעלה d, אז d נקרא **המעלה** (degree) של (*)
- אם f תלוי ב-$y, y', \dots, y^{(n-1)}$ בצורה ליניארית, אז אומרים ש-(*) **ליניארית**

$$y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y + b(x)$$

משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר n

הומוגנית : $b(x)=0$

אי-הומוגנית : $b(x)\neq 0$

מקדמים קבועים : $a_0(x)\dots a_{n-1}(x)$ לא תלויים ב-x

דוגמאות

א. $d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$ — ODE (מד"ר) oscillator (SHM) מתנד

ב. $\Delta V = \rho$ — PDE, Poisson equation $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \rho\right)$

ג. $\partial^2 f/\partial x^2 + \partial^2 f/\partial y^2 = -\frac{1}{c^2}\partial^2 f/\partial t^2$ — PDE, משוואת גלים wave equation

ד. predator-prey model

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + bxy \\ \frac{dy}{dt} = cy - dxy \end{cases}$$

מערכת של משוואות דיפרנציאליות רגילות (לפונקציות $x(t), y(t)$)

ה. משוואות Maxwell

$$\begin{cases} \nabla\cdot E = \rho/\varepsilon \\ \nabla\cdot B = 0 \\ \nabla\wedge E = -\partial B/\partial t \\ \nabla\wedge B = \mu j + \mu\varepsilon\, \partial E/\partial t \end{cases}$$

מערכת של משוואות דיפרנציאליות חלקיות (לפונקציות E, B של x,y,z,t)

ו. $d^3y/dx^3 = (d^2y/dx^2)^2 + y^2(dy/dx)^2 + y - e^x$

סדר 3

ז. $(d^2y/dx^2)^2 = \sin(dy/dx) - \cos y + x$

סדר 2
מעלה 2

ח. $d^2y/dx^2 = \underline{-\sin x + y}$

סדר 2

ליניארית, אי-הומוגנית $\begin{cases} a_0(x) = 1 \\ a_1(x) = 0 \\ b(x) = -\sin x \end{cases}$

ט. $d^2y/dx^2 = -(\sin x)\cdot y$

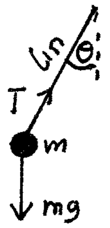
ליניארית והומוגנית $\begin{cases} a_0(x) = -\sin x \\ a_1(x) = b(x) = 0 \end{cases}$

י. $d^2y/dx^2 = 5\, dy/dx - 4y + e^x$

ליניארית ואי-הומוגנית, מקדמים קבועים $\begin{cases} a_0 = -4,\ a_1 = 5 \\ b(x) = e^x \end{cases}$

דוגמאות שימושיות

א:



אורך המטוטלת l = length of pendulum

T = tension, מתיחות

m = mass, מסה

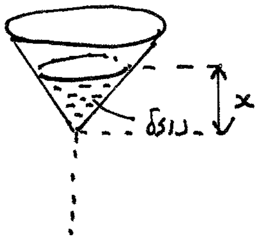
$$ma = F$$

כיוון רוחבי $\quad ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$

$$\ddot{\theta} = -\tfrac{g}{l}\sin\theta$$

סדר 2   אי לינארית

ב:



נפח של נוזל $\propto x^3$

δ(נפח של נוזל) = −(נוזל שיוצא)

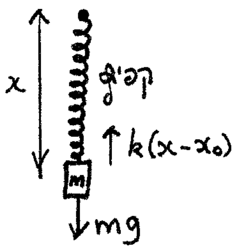
$$\frac{d}{dt}(x^3) = -\lambda x$$

$$3x^2\dot{x} = -\lambda x$$

$$\dot{x} = -\lambda/3x$$

סדר ראשון   אי-לינארית

ג:



קבוע אלסטי k = spring constant

x_0 = natural length אורך טבעי

$$F = ma$$

$$mg - k(x-x_0) = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{k}{m}(x-x_0)$$

סדר 2   לינארית

אי-הומוגנית

פתרונות של משוואות דיפרנציאליות

פתרון של משוואה דיפרנציאלית

≡ פונקציה שמקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית

קיים מספר אין סופי של פתרונות למשוואה דיפרנציאלית ולקבלת פתרון יחיד, צריך **תנאי התחלה**

תנאי התחלה למשוואה דיפרנציאלית מסדר n הוא בצורה:

$$\left.\begin{aligned} x(t_0) &= a_0 \\ x'(t_0) &= a_1 \\ &\vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) &= a_{n-1} \end{aligned}\right\}$$

נדבר יותר על המשמעות לתנאי התחלה ל-$n>1$ בדף 3-9

מציאת את הפתרונות למשוואה דיפרנציאלית נקראת **לאינטגרל** ≡ לפתור את המשוואה.

to solve ≡ to integrate

דוגמה המשוואה הדיפרנציאלית הפשוטה ביותר מסדר n:

$$\frac{d^nx}{dt^n} = f(t) \Rightarrow x^{(n-1)} = \int f + C_0$$

$$\Rightarrow x^{(n-2)} = \int\left(\int f\right) + C_0t + C_1$$

$$\vdots$$

$$x = \int\cdots\left(\int f\right)\cdots + \frac{C_0t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + C_{n-1}$$

n קבועי האינטגרציה $C_0, \cdots C_{n-1}$ integration constants

$x^{(r)}(0) = C_{n-r-1}$: תנאי התחלה $\Longleftrightarrow$ ערכים של קבועי האינטגרציה

