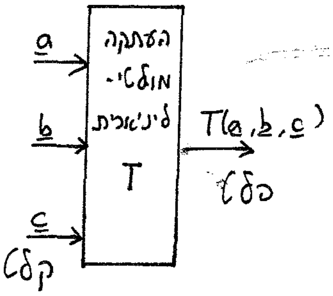
1.2: טנזורים, הסכמת הסכימה של Einstein, ∇^2 בקואורדינטות קוטביות

טנזורים



בקואורדינטות: [צריך לקבוע בסיס קודם]

$$(T(\underline{a},\underline{b},\underline{c}))_i = \sum T_i^{jkl} a_j b_k c_l$$

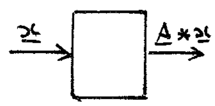
רכיבים של T: T_i^{jkl} (קלט $\to$ jkl, פלט $\to$ i)

(טנזור) tensor

אינדקסים i,j,k,l רצים על ערכים $1,2,\dots,n$ (n=מימד)

דוגמאות

מטריצה $\underline{A}$



$$(\underline{A} * \underline{x})_i = \sum_j A_i^{\,j} x_j$$

רכיבים: $A_i^{\,j}$

הסכם הסכומים של Einstein

Einstein summation convention

* בביטוי מותר, כל אינדקס מופיע פעם אחת או פעמיים (לא יותר)

* עבור כל אינדקס שמופיע פעמיים, צריך לעשות סכום על $i=1,2,\dots,n$ (n=מימד)

הערה: לפעמים יש עוד תנאי, שכל אינדקס המופיע פעמיים, מופיע פעם אחת למעלה, פעם אחת למטה

כיוון מושג בדפים 1-6, 1-7 לא נקפיד על תנאי זה.

דוגמאות

א) $a_i b_i = \underline{a} \cdot \underline{b}$

ב) $A_i^{\,j} x_j = (\underline{A} * \underline{x})_i$

ג) $A_{ij} B_{jk} = (\underline{A} * \underline{B})_{ik}$

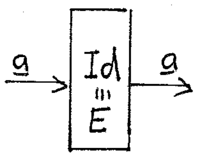
[או: $A_i^{\,j} B_j^{\,k} = (\underline{A} * \underline{B})_i^{\,k}$]

(כפל של מטריצות)

טנזורים δ, ε

העתקת הזהות

$$(E(\underline{a}))_i = a_i$$



מטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

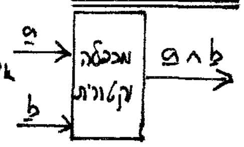
רכיבים: $\delta_{ij} = \delta_i^{\,j} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$$\delta_i^{\,j} a_j = a_i$$

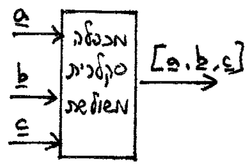
$$(E(\underline{a}))_i = a_i$$

מימד $n=3$

$$(\underline{a} \wedge \underline{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$



$$[\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}] = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$



(=דטרמיננטה 3x3)

[כמו 1-8 במת"פ]

רכיבים:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{אם } i,j,k \text{ לא כולם שונים} \\ 1 & \text{אם } ijk=123,231,312 \\ -1 & \text{אם } ijk=132,213,321 \end{cases}$$

דוגמא

$$\varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

תכונות

א) $\delta_i^{\,j} a_j = a_i$

ב) $\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ilm} = \delta_j^{\,l} \delta_k^{\,m} - \delta_j^{\,m} \delta_k^{\,l}$

ג) $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = -\varepsilon_{jik}$

מדוע?

א) $\sum_j \delta_i^{\,j} a_j = a_i$

ב) $\sum_i \underbrace{\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ilm}}$

לא מתאפס רק כאשר $i \neq j,k,\ l,m$ (גם j,k שונים וגם l,m שונים) $\Rightarrow$ הסכום מתאפס רק כאשר $\{j,k\}=\{l,m\}$ (שתי קבוצות של שני מספרים שונים) $\Leftrightarrow$ $\left.\begin{matrix} j=l,\ k=m \\ \text{או } j=m,\ k=l \end{matrix}\right\}$

מה קורה לרכיבים של טנזור תחת שינוי בסיס? (חומר רשות)

בסיס $\{\underline{e}^i\}$ $\longrightarrow$ $\underline{f}^j = P_i^{\ j}\underline{e}^i$ $\longrightarrow$ בסיס $\{\underline{f}^j\}$

