פרק 2: נוסחאות נסיגה

<u>סדרה</u> (sequence) היא רשימה עם סדר (x_n)

לפעמים מתחילים ב-$n=0$: $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$

ולפעמים מתחילים ב-$n=1$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x_1, x_2, x_3, \dots$

יש <u>סדרות של מספרים</u> (כמו אינפי) ו<u>סדרות של פונקציות</u> (כמו פרק 4)...

<u>דוגמאות</u>

סדרות של מספרים:

$n: 1, 2, 3, 4, \dots$

$n!: 1, 2, 6, 24, \dots$

סדרות של פונקציות:

$x^n: x, x^2, x^3, x^4, \dots$

$I_n: x, -\cos x, \frac{x}{2}-\sin x\cos x, -\frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{3}\cos x\sin^2 x, \dots$

$\left(I_n = \int (\sin x)^n dx\right)$

<u>נוסחת נסיגה</u> (recurrence relation) היא משוואה לסדרה (x_n) כך שאפשר למצוא את x_{n+k} מהערכים $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}$

$k =$ <u>סדר</u> (order) נוסחת הנסיגה

$$x_{n+k} = f(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}) \quad (*)$$

$$x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$$

ניתן להסיק שבהינתן $x_0, \dots, x_{k-1}$, אפשר למצוא פתרון יחיד לנוסחת נסיגה מסדר k.

הערכים $x_0, \dots, x_{k-1}$ נקראים <u>תנאי התחלה</u> (initial conditions)

<u>דוגמאות</u>

אחד מהפתרונות

א) (סדר 1) $x_{n+1} = 2x_n \rightsquigarrow 2^n$

ב) (סדר 2) $x_{n+2} = x_n + x_{n+1} \rightsquigarrow$ Fibonacci sequence

ג) (סדר 1) $f_{n+1}(x) = x\cdot f_n(x) \rightsquigarrow x^n$

ד) (סדר 1) $x_{n+1} = n\cdot x_n \rightsquigarrow (n-1)!$

ה) (סדר 2) $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n - \frac{1}{n+2}(\cos x)(\sin x)^{n+1} \rightsquigarrow \int (\sin x)^n dx$

ו) (סדר 1) $x_{n+1} = x_n^2 \leftarrow a^{(2^n)}$

$$\begin{cases} x_{n+2} = x_n + x_{n+1} \\ x_0 = x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x_2 &= x_0 + x_1 = 2 \\ x_3 &= x_1 + x_2 = 3 \\ x_4 &= x_2 + x_3 = 5 \\ x_5 &= x_3 + x_4 = 8 \dots \end{aligned}$$

<u>נוסחאות נסיגה ליניאריות והומוגניות</u>

homogeneous linear recurrence relations

במקרה ש-f פונקציה ליניארית של $x_n, \dots, x_{n+k-1}$:

$$x_{n+k} = f_0(n)x_n + f_1(n)x_{n+1} + \dots + f_{k-1}(n)x_{n+k-1} \quad (\#)$$

נסמן ב-X את <u>קבוצת הפתרונות</u> (solution set) של $(\#)$

$(x_n) \in X \Rightarrow x_{n+k} = f_0(n)x_n + f_1(n)x_{n+1} + \dots + f_{k-1}(n)x_{n+k-1}$

$(y_n) \in X \Rightarrow y_{n+k} = f_0(n)y_n + f_1(n)y_{n+1} + \dots + f_{k-1}(n)y_{n+k-1}$

סכום

$(x_{n+k}+y_{n+k}) = f_0(n)(x_n+y_n) + \dots + f_{k-1}(n)(x_{n+k-1}+y_{n+k-1}) \Rightarrow (x_n+y_n) \in X$

$(cx_{n+k}) = f_0(n)(cx_n) + \dots + f_{k-1}(n)(cx_{n+k-1}) \Rightarrow (cx_n) \in X$

מכאן רואים ש-<u>X מרחב וקטורי</u>

(סגור תחת סכום וכפל עם סקלר)