דוגמאות

א: $x = \cos\omega t$ פתרון של $\ddot{x} = -\omega^2 x$

בדיקה: $x = \cos\omega t$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}(\cos\omega t) = \frac{d}{dt}(-\omega\sin\omega t) = -\omega^2\cos\omega t$$

$$\ddot{x} \stackrel{?}{=} -\omega^2 x$$

$$-\omega^2\cos\omega t = -\omega^2\cos\omega t \ \checkmark$$

ב: $x = (t+2)e^t$ פתרון של $\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0$

בדיקה:

$$x = (t+2)e^t$$

$$\dot{x} = (t+2)e^t + 1\cdot e^t = (t+3)e^t$$

$$\ddot{x} = (t+3)e^t + 1\cdot e^t = (t+4)e^t$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} + x = \left[(t+4) - 2(t+3) + (t+2)\right]e^t = 0 \ \checkmark$$

ג. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t + 2\sin t \end{cases}$ פתרון של המערכת $\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y - 2x \\ \dot{y} &= 2y - 5x \end{aligned}\right\}$

בדיקה:

$$\dot{x} = \cos t = \underbrace{(\cos t + 2\sin t)}_{y} \underbrace{- 2\cdot\sin t}_{-2x} \ \checkmark$$

$$\dot{y} = -\sin t + 2\cos t = \underbrace{2(\cos t + 2\sin t)}_{2y} \underbrace{- 5\sin t}_{-5x} \ \checkmark$$

לדוגמאות הנ"ל: תנאי התחלה

א. ערכים $\theta(t_0)$, $\dot{\theta}(t_0)$ (מקום ומהירות התחלתיים)

ב. $x(t_0)$ (גובה הנוזל ההתחלתי)

ג. $x(t_0), \dot{x}(t_0)$ (מקום התחלתי, מהירות התחלתית)

$$\ddot{x} = 6t^2 \Rightarrow \dot{x} = 2t^3 + A \Rightarrow x = \frac{t^4}{2} + At + B \qquad \left.\begin{aligned} x(0) &= B \\ \dot{x}(0) &= A \end{aligned}\right\}$$

משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר ראשון : $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$

First order ordinary differential equations

שיטות פתרון עבור מקרים מיוחדים

① בנות-הפרדה : $\boxed{\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h(y)}$

variables separable

פורמלית ⇓

$$\frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx$$

$$\int \frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)\,dx + \text{const}$$

הצבה ‖

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy$$

פורמלי ⇓

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx + \text{const}$$

(פונק' של y) = (פונק' של x) —לפתור→ y = (פונק' של x)

דוגמאות

① $\boxed{y' = x + xy}$

$$\frac{dy}{dx} = x(1+y)$$

$$\frac{dy}{1+y} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{1+y} = \int x\,dx + C_0$$

$$\ln|1+y| = x^2/2 + C_0$$

$$1+y = Ce^{x^2/2}$$

$$\underline{y = Ce^{x^2/2} - 1}$$

בדוק!

$$y = Ce^{x^2/2} - 1$$

$$\Rightarrow y' = Cxe^{x^2/2} = x(1+y)\ \checkmark$$

② הומוגנית $\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x,y)}$

כאשר $f(x,y)$ פונקצי' $g(y/x)$

צ"ל כך ש- $f(x,y) = f(\lambda x, \lambda y)$ לכל λ

הערה: אין קשר בין פונקציה הומוגנית של כמה משתנים (כמו כאן) ובין הומוגנית של משוואה דיפרנציאלית לינארית!

הערה: אומרים שפונקציה $f(x,y,z,\dots)$ היא הומוגנית ממעלה n אם לכל λ
$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \dots) = \lambda^n f(x,y,z,\dots)$

לדוגמה: $\frac{xy+z^2}{x+y}$, x^3, $x^2\tan(y^2/z^2)$ פונקציות הומוגניות

ממעלה: 1 , 3 , 2

כאן מדברים על משוואה דיפרנציאלית $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ כאשר $f(x,y)$ פונקציה הומוגנית ממעלה 0.

שיטת פתרון: החלף משתנים $v = y/x$

$$y = x\cdot v \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$

$\boxed{\frac{dy}{dx} = g(y/x)}$ משוואה דיפרנציאלית ל- $y = y(x)$ $\iff$ $x\frac{dv}{dx} + v = g(v)$

$\boxed{\frac{dv}{dx} = \frac{g(v)-v}{x}}$ משוואה דיפרנציאלית ל- $v = v(x)$ } ① בנות-הפרדה!