$\underline{P} = (P_i^{\ j})$ transfer matrix מטריצה מעבר

וקטור $\underline{v}$: קואורדינטות (x_i) $\longleftrightarrow$ קואורדינטות (x'_j)

$$\underline{v} = x_i\underline{e}^i \longleftrightarrow \underline{v} = x'_j\underline{f}^j = x'_j P_i^{\ j}\underline{e}^i$$

$$P_i^{\ j}x'_j = x_i$$

$$\Rightarrow \underline{P}\underline{x}' = \underline{x} \Rightarrow \boxed{\underline{x}' = \underline{P}^{-1}\underline{x}}$$

העתקה ליניארית T: $T(\underline{v}) = \underline{w}$

מטריצה $\underline{A}$ $\longrightarrow$ מטריצה $\underline{A}'$

$$\begin{tikzcd}
\{x'_i\} \arrow[d, "\underline{y}'=\underline{A}'\underline{x}'"'] \arrow[r, shift left, "\underline{P}"] & \{x_i\} \text{ :קואורדינטות של } \underline{v} \arrow[l, shift left, "\underline{x}'=\underline{P}^{-1}\underline{x}"] \arrow[d, "\underline{A}\ \ \underline{y}=\underline{A}\underline{x}"] \\
\{y'_i\} & \{y_i\} \text{ :קואורדינטות של } \underline{w} \arrow[l, "\underline{y}'=\underline{P}^{-1}\underline{y}", "\underline{P}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$\underline{y}' = \underline{P}^{-1}\underline{y} = \underline{P}^{-1}(\underline{A}\underline{x}) = \underline{P}^{-1}\underline{A}(\underline{P}\underline{x}')$$

$$\boxed{\underline{A}' = \underline{P}^{-1}\underline{A}\,\underline{P}}$$

ברכיבים: $A'_i{}^{j} = Q_i^{\ k}A_k^{\ l}P_l^{\ j}$ כאשר $\underline{Q} = \underline{P}^{-1}$

טנזור כללי $T(\underline{a},\underline{b},\underline{c}) = \underline{w}$

ברכיבים:

$$w_i = T_i^{\ jkl}a_j b_k c_l \longleftrightarrow w'_i = T'_i{}^{jkl}a'_j b'_k c'_l$$

קואורדינטות $(a_j),(b_k),(c_l),(w_i)$ קואורדינטות $(a'_j),(b'_k),(c'_l),(w'_i)$

$$w'_{\bar i} = [T(\underline{a},\underline{b},\underline{c})]_{\{f^{\bar i}\}} = Q_{\bar i}^{\ i}[T(\underline{a},\underline{b},\underline{c})]_{\{e^i\}}$$
$$= Q_{\bar i}^{\ i}T_i^{\ jkl}a_j b_k c_l$$
$$= Q_{\bar i}^{\ i}T_i^{\ jkl}(P_j^{\ \bar j}a'_{\bar j})(P_k^{\ \bar k}b'_{\bar k})(P_l^{\ \bar l}c'_{\bar l})$$
$$\Rightarrow \boxed{T'_{\bar i}{}^{\bar j\bar k\bar l} = Q_{\bar i}^{\ i}T_i^{\ jkl}P_j^{\ \bar j}P_k^{\ \bar k}P_l^{\ \bar l}}$$

covariant/contravariant indices

$\leftrightarrow$ מחליפים לפי P/Q

$\leftrightarrow$ אינדקס למעלה\למטה

דוגמאות

$$\{\underline{e}^1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \underline{e}^2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}$$
$$\{\underline{f}^1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \underline{f}^2 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\} \quad \underline{P} = \begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \Leftarrow \underline{e}^1 + 4\underline{e}^2 = \underline{v} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

$$\underline{x}' = \begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix} \Leftarrow -5\underline{f}^1 + 3\underline{f}^2 = \underline{v}$$
$$-5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}}_{\underline{x}'} = \underbrace{\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}}_{\underline{P}^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}}_{\underline{x}}$$

מטריצה $\underline{A} = \begin{pmatrix}4&-2\\3&-1\end{pmatrix}$ לפי בסיס $\{\underline{e}^1,\underline{e}^2\}$

החלפת בסיס ל- $\{\underline{f}^1,\underline{f}^2\}$

$$\underline{A}' = \begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}6&-4\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$$

בדוק!

$$\begin{pmatrix}4&-2\\3&-1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\underline{f}^1} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = 2\underline{f}^1$$

$$\begin{pmatrix}4&-2\\3&-1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}}_{\underline{f}^2} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \underline{f}^2$$