<u>דוגמאות</u>

א) $x_{n+1} = n\cdot x_n$ ליניארית

ב) $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ ליניארית

$x_{n+1} = x_n^2$ לא ליניארית

<u>דוגמאות</u>

א) $x_{n+1} = 2x_n \Rightarrow x_n = 2^n\cdot x_0$

$X = \{(A\cdot 2^n) \mid A\in\mathbb{R}\}$

מרחב וקטורי חד-מימדי

בסיס $\{(2^n)\}$

ב) $x_{n+2} = \frac{3n-2}{n-1}x_{n+1} - \frac{2n}{n-1}x_n$

$\checkmark\ n+2 \overset{?}{=} \frac{(3n-2)(n+1)-2n\cdot n}{n-1} = \frac{n^2+n-2}{n-1} \Rightarrow (n)\in X$

$\checkmark\ 2^{n+2} \overset{?}{=} \frac{(3n-2)2-2n}{n-1}\cdot 2^n = 4\cdot 2^n \Rightarrow (2^n)\in X$

$\Leftarrow (A\cdot n + B\cdot 2^n) \in X$ לכל זוג קבועים A, B.

נגדיר: $T: X \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$$\underset{\text{סדרה}}{(x_n)} \longmapsto \underset{\text{וקטור}}{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}}$$

תכונות של T

* T העתקה לינארית
* T על (onto)
* T חח"ע (1-1)

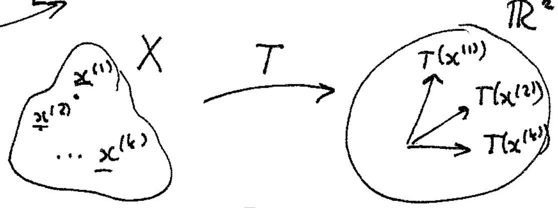
מכאן נובע ש- $\underline{\underline{\dim X = k}}$

⇐ כל קבוצה של k איברים של X (פתרונות ל-⊕) בלתי תלויים לינארית מהווה בסיס ל-X.

אומרים שקבוצה של k פתרונות בלתי תלוים לינארית $\{(x_n^{(1)}), (x_n^{(2)}), \dots, (x_n^{(k)})\}$ היא מערכת בסיסית Fundamental system of solutions

הערה: (קבוצה של k איברים של X היא בלתי תלוי לינארית) אם"ם [התמונות שלהם תחת T (k וקטורים ב-$\mathbb{R}^k$) בלתי תלוים לינארית]

אפשר לבדוק עם דטרמיננטה $k \times k$



$$\underset{\text{ב-}X}{c_1 \underline{x}^{(1)} + c_2 \underline{x}^{(2)} + \dots + c_k \underline{x}^{(k)} = \underline{0}} \overset{T}{\Rightarrow} \underset{\text{ב-}\mathbb{R}^k}{c_1 T(\underline{x}^{(1)}) + c_2 T(\underline{x}^{(2)}) + \dots + c_k T(\underline{x}^{(k)}) = \underline{0}}$$

$$\Rightarrow c_1 = \dots = c_k = 0$$

בדוגמא האחרונה הנ"ל $(k=2)$

$$T: (n) \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T: (2^n) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$T: (A \cdot n + B \cdot 2^n) \longmapsto \begin{pmatrix} B \\ A+2B \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow n=0 \\ \leftarrow n=1 \end{matrix}$$

מדוע?

* $$T((x_n + y_n)) = \begin{pmatrix} x_0+y_0 \\ x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_{k-1}+y_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{k-1} \end{pmatrix} = T((x_n)) + T((y_n))$$

$$T((\lambda x_n)) = \begin{pmatrix} \lambda x_0 \\ \vdots \\ \lambda x_{k-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix} = \lambda T((x_n))$$

* לכל קבוצה $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$, קיים פתרון (x_n) עבורו היא מהווה תנאי התחלה.
* קיים פתרון יחיד עבור תנאי התחלה נתון $x_0, \dots, x_{k-1}$.