⇓

v = (פונקציה של x) ⇝ $y = x\cdot v$ (פונקציה של x)

②א $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan y/x}$

$$xv' + v = v + \tan v \Leftarrow y = x\cdot v$$

$$\frac{dv}{dx} = v' = \frac{\tan v}{x} \Leftarrow$$

$$\int \frac{dv}{\tan v} = \int \frac{dx}{x} + C_0 \Leftarrow$$

$$\ln|\sin v| = \ln x + C_0 \Leftarrow$$

$$\sin v = Cx \Leftarrow$$

$$v = \sin^{-1}(Cx) \Leftarrow$$

$$\underline{y = x\cdot v = x\sin^{-1}(Cx)} \Leftarrow$$

בדיקה

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{x\cdot\frac{C}{\sqrt{1-C^2x^2}}}_{\substack{= \tan y/x \\ = \tan(\sin^{-1}(Cx))}} + \underbrace{\sin^{-1}(Cx)}_{= y/x}\ \checkmark$$

②ב $\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+2y^2}{xy}}$

$$v'x + v = \frac{x^2+2v^2x^2}{x^2v} \Leftarrow y = v\cdot x$$

$$= \frac{1+2v^2}{v}$$

$$xv' = \frac{1+v^2}{v} \Leftarrow$$

$$\int \frac{v\,dv}{1+v^2} = \int \frac{dx}{x} + C_0 \Leftarrow$$

$$\tfrac{1}{2}\ln(1+v^2) = \ln|x| + C_0 \Leftarrow$$

$$1+v^2 = Cx^2 \Leftarrow$$

$$v = \pm\sqrt{Cx^2-1} \Leftarrow$$

$$\underline{y = x\cdot v = \pm x\sqrt{Cx^2-1}} \Leftarrow$$

בדיקה

$$\frac{dy}{dx} = \pm\left(\sqrt{Cx^2-1} + \frac{Cx^2}{\sqrt{Cx^2-1}}\right)$$

$$\checkmark\ = \pm\frac{2Cx^2-1}{\sqrt{Cx^2-1}} = \frac{x^2+x^2(Cx^2-1)}{\pm x^2\sqrt{Cx^2-1}}$$

②ג $y' = \frac{2x-5y}{2x+4y}$

$$v'x + v = \frac{2-5v}{2+4v} \Leftarrow y = vx$$

$$v'x = \frac{2-5v}{2+4v} - v = \frac{2-5v-2v-4v^2}{2+4v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2-7v-4v^2}{2+4v}$$

$$\int \frac{(2+4v)\,dv}{2-7v-4v^2} = \int \frac{dx}{x} + \text{const}$$

פירוק לשברים חלקיים:

$$2-7v-4v^2 = (2+v)(1-4v)$$

$$\frac{2+4v}{2-7v-4v^2} = \frac{A}{2+v} + \frac{B}{1-4v}$$

$$2+4v = A(1-4v) + B(2+v)$$

$$v=-2 \Rightarrow -6 = 9A \Rightarrow A = -2/3$$

$$v = 1/4 \Rightarrow 3 = 9/4\, B \Rightarrow B = 4/3$$

$$\frac{2+4v}{2-7v-4v^2} = \frac{-2/3}{2+v} + \frac{4/3}{1-4v} \Rightarrow -\tfrac{2}{3}\ln|2+v| - \tfrac{1}{3}\ln|1-4v| = \ln|x| + \text{const}$$

$$\Rightarrow (v+2)^{2/3}(1-4v)^{1/3} = \text{const}/x$$

$$\Rightarrow (v+2)^2(1-4v) = C/x^3$$

פתרון כפונקציה סתומה $\Rightarrow \underline{(y+2x)^2(x-4y) = C}$

(3)

$A(x,y)+B(x,y)\frac{dy}{dx}=0$

exact ($A(x,y)\,dx+B(x,y)\,dy=0$ או)

<u>מדוייקת</u> כאשר קיימת פונקציה $U(x,y)$

כך ש- $A(x,y)=\partial U/\partial x$, $B(x,y)=\partial U/\partial y$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0}$$ ז"א משוואה דיפרנציאלית בצורה

($\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy=0$ או)

$\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x} \Leftrightarrow$ קיימת U (מקומית)

<u>שיטת פתרון:</u> מוצאים את U

אז $\frac{d}{dx}\left(U(x,y(x))\right)$

$\overset{\text{כלל השרשרת}}{=}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$

$\Leftarrow$ $\boxed{U(x,y)=\text{קבוע}}$

(3א)

$$(\overbrace{4x+3y^2}^{A})\,dx+\overbrace{2xy}^{B}\,dy=0$$

$\times x^2$

$\partial/\partial y\,(4x+3y^2)\neq\partial/\partial x\,(2xy)$ לא מדויקת

$6y \qquad 2y$

(3ב)

אותה משוואה! $\boxed{(4x^3+3x^2y^2)\,dx+2x^3y\,dy=0}$

$\partial/\partial y\,(4x^3+3x^2y^2)=\partial/\partial x\,(2x^3y)$ כן מדויקת

$6x^2y \quad = \quad 6x^2y$

רוצים U כך ש- $\frac{\partial U}{\partial x}=4x^3+3x^2y^2 \Rightarrow U=x^4+x^3y^2+g(y)$

$\frac{\partial U}{\partial y}=2x^3y \Rightarrow 2x^3y+g'(y)=2x^3y$

$\Downarrow$

$g'(y)=0\Rightarrow g=$ קבוע

$U=x^4+x^3y^2$ (+ קבוע)

<u>פתרון:</u> $x^4+x^3y^2=C$

$$y=\sqrt{(C/x^3-x)}$$

(4)

$$\boxed{\frac{dy}{dx}+P(x)\,y=Q(x)}$$

<u>לינארית</u> linear

גורם אינטגרציה integrating factor

<u>שיטת פתרון:</u> לכפול ב- $\mu(x)$ לקבלת נגזרת בצד שמאל

$$\underbrace{\mu(x)\frac{dy}{dx}+\mu(x)P(x)\,y}=\mu(x)Q(x)$$

$\parallel$ (אם $d\mu/dx=\mu\cdot P$)