דוגמא של שימוש בתכונות של טנזור ε

$$[(\underline{x}\wedge\underline{y})\wedge\underline{z}]_i = \varepsilon_{ijk}(\underline{x}\wedge\underline{y})_j z_k$$
$$= \varepsilon_{ijk}(\varepsilon_{jmn}x_m y_n)z_k$$

$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki}$

$$= \varepsilon_{jki}\varepsilon_{jmn}x_m y_n z_k$$

$\varepsilon_{jki}\varepsilon_{jmn} = \delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im}$

$$= (\delta_{km}\delta_{in} - \delta_{kn}\delta_{im})x_m y_n z_k$$
$$= \underbrace{\delta_{km}\delta_{in}x_m y_n z_k}_{k=m,\ i=n} - \underbrace{\delta_{kn}\delta_{im}x_m y_n z_k}_{k=n,\ i=m}$$
$$= x_k y_i z_k - x_i y_k z_k$$
$$= (\underline{x}\cdot\underline{z})y_i - (\underline{y}\cdot\underline{z})x_i$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(\underline{x}\wedge\underline{y})\wedge\underline{z}\\ &= (\underline{x}\cdot\underline{z})\underline{y} - (\underline{y}\cdot\underline{z})\underline{x}\end{aligned}}$$

IDENTITIES

זהויות עם div, curl, grad

אופרטור: $\phi \to \underline{\nabla}\phi$: $\underline{\nabla} \equiv \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ del/nabla

$\phi \to \partial\phi/\partial x_i$: $\partial_i \equiv \partial/\partial x_i$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{grad}: &\ (\underline{\nabla}\phi)_i = \partial\phi/\partial x_i \\ \text{curl}: &\ (\underline{\nabla}\wedge\underline{A})_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial/\partial x_j (A_k) \quad [\text{ב-}\mathbb{R}^3] \\ \text{div}: &\ \underline{\nabla}\cdot\underline{f} = \partial f_i/\partial x_i \end{aligned}}$$

תכונות

א.
$$(\underline{\nabla}\wedge(\underline{\nabla}\phi))_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial/\partial x_j((\underline{\nabla}\phi)_k)$$
$$= \varepsilon_{ijk}\, \partial/\partial x_j(\partial\phi/\partial x_k)$$
$$= \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{אנטי-סימטרית ב-}j\leftrightarrow k}\ \underbrace{\partial^2\phi/\partial x_j\partial x_k}_{\text{סימטרית ב-}j\leftrightarrow k} = 0$$

ב.
$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\wedge\underline{A}) = \partial/\partial x_i\,(\underline{\nabla}\wedge\underline{A})_i$$
$$= \partial/\partial x_i\,(\varepsilon_{ijk}\,\partial/\partial x_j(A_k))$$
$$= \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\text{אנטי-סימטרית } i\leftrightarrow j}\ \underbrace{\partial^2 A_k/\partial x_i\partial x_j}_{\text{סימטרית } i\leftrightarrow j} = 0$$

ג.
$$(\underline{\nabla}\wedge(f\underline{A}))_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial/\partial x_j (f\underline{A})_k$$
$$= \varepsilon_{ijk}\,\partial/\partial x_j (fA_k)$$
$$= \varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} A_k + f\,\partial/\partial x_j(A_k)\right)$$
$$= \varepsilon_{ijk}(\underline{\nabla}f)_j A_k + f\,\varepsilon_{ijk}\,\partial/\partial x_j(A_k)$$
$$\boxed{\underline{\nabla}\wedge(f\underline{A}) = (\underline{\nabla}f)\wedge\underline{A} + f(\underline{\nabla}\wedge\underline{A})}$$

ד.
$$\underline{\nabla}\cdot(\underline{A}\wedge\underline{B}) = \partial_i(\underline{A}\wedge\underline{B})_i$$
$$= \partial_i(\varepsilon_{ijk}A_jB_k)$$
$$= \varepsilon_{ijk}(\partial_i A_j)B_k + \varepsilon_{ijk}A_j(\partial_i B_k)$$
$$= (\varepsilon_{kij}\,\partial_i A_j)B_k - (\varepsilon_{jik}\,\partial_i B_k)A_j$$
$$= (\underline{\nabla}\wedge\underline{A})_k B_k - (\underline{\nabla}\wedge\underline{B})_j A_j$$
$$\boxed{\underline{\nabla}\cdot(\underline{A}\wedge\underline{B}) = (\underline{\nabla}\wedge\underline{A})\cdot\underline{B} - \underline{A}\cdot(\underline{\nabla}\wedge\underline{B})}$$