בדוגמא: $\dim X = 2$

$\{(n), (2^n)\}$ בלתי תלוים לינארית

⇐ $\{(n), (2^n)\}$ בסיס ל-X

⇐ איבר כללי של X אפשר לכתוב בצורה

$$\underline{\underline{x_n = An + B \cdot 2^n}} \quad (A, B \text{ קבועים})$$

(פתרון כללי)

מדוע $\{(n), (2^n)\}$ בלתי תלוים לינארית?

$$T((2^n)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad T((n)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ ⇐ $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ בלתי תלוים לינארית ב-$\mathbb{R}^2$

⇐ $\{(n), (2^n)\}$ בלתי תלוים לינארית ב-X

מציאת פתרון תחת תנאי התחלה נתון

פתרון כללי הוא: $x_n = c_1 x_n^{(1)} + c_2 x_n^{(2)} + \dots + c_k x_n^{(k)}$

($c_1, \dots, c_k$ קבועים)

$$\boxed{\text{תנאי התחלה (ערכים של } x_0, \dots, x_{k-1})} \Rightarrow \boxed{k \text{ משוואות לינאריות ל- } c_1, \dots, c_k}$$

$$\Downarrow \text{ פתרון}$$

$$\boxed{\text{ערכים } c_1, \dots, c_k} \Rightarrow \boxed{\text{פתרון } (x_n)}$$

בדוגמא נתון: $x_0 = 2, \ x_1 = 5$

פתרון כללי $x_n = An + B \cdot 2^n$

$x_0 = 2 \Rightarrow 2 = B \Rightarrow B = 2$

$x_1 = 5 \Rightarrow 5 = A + 2B \Rightarrow A = 1$

$$\underline{\underline{x_n = n + 2 \cdot 2^n}}$$

constant coefficient homogeneous linear recurrence relations

נוסחאות נסיגה ליניאריות והומוגניות עם מקדמים קבועים

בהנתן: $x_{n+k} = a_0 x_n + a_1 x_{n+1} + \cdots + a_{k-1} x_{n+k-1}$ (#) $(a_0,\dots,a_{k-1}$ קבועים$)$

מספיק למצוא k פתרונות בלתי תלוים ליניארית

ננחש: פתרון $x_n = \lambda^n$.

בדוק: $\lambda^{n+k} \overset{?}{=} a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n+1} + \cdots + a_{k-1}\lambda^{n+k-1}$

$\Leftrightarrow \lambda^k = a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$

נקראת משוואה אופיינית (characteristic equation) של (#)

$\lambda = \lambda_1,\dots,\lambda_k$ שונים, k פתרונות $\Leftarrow$ בסיס ל-X $\{(\lambda_1^n),\dots,(\lambda_k^n)\}$

מדוע $\{(\lambda_1^n),\dots,(\lambda_k^n)\}$ בלתי תלוים ליניארית?

$$\downarrow T$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\ \lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_1^{k-1}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}\lambda_k\\ \lambda_k\\ \vdots\\ \lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}\right\}$$ בלתי תלוים ליניארית

$$\Uparrow$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1}\end{vmatrix} = \prod_{i>j}(\lambda_i-\lambda_j) \neq 0$$

כל ה-λ שונים

Vandemonde determinant

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{vmatrix} = (\lambda_2-\lambda_1);\quad \begin{vmatrix}1&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\lambda_3\\ \lambda_1^2&\lambda_2^2&\lambda_3^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&0&0\\ \lambda_1&\lambda_2-\lambda_1&\lambda_3-\lambda_1\\ \lambda_1^2&\lambda_2^2-\lambda_1^2&\lambda_3^2-\lambda_1^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda_2-\lambda_1&\lambda_3-\lambda_1\\ \lambda_2^2-\lambda_1^2&\lambda_3^2-\lambda_1^2\end{vmatrix}$$

$$(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\begin{vmatrix}1&1\\ \lambda_2+\lambda_1&\lambda_3+\lambda_1\end{vmatrix}$$

מה לעשות אם יש למשוואה אופיינית שורש כפול?