$\mu\frac{dy}{dx}+\frac{d\mu}{dx}\cdot y$

$\parallel$

$\frac{d}{dx}(\mu\cdot y)$

$\Downarrow\int$

$\mu\cdot y=\int\mu(x)Q(x)\,dx+$ קבוע

$\Downarrow$

פונקציה $y=y(x)$

<u>איך למצוא μ?</u> רוצים $\frac{d\mu}{dx}=P\mu$

$\int\frac{d\mu}{\mu}=\int P(x)\,dx+$ קבוע

$\ln|\mu|=\int P(x)\,dx+$ קבוע

$$\mu(x)=e^{\int P(x)dx}\cdot\text{קבוע}$$

(4)

$$\boxed{y'+2xy=4x}$$

integrating factor $\mu(x)=e^{\int 2x\,dx}=e^{x^2}$

$e^{x^2}y'+2xe^{x^2}y=4xe^{x^2}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^{x^2}y)=4xe^{x^2}$

$\Rightarrow e^{x^2}y=\int 4xe^{x^2}dx+$ קבוע

$=2e^{x^2}+$ קבוע

$\Rightarrow$ $$y=2+Ce^{-x^2}$$

סוגים אחרים של משוואות דיפרנציאליות שאפשר לפתור דרך השיטות הנ"ל

א) $\frac{dy}{dx} = f(y+ax)$ (a קבוע) $\xleftarrow[\text{הצבה}]{z=y+ax}$ $\frac{dz}{dx} = f(z)+a$ משוואה בת-הפרדה

דוגמות: $\frac{dy}{dx} = (y+2x)^2$, $z=y+2x$

$\frac{dz}{dx} = z^2+2$

$\int \frac{dz}{z^2+2} = \int dx +$ קבוע

$\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{z}{\sqrt{2}} = x +$ קבוע $\Rightarrow z = \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}x + C)$

$\Rightarrow y = \sqrt{2}\tan(\sqrt{2}x+C) - 2x$

ב) $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$ (a, b, c, a', b', c' קבועים)

הזזה: $x = u + x_0$, $y = v + y_0$

(x_0, y_0) פתרון של $\left.\begin{array}{l} ax_0+by_0+c=0 \\ a'x_0+b'y_0+c'=0 \end{array}\right\}$

$\frac{dv}{du} = \frac{au+bv}{a'u+b'v}$ משוואה הומוגנית

$\frac{dy}{dx} = \frac{3x+7y+10}{7x+3y+10}$

$\left.\begin{array}{l} 3x_0+7y_0+10=0 \\ 7x_0+3y_0+10=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 = y_0 = -1$ $\rightsquigarrow$ $\left(\begin{array}{l} x = u-1 \\ y = v-1 \end{array}\right)$

$\frac{dv}{du} = \frac{3u+7v}{7u+3v}$

הומוגנית $v = t\cdot u \Rightarrow u\frac{dt}{du} + t = \frac{3+7t}{7+3t}$ בת-הפרדה

ג) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y^2}$ $\xleftarrow{\text{החלפת משתנים}}$ $\frac{dx}{dy} = x + y^2$ משוואה לינארית

$\frac{dx}{dy} - x = y^2$ $\xRightarrow{\times e^{-y}}$ $e^{-y}\frac{dx}{dy} - e^{-y}x = y^2e^{-y}$

$\frac{d}{dy}(e^{-y}x) = y^2e^{-y}$

$e^{-y}x = \int y^2e^{-y}dy +$ קבוע $= C - (y^2+2y+2)e^{-y}$

פתרון כפונקציה סתומה: $\boxed{x = Ce^{y} - y^2 - 2y - 2}$

ד) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$ $(n \neq 0,1)$ Bernoulli

$\xleftarrow[w=y^{1-n}]{\text{הצבה}}$ $\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$

$= (1-n)y^{-n}(f(x)y^n - P(x)y)$

$\frac{dw}{dx} = (1-n)f(x) - (1-n)P(x)w$ משוואה לינארית

$\frac{dy}{dx} = xy + x^2y^3$, $n=3$ $\xleftarrow{v=1/y^2}$

$v' = -2y'/y^3$

$= -2/y^3(xy + x^2y^3)$

$= -2xv - 2x^2$ משוואה לינארית

ה) $y = xy' + f(y')$ Clairaut

* יש פתרונות בצורה $y = cx + f(c)$ לכל קבוע C

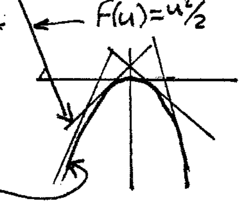
* גם יש פתרון סינגולרי

$\left.\begin{array}{l} x = -f'(t) \\ y = f(t) - tf'(t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} dx/dt = -f''(t) \\ dy/dt = f'(t) - (f'(t) + tf''(t)) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} dy/dx = t \\ xy' + f(y') = xt + f(t) = y \checkmark \end{array}$

$y = xy' + y'^2/2$, $F(u) = u^2/2$

* פתרונות $y = cx + c^2/2$

* פתרון סינגולרי $\left.\begin{array}{l} x = -t \\ y = t^2/2 - t^2 = -t^2/2 \end{array}\right\}$ $\Rightarrow y = -x^2/2$