ה.
$$(\underline{\nabla}\wedge(\underline{\nabla}\wedge\underline{A}))_i = \varepsilon_{ijk}\,\partial_j(\underline{\nabla}\wedge\underline{A})_k$$
$$= \varepsilon_{ijk}\,\partial_j(\varepsilon_{klm}\,\partial_l A_m)$$
$$= \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klm}\,\partial_j\partial_l A_m$$
$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\,\partial_j\partial_l A_m$$
$$= \partial_j\partial_i A_j - \partial_j\partial_j A_i$$
$$= \partial_i(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \Delta A_i$$
$$\boxed{\underline{\nabla}\wedge(\underline{\nabla}\wedge\underline{A}) = \underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A}) - \Delta\underline{A}}$$

ב-$\mathbb{R}^3$: $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \underline{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \underline{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_1\frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_2\frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_3\frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix}$$

עוד אופרטורים:

$$\underline{A}\cdot\underline{\nabla} = A_i\,\partial/\partial x_i\ ,\qquad \underbrace{\partial^2/\partial x_i^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i} = \Delta}_{\text{Laplacian}}$$

גם על פונק' סקלריות וגם על פונק' וקטוריות

דוגמאות

א.
$$(\underline{A}\cdot\underline{\nabla})\underline{r} = A_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\underline{r})$$
$$= A_i\underline{e}_i = \underline{A}$$

ב.
$$(\underline{r}\cdot\underline{\nabla})r^n = x_i\,\partial/\partial x_i(r^n)$$
$$= x_i\cdot nr^{n-1}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_i}$$
$$= x_i\cdot nr^{n-1}\cdot\frac{x_i}{r}$$
$$= nr^{n-2}x_ix_i = nr^n$$

ג.
$$\Delta(f(r)) = \partial/\partial x_i(\partial/\partial x_i(f(r)))$$
$$= \partial/\partial x_i(f'(r)\cdot\partial r/\partial x_i)$$
$$= \partial/\partial x_i(f'(r)\cdot x_i/r)$$
$$= \partial/\partial x_i(\tfrac{1}{r}f'(r)\cdot x_i)$$
$$= \frac{1}{r}f'(r)\frac{\partial x_i}{\partial x_i} + \underbrace{d/dr(\tfrac{1}{r}f'(r))\cdot\frac{x_i}{r}}_{\partial/\partial x_i(\frac{1}{r}f'(r))}x_i$$

$d =$ מימד

$$= \frac{1}{r}f'(r)d + d/dr(\tfrac{1}{r}f'(r))\cdot r^2\cdot\tfrac{1}{r}$$
$$= f'' + \frac{d-1}{r}f'$$

פונקציה ϕ כך ש- $\Delta\phi = 0$ נקראת <u>פונקציה הרמונית</u> harmonic function

לכן r^{2-d} פונקציה הרמונית ($\frac{1}{r}$ בתלת-מימד)

וגם $\ln r$ פונקציה הרמונית בדו-מימד

* כוח הכובד : $\underline{\nabla}(1/r) = -\underline{r}/r^3$ — פוטנציאל סקלרי

או שדה חשמלי של מטען נקודתי

* פוטנציאל מגנטי וקטורי של זרם במוליך ישר (כאן 1-10) : $(\ln\rho)\cdot\hat{\underline{k}}$

ד.
$$\Delta(\underline{r}) = \underline{0} \Leftarrow \Delta(x) = \Delta(y) = \Delta(z) = 0$$

ה.
$$(\underline{A}\cdot\underline{\nabla})\phi = A_i\partial_i\phi$$
$$= \underline{A}\cdot(\underline{\nabla}\phi)$$

פונקציה סקלרית

<u>דוגמה: משוואות Navier-Stokes</u> (Fluid flow)

$$\rho\left(\frac{\partial\underline{v}}{\partial t} + (\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{v}\right) = -\underline{\nabla}p + \underline{\nabla}\cdot T + \underline{f}$$

$\rho =$ צפיפות ; $p =$ לחץ ; T: stress tensor ; $\underline{f}$: body forces (כבד\ חשמלי)

$\underline{v} =$ מהירות

כולם פונקציות של x,y,z,t.

$\Delta, \underline{\nabla}$ בקואורדינטות קוטביות