אם $\lambda=\lambda_1$ שורש כפול של $f(\lambda)=\lambda^k - a_{k-1}\lambda^{k-1} - \cdots - a_0$

$\Leftarrow$ $x_n = \lambda_1^n$ פתרון של (#) כרגיל

$x_n = n\lambda_1^n$ גם פתרון של (#)

ריבוי r $\Leftarrow$ $x_n = n^i\lambda_1^n$ $(i=0,1,\dots,r-1)$ פתרונות של (#)

בדוק:

$n\lambda^{n+k} = a_0 n\lambda^n + \cdots + a_{k-1} n\lambda^{n+k-1} \underset{\times n\lambda^n}{\Leftarrow} \lambda^k = a_0 + \cdots + a_{k-1}\lambda^{k-1} \Leftarrow f(\lambda)=0$

$k\lambda^{n+k} = a_1\lambda^{n+1} + \cdots + a_{k-1}(k-1)\lambda^{n+k-1} \underset{\times \lambda^{n+1}}{\Leftarrow} k\lambda^{k-1} = a_1 + \cdots + a_{k-1}(k-1)\lambda^{k-2} \Leftarrow f'(\lambda)=0$

סכום

$(n+k)\lambda^{n+k} = a_0 n\lambda^n + a_1(n+1)\lambda^{n+1} + \cdots + a_{k-1}(n+k-1)\lambda^{n+k-1}$ ✓

דוגמאות א) $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$

משוואה אופיינית: $\lambda^2 = 1+\lambda$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}(1\pm\sqrt5) = \lambda_1,\lambda_2$

מקבלים בסיס ל-X, $\{(\lambda_1^n),(\lambda_2^n)\}$

פיתרון כללי

$$x_n = A\left(\tfrac12(1+\sqrt5)\right)^n + B\left(\tfrac12(1-\sqrt5)\right)^n$$

מספרי Fibonaci: תנאי התחלה $x_0=x_1=1$

$$\left.\begin{aligned}&(i)\quad A + B = 1\\ &(ii)\quad \tfrac12(1+\sqrt5)A + \tfrac12(1-\sqrt5)B = 1\end{aligned}\right\} \Leftarrow$$

$\frac12(1+\sqrt5)(i)-(ii)$: $\sqrt5 B = \frac12(\sqrt5-1) \Rightarrow B = \frac{\sqrt5-1}{2\sqrt5}$

$(ii)-\frac12(1-\sqrt5)(i)$: $\sqrt5 A = \frac12(1+\sqrt5) \Rightarrow A = \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1}\right) \Leftarrow$$

בדוק:

$x_0 = \frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2} - \frac{1-\sqrt5}{2}\right) = 1$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^2\right) = 1$

$x_2 = \frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^3\right) = \frac{1}{\sqrt5}2\left(3\left(\frac12\right)^2\left(\frac{\sqrt5}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^3\right)$
$= \frac{2}{\sqrt5}\left(\frac{3\sqrt5}{8} + \frac{5\sqrt5}{8}\right) = 2$

ב) (שורשים מרוכבים) $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 5x_n$

משוואה אופיינית: $\lambda^2 = 2\lambda - 5$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 1\pm 2i$

פתרון כללי: $x_n = A(1+2i)^n + B(1-2i)^n$

אם נתון $x_0=1, x_1=3$: (i)

$$\left.\begin{aligned}&(i)\quad 1 = A + B\\ &(ii)\quad 3 = (1+2i)A + (1-2i)B\end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow 3-(1-2i) = 4iA$: $(ii)-(1-2i)(i)$

$(1+2i)-3 = 4iB$: $(1+2i)(i)-(ii)$

$\Rightarrow A = \frac{2+2i}{4i} = \frac12 - \frac{i}{2}$ $\quad B = \frac{-2+2i}{4i} = \frac12 + \frac{i}{2}$