ו) $\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$ (סדר 2) $\xleftarrow[v=dy/dx]{\text{הצבה}}$ $\boxed{v\frac{dv}{dy} = f(y, v)}$

$v\frac{dv}{dy} = \frac{dv}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$

סדר ראשון ל- $v = v(y)$ $\rightsquigarrow$ פתרון $v = v(y)$ $\rightsquigarrow$ $\frac{dy}{dx} =$ פונקציה של y

סדר 1 בת-הפרדה

קבוע אינטגרציה אחד

עוד קבוע אינטגרציה

פתרון $y = y(x)$

דוגמה: $y'' = f(y)$ $\xLeftarrow{v=y'}$ $v\frac{dv}{dy} = f(y)$

$\int v\,dv = \int f(y)\,dy +$ קבוע

$\frac{1}{2}v^2 - \int f(y)\,dy =$ קבוע

$m\ddot{y} = F(y)$ כוח, $v = \dot{y}$ מהירות $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}mv^2 + \int F(y)\,dy =$ קבוע

kinetic energy, potential energy

שימור האנרגיה (המכנית)

conservation of (mechanical) energy

$y'' = -\omega^2y$ $\xLeftarrow{v=y'}$ $v\frac{dv}{dy} = -\omega^2y$

$\int v\,dv = -\int\omega^2y +$ קבוע

$v^2/2 = \omega^2y^2/2 +$ קבוע

$v = \sqrt{\omega^2(a^2-y^2)}$ (a קבוע)

$\frac{dy}{dx} = \omega\sqrt{a^2-y^2}$

$\int\frac{dy}{\sqrt{a^2-y^2}} = \omega\int dx + C$

$\sin^{-1} y/a = \omega x + C \Rightarrow y = a\sin(\omega x + C)$

או: $y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ פתרון כללי

הערות:
* יש 2 קבועי אינטגרציה (A, B או a, C)
* הקבוצה של כל הפתרונות היא הקבוצה של כל גלים מתנד עם (מרחב וקטור K_ω)

[כאן המשוואה היא לינארית והומוגנית — 3-12110]

משמעות גאומטרית של משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון

first order ordinary differential equation (ODE)

משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון

לפונקציה $x(t)$ היא מהצורה:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \qquad (*)$$

כאשר f פונקציה נתונה

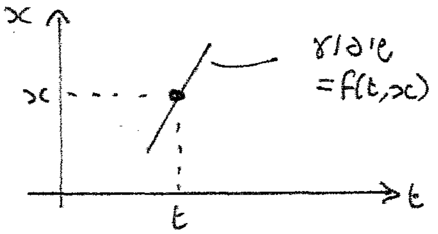
דוגמאות

(א) $dx/dt = 5t^2$

(ב) $dx/dt = -3x$

(ג) $dx/dt = e^{t^3 x} + \sin t$

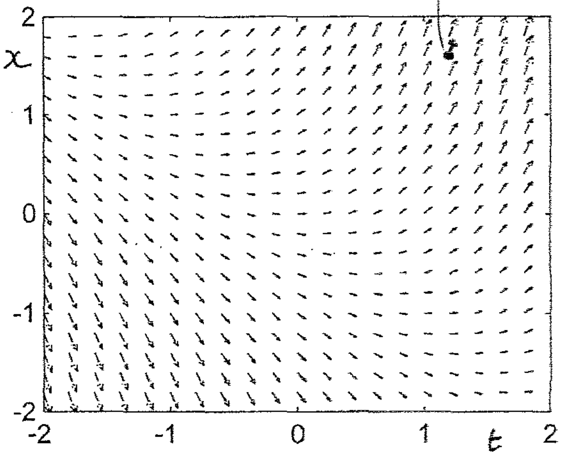
(*) הוא יחס בין הערכים של $t, x(t), x'(t)$.
לכן בכל זמן t_0, כאשר אנחנו יודעים את $x(t_0)$, אפשר למצוא את $x'(t_0)$



לכן (*) מהווה שדה כיוונים, צ"ל שבכל נקודה במישור (t,x) (או בתחום ההגדרה של f) יש כיוון בשיפוע $f(t,x)$.

כיוון $\binom{1}{f(t,x)}$ בכל נקודה (t,x)

"slope field"
שדה כיוונים

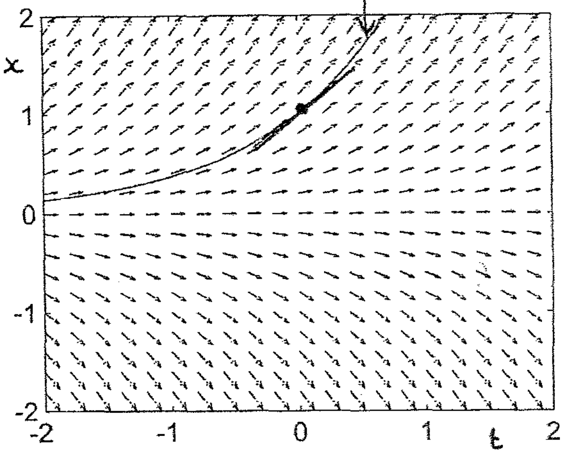


פתרון ל-(*) (solution) הוא פונקציה $x(t)$ כך ש-(*) מתקיימת.