$\Rightarrow x_n = \left(\frac12-\frac{i}{2}\right)(1+2i)^n + \left(\frac12+\frac{i}{2}\right)(1-2i)^n = \Re\left((1-i)(1+2i)^n\right)$

סכום ממשי $\Leftarrow$ צמודים

בדוק: $x_0 = \left(\frac12-\frac{i}{2}\right) + \left(\frac12+\frac{i}{2}\right) = 1$ ✓

$x_1 = 2\Re\left(\left(\frac12-\frac{i}{2}\right)(1+2i)\right) = 2\left(\frac12+1\right) = 3$ ✓

ג) (שורש כפול) $x_{n+3} = 3x_{n+1} - 2x_n$

משוואה אופיינית: $\lambda^3 = 3\lambda - 2$

$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2) = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$

$\Leftarrow$ פתרון כללי $x_n = A + Bn + C(-2)^n$

$$\underset{1^n}{\uparrow}\qquad \underset{n\cdot 1^n}{\uparrow}\qquad \underset{(-2)^n}{\uparrow}$$

הקשר לפולינום אופייני של מטריצה [חומר רשות]

נוסחת נסיגה : $x_{n+k} = a_0x_n + a_1x_{n+1}+\cdots+a_{k-1}x_{n+k-1}$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}\\ x_{n+2}\\ \vdots \\ x_{n+k}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1}\\ x_{n+2}\\ \vdots \\ x_{n+k-1}\\ a_0x_n+\cdots+a_{k-1}x_{n+k-1}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1}\end{pmatrix}}_{\underline{A}} \begin{pmatrix} x_n\\ x_{n+1}\\ \vdots \\ x_{n+k-1}\end{pmatrix}$$

$\underline{A}$ מטריצה $k\times k$

$$\begin{pmatrix} x_n\\ x_{n+1}\\ \vdots\\ x_{n+k-1}\end{pmatrix} = \underline{A}^n \begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ \vdots \\ x_{k-1}\end{pmatrix} \Longleftarrow$$

תנאי התחלה

מכאן רואים שלצורך מציאת (x_n) די במציאת נוסחה כללית ל- $\underline{A}^n$

פולינום אופייני ל- $\underline{A}$:

$$\det(\lambda\underline{I}-\underline{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 \cdots & \lambda & -1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & \lambda-a_{k-1}\end{vmatrix}$$

פיתוח בשורה

$$= \lambda\cdot \begin{vmatrix} \lambda & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1\\ -a_1 & -a_2 & & \lambda-a_{k-1}\end{vmatrix}$$

אותה צורה $(k-1)\times(k-1)$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \lambda & -1 & 0\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & -1\\ -a_0 & -a_2 & & \lambda-a_{k-1}\end{vmatrix}$$

פתוח שורה ראשונה $(k-1)$ פעמים

$-a_0$

$$= \lambda^k - a_{k-1}\lambda^{k-1} - \cdots - a_1\lambda - a_0$$

---

k שורשים שונים $\Leftarrow$ k ערכים עצמיים שונים ל- $\underline{A}$

$\Leftarrow$ ניתנת ללכסון $\underline{A}$

שורש כפול $\Leftarrow$ צורת Jordan ל- $\underline{A}$

עם block

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0\\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^n = \lambda^n\begin{pmatrix} 1 & 1/\lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix}^n = \lambda^n\begin{pmatrix} 1 & n/\lambda\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\cdot\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

רקורסיות

א) $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$, $x_0 = x_1 = 1$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}\\ x_{n+2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1}\\ x_n + x_{n+1}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}_{\underline{A}}\begin{pmatrix} x_n\\ x_{n+1}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_n\\ x_{n+1}\end{pmatrix} = \underline{A}^n\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\end{pmatrix} = \underline{A}^n\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$$

$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Leftarrow$ פולינום אופייני $= \begin{vmatrix} \lambda & -1\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)-1 = \lambda^2-\lambda-1$