אבל הפתרון לא יחיד!

דוגמא $x(t) = e^t$ פתרון של $dx/dt = x$
בדוק! $\frac{d}{dt}(e^t) = e^t$.

גרף של $x(t)$



בכל נקודה בגרף של $x(t)$, כיוון השדה כיוון המשיק לגרף.

הערה: $x = x(t)$ הוא פתרון ל-(*)
$\Leftrightarrow$ המהירות של הנקודה $(t, x(t))$ לפי זמן t היא

$$\frac{d}{dt}\binom{t}{x(t)} = \binom{1}{dx/dt} = \binom{1}{f(t,x)}$$

ערך של שדה וקטורי שלם בנקודה (t,x).

לכן הפתרונות של (*) הם ה Flow lines של השדה המהירות $\binom{1}{f(t,x)}$.

כדי לקבוע פתרון יחיד צריך $x(t_0) = x_0$ תנאי התחלה initial condition

---

משפט Picard אומר שבהינתן t_0, x_0 אז:
תחת תנאים מסוימים על הפונקציה f, קיים פתרון יחיד ל:

IVP (initial value problem)
$$\begin{cases} dx/dt = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\#)$$

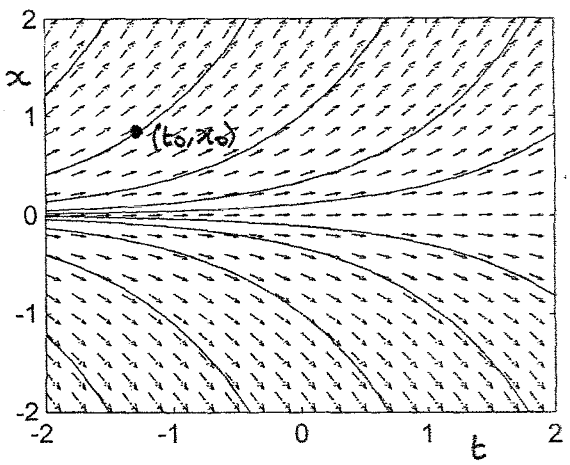
הפונקציה $x(t)$ מוגדרת בסביבה של $t=t_0$.
(Existence and uniqueness theorem)

IVP = ODE + תנאי התחלה

(א) פתרונות למשוואה

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = x}$$

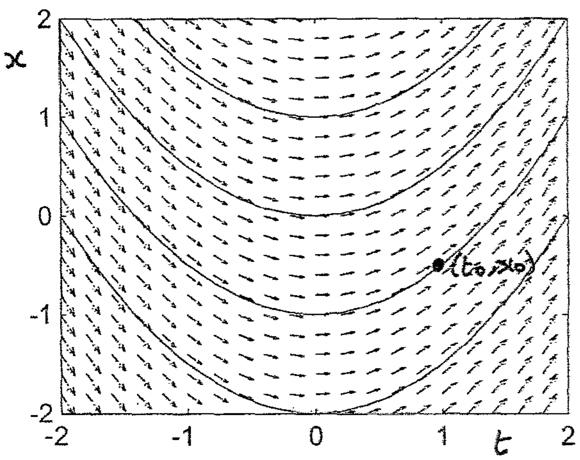
$$\int \frac{dx}{x} = \int dt + \text{קבוע}$$
$$\ln|x| = t + \text{קבוע}$$
$$x = Ce^t$$



(ב) פתרונות למשוואה

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = t}$$

$$x = \int t\,dt + C = \frac{t^2}{2} + C$$



שיטת Euler

ידיעת $x(t_i)$ (x פתרון ל-(*)) מאפשרת קבלת קירוב לינארי ל-x בסביבה של t_i:

$$x(t) \sim x(t_i) + \underbrace{f(t_i, x(t_i))}_{x'(t_i)}(t-t_i)$$

שיטת Euler לקבלת פתרון מקורב ל-(#): נבחר גודל צעד (step) h

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + h f(t_0+nh, x_n)}$$

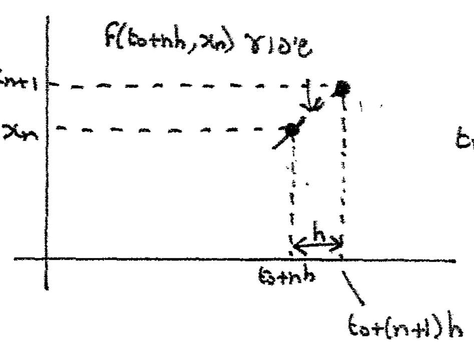
$x_1 = x_0 + h f(t_0, x_0)$ קירוב ל-$x(t_0+h)$

$x_2 = x_1 + h f(t_0+h, x_1)$ קירוב ל-$x(t_0+2h)$

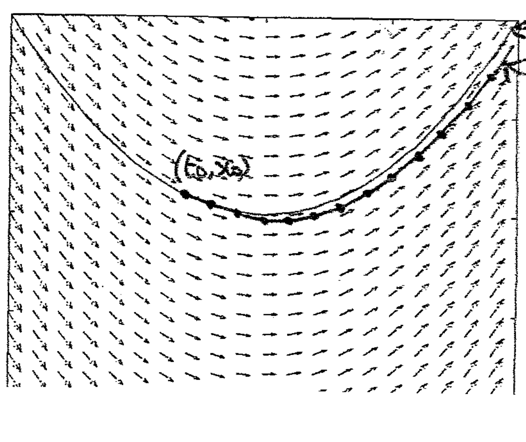
$x_3 = x_2 + h f(t_0+2h, x_2)$ קירוב ל-$x(t_0+3h)$

נבנה

$t_n = t_0 + nh$



נבנה נקודות:
מתחילים ב-(t_0,x_0)
הולכים $h=\delta t$ בשיפוע $f(t_0,x_0)$ ל-(t_1,x_1)
הולכים $h=\delta t$ בשיפוע $f(t_1,x_1)$ ל-(t_2,x_2) ...



דוגמאות

(א) $f(t,x) = x$, $t_0 = 0$, $x_0 = 1$

$x_{n+1} = x_n + h x_n = (1+h)x_n$
$\Rightarrow x_n = (1+h)^n$
$x(nh) \sim (1+h)^n$
$x(t) \underset{(t=nh)}{\sim} (1+t/n)^n \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ (h\to 0)}]{} e^t$ פתרון אמיתי

(ב) $f(t,x) = t$, $t_0 = x_0 = 0$

$x_{n+1} = x_n + h \cdot nh$
$\Rightarrow x_n = h^2 \cdot (1+2+\cdots+(n-1)) = \frac{h^2 n(n-1)}{2}$ [סכום כימן של $\int_0^{nh} t\,dt$]
$x(nh) \sim \frac{1}{2} h^2 n(n-1)$
$x(t) \underset{(t=nh)}{\sim} \frac{1}{2}(t^2 - ht) \xrightarrow[h\to 0]{} t^2/2$ פתרון אמיתי

תנאי התחלה ומשפט הקיום של Picard

משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון: $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ (מספר אין סופי של פתרונות)

לקביעת פתרון יחיד, צריך תנאי התחלה $y(x_0)=y_0$

$$\begin{cases} dy/dx = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ביחד נקרא בעיית תנאי התחלה INITIAL VALUE PROBLEM (IVP)

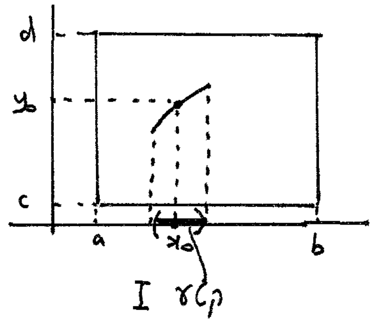
משפט הקיום והיחידות של Picard (Existence & uniqueness theorem)

- $f(x,y)$ רציפה ב-D
- $\partial f/\partial y$ רציפה ב-D
- $(x_0,y_0)\in D$
- $D=(a,b)\times(c,d)$ מלבן

$\Leftarrow$ קיים קטע $I=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)\subset(a,b)$ כך שבבעיה

$$\circledast\begin{pmatrix} \frac{dy}{dx}=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{pmatrix}$$

קיים פתרון יחיד y כפונקציה של x על הקטע I.



הערות

- המשפט מוכר גם בתור המשפט של Picard-Lindelöf, Cauchy-Lipschitz
- במשפט הקיום המקורי של Picard, התנאי קצת יותר חלש ממה שכתוב יותר: f צריכה להיות רציפה כפונקציה של t וגם רציפת Lipschitz כפונקציה של y (Lipschitz continuous)

$$\exists K: |f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le K|y_1-y_2|$$

לכל $x\in(a,b)$, $y_1,y_2\in(c,d)$

הערה: הפתרון של ה-IVP $\circledast$ לא תמיד מוגדר על כל (a,b).

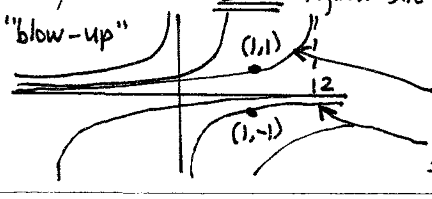
לדוגמה $\frac{dy}{dx}=y^2 \Rightarrow \int\frac{dy}{y^2}=\int dx + \text{קבוע} \Rightarrow -\frac{1}{y}=x+\text{קבוע} \Rightarrow y=\frac{1}{C-x}$

חלק ב-y^2 $\Leftarrow$ צריך לבדוק את המקרה $y=0$ ... גם פתרון

$f(x,y)=y^2$, $\partial f/\partial y=2y$ רציפות בכל נקודה

תנאי התחלה $y(1)=1 \Rightarrow C=2$ $y=\frac{1}{2-x}$ $(x<2)$

תנאי התחלה $y(1)=-1 \Rightarrow C=0$ $y=-1/x$ $(x>0)$



דוגמאות

א) IVP $\begin{cases} \frac{dy}{dx}=1+y^2 \\ y(1)=0 \end{cases}$

משוואה בת-הפרדה $\Leftarrow \int\frac{dy}{1+y^2}=\int dx+\text{קבוע}$

$\tan^{-1}y = x+C$

$y(1)=0$ $(x=1,y=0)$ $\Rightarrow 0=1+C$

$C=-1$

$\tan^{-1}y=x-1 \Rightarrow \underline{y=\tan(x-1)}$

תחום הגדרה $1-\pi/2<x<1+\pi/2$

ב) IVP $\begin{cases} dy/dx = x\sqrt{y} \\ y(0)=0 \end{cases}$

משוואה בת-הפרדה $\int\frac{dy}{\sqrt y}=\int x\,dx+\text{קבוע}$

$2\sqrt y = x^2/2 + C$

$y(0)=0$ $(x=0,y=0)$ $\Rightarrow 0=0+C$

$\sqrt y = x^2/4 \Rightarrow \underline{y=x^4/16}$

עוד פתרון $\underline{y=0}$

בדיקה: $y_1=\frac{x^4}{16} \Rightarrow \frac{dy_1}{dx}=\frac{x^3}{4}=x\sqrt{y_1}$ ✓