ערכים עצמיים (eigenvalues) : $\boxed{\lambda = \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})}$

וקטורים עצמיים (eigenvectors) : $(\underline{A}-\lambda\underline{I})\underline{v} = \underline{0}$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \underline{0} \Rightarrow v_2 = \lambda v_1 \Rightarrow \boxed{\underline{v} = v_1\begin{pmatrix} 1\\ \lambda\end{pmatrix}}$$

מקבלים אלכסון : $\underline{A} = \underline{P}\,\underline{D}\,\underline{P}^{-1}$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix} \qquad \underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$

$$\Rightarrow \underline{A}^n = \underline{P}\,\underline{D}^n\underline{P}^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_n\\ x_{n+1}\end{pmatrix} = \underline{A}^n\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1\\ -\lambda_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n\\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1+\lambda_2\\ 1-\lambda_1\end{pmatrix}$$

קומפ' הראשון $\Rightarrow$ $x_n = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\underbrace{(1-\lambda_2)}_{\lambda_1}\lambda_1^n - \underbrace{(1-\lambda_1)}_{\lambda_2}\lambda_2^n\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^{n+1}\right)$$

ב) $x_0 = 1,\ x_1 = 8,\ x_{n+2} = 4(x_{n+1}-x_n)$

$$\begin{pmatrix} x_n\\ x_{n+1}\end{pmatrix} = \underline{A}^n\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\end{pmatrix} \Leftarrow \begin{pmatrix} x_{n+1}\\ x_{n+2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1}\\ 4x_{n+1}-4x_n\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ -4 & 4\end{pmatrix}}_{\underline{A}}\begin{pmatrix} x_n\\ x_{n+1}\end{pmatrix}$$

$$\det(\underline{A}-\lambda\underline{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1\\ -4 & -\lambda+4\end{vmatrix} = \lambda^2-4\lambda+4 = (\lambda-2)^2$$

וקטור עצמי : $\begin{pmatrix} -2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix} = \underline{v}$ פתרון

$\begin{pmatrix} -2 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}\underline{w} = \begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix} = \underline{w}$ פתרון

$$\underline{A} = \underline{P}\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\underline{P}^{-1},\quad \underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\underline{A}^n = \underline{P}\begin{pmatrix} 2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^n\underline{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1}\\ 2^{n+1} & (n+1)2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

פתרון $\begin{pmatrix} x_n\\ x_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1}\\ * & *\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 8\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_n = 2^n + 3n\cdot 2^n}$

non-homogeneous linear recurrence relations

נוסחאות נסיגה ליניארית לא הומוגנית

נוסחת נסיגה בצורה

(#) $x_{n+k} = f_0(n)x_n + f_1(n)x_{n+1} + \dots + f_{k-1}(n)x_{n+k-1} + a(n)$

$a(n)$ לא בהכרח 0

נגדיר העתקה ליניארית על סדרות:

$S: \{\text{סדרות}\} \longrightarrow \{\text{סדרות}\}$

$(x_n) \longmapsto (y_n)$

כאשר $y_n = x_{n+k} - f_0(n)x_n - f_1(n)x_{n+1} - \dots - f_{k-1}(n)x_{n+k-1}$

$\{\text{פתרונות ל-(\#)}\} = \{(x_n) \mid S((x_n)) = (a(n))\} = X_a$

S העתקה ליניארית $\Leftarrow$ $X_a = \ker S + \underline{x}^\circ$

$\ker S$: פתרונות ל-$S((x_n))=0$ $\Updownarrow$

$\underline{x}^\circ$: פתרון פרטי particular solution

$x_{n+k} = f_0(n)x_n + \dots + f_{k-1}(n)x_{n+k-1}$ (*)

נוסחת נסיגה ליניארית והומוגנית

ז"א
$$\boxed{\text{פתרון כללי ל-(\#)} = (\text{פתרון פרטי ל-(\#)}) + \left(\text{פתרון כללי לנוסחת נסיגה הומוגנית (*)}\right)}$$