$y_2=0 \Rightarrow \frac{dy_2}{dx}=0=x\sqrt{y_2}$ ✓

$y_1(0)=0$, $y_2(0)=0$

אין פתרון יחיד!

מדוע?

דוגמה א: $\begin{cases} f(x,y)=1+y^2 \\ \partial f/\partial y=2y \end{cases}$ פונקציות רציפות

דוגמה ב: $f(x,y)=x\sqrt y$, $\partial f/\partial y = x/2\sqrt y$ לא רציפה ב- $x=y=0$

ג) IVP $\begin{cases} dy/dx = x\sqrt y \\ y(0)=1 \end{cases}$

כמו ב-ב $\Leftarrow 2\sqrt y = x^2/2 + C$

$y(0)=1$ $(x=0,y=1)$ $2=C$

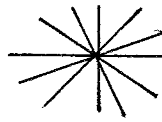
פתרון יחיד $\underline{y=(x^2/4+1)^2}$

$f(x,y)=x\sqrt y$, $\partial f/\partial y = x/2\sqrt y$ רציפות סביב $(0,1)$

ד) $\begin{cases} xy'=y \\ y(0)=0 \end{cases}$ פתרונות $y(x)=cx$ לכל קבוע c

אין פתרון יחיד

$f(x,y)=y/x$, $\partial f/\partial y = 1/x$ לא רציפות סביב $(0,0)$.



מערכות של משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר ראשון

system of first-order ordinary differential equations

מערכת כללית של משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר ראשון לפונקציות $x_1(t), \dots, x_n(t)$:

$$\left.\begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ dx_n/dt &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}\right\}$$

$f_1, \dots, f_n$ פונקציות נתונות (של $(n+1)$ משתנים)

<u>תנאי התחלה</u>: $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$

דוגמה

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ax+bxy \\ \frac{dy}{dt} &= cy-dxy \end{aligned}\right\}$$

predator-prey model
יחסי טורף-טרף
(משוואות Lotka-Volterra)

x = population of predator (natural death rate a)
אוכלוסיית הטורף — קצב התמותה הטבעית

y = population of prey (natural growth rate c)
אוכלוסיית הטרף — קצב הגידול

[b, d interaction constants]
קבועי יחסים

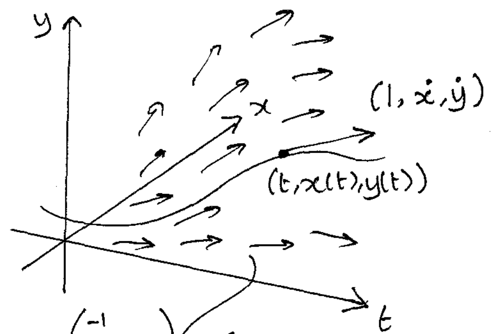
$x(t_0), y(t_0)$ initial populations
אוכלוסיות התחלתיות

בצורה וקטורית:

$$\circledast \quad \boxed{d\underline{x}/dt = \underline{f}(t, \underline{x})}$$

$$\begin{pmatrix} dx_1/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{pmatrix}, \quad \underline{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

נגדיר שדה וקטורי $\begin{pmatrix} 1 \\ f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ בנקודה $(t, x_1, \dots, x_n)$
[$(n+1)$-מימדי]



שדה וקטורי $\begin{pmatrix} -1 \\ -ax+bxy \\ cy-dxy \end{pmatrix}$
בנקודה (t,x,y)

תנאי התחלה: נקודה התחלתית
$(t_0, x(t_0), y(t_0))$

פתרון ל-$\circledast$ הוא $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$, והגרף שלו הוא מסילה
ב-$(n+1)$ מימדים $\{(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ כך שכיוון
המשיק לגרף בכיוון השדה בכל נקודה בגרף

עבור נקודה התחלתית נתונה $(t_0, x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$
קיים פתרון יחיד בסביבת הנקודה

משפט Picard למערכת של משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון

$$\left\{\begin{aligned} &1 \le i \le n \quad f_i(t, \underline{x}) \text{ רציפות ב-} D \\ &1 \le i,j \le n \quad \partial f_i/\partial x_j \text{ רציפות ב-} D \\ &D \text{ קוביה סביב } (t_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \end{aligned}\right.$$

$\Rightarrow$ קיים קטע I סביב t_0 כך שקיים פתרון יחיד למערכת הבאה, לפונקציות $x_1(t), \dots, x_n(t)$ $(t \in I)$:

$$\text{IVP}\left\{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} dx_1/dt &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ dx_n/dt &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}\right] \\ &x_1(t_0) = x_1^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0 \quad \text{עם תנאי התחלה} \end{aligned}\right.$$