דרכים למציאת פתרון פרטי עם מקדמים $f_i(n)$ קבועים

(#) $x_{n+k} = f_0x_n + f_1x_{n+1} + \dots + f_{k-1}x_{n+k-1} + a_n$

* אם a_n בצורה $C\cdot\lambda^n$ אפשר למצוא x_n

בצורה: $x_n = \text{קבוע}\cdot\lambda^n$ (אם λ לא שורש של הפולינום האופיני)

$x_n = \text{קבוע}\cdot n^r\lambda^n$ [אם λ שורש של הפולינום האופיני עם כיבוי r]

* אם $a_n = Cn^s\lambda^n$ $\Leftarrow$ $x_n = n^r\lambda^n\left(\text{פולינום ב-n ממעלה } s\right)$ כאשר r = כיבוי (אם λ לא שורש $r=0$)

* אם a_n סכום של איברים בצורה הנ"ל, אז הפתרון הפרטי יהיה סכום (S העתקה ליניארית ואנחנו מחפשים פתרון ל-$S(\underline{x}) = \underline{a}$)

דוגמאות

א) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 2^n$

ב) $a_{n+1} = na_n + n - 1$

כאן $S: (a_n) \to (a_{n+1} - na_n)$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\\vdots\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}2-1\\3-4\\4-9\\\vdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-5\\\vdots\end{pmatrix}$$

דוגמאות א) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = na_n + n - 1$

פתרון פרטי: $a_n = -1$ $\quad \checkmark\ -1 = -n + (n-1)$

נוסחת נסיגה הומוגנית: $a_{n+1} = na_n$

$\Downarrow$

$a_n = A\cdot(n-1)!$

פתרון כללי: $\underline{\underline{a_n = A\cdot(n-1)! - 1}}$

תנאי התחלה $a_1 = 3$ $\Leftarrow$ $3 = A - 1$

$\Downarrow$

$\underline{\underline{a_n = 4(n-1)! - 1}}$

ב) (#) $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + n + 2^n + 3^n$

נוסחת נסיגה הומוגנית: (*) $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$

משוואה אופינית: $\lambda^2 = 3\lambda - 2$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1, 2$

פתרון כללי: $a_n = A + B\cdot 2^n$

צריך $S((a_n)) = (n^2 + n\cdot 2^n + 3^n)$

כאשר $S((a_n)) = (a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n)$

$\underline{\underline{n}}$: ננחש $x_n = n(Cn+D)$ ($\lambda=1$ שורש, כיבוי 1)

$S((n)) = ((n+2) - 3(n+1) + 2n) = (-1)$

$S((n^2)) = ((n+2)^2 - 3(n+1)^2 + 2n^2) = (-2n+1)$

$\Leftarrow$ $S((-\frac{1}{2}(n+n^2))) = (n)$

$n = (-\frac{1}{2})[(-1) + (-2n+1)]$

$\underline{\underline{2^n}}$: ננחש $x_n = En2^n$ ($\lambda=2$ שורש, כיבוי 1)

$S((n2^n)) = ((n+2)2^{n+2} - 3(n+1)2^{n+1} + 2n2^n)$

$= ((4n+8-6n-6+2n)2^n) = (2\cdot 2^n)$

$\Leftarrow$ $S((n2^{n-1})) = (2^n)$

3^n: ננחש $x_n = F\cdot 3^n$ ($\lambda=3$ לא שורש)

$S((3^n)) = (3^{n+2} - 3\cdot 3^{n+1} + 2\cdot 3^n) = (2\cdot 3^n)$

$\Leftarrow$ $S((\frac{1}{2}\cdot 3^n)) = (3^n)$

פתרון כללי של (#): $\underbrace{a_n = A + B\cdot 2^n}_{\text{פתרון כללי של (*)}}\ \underbrace{- \frac{1}{2}(n+n^2) + n2^{n-1} + \frac{1}{2}3^n}_{\text{פתרון פרטי}}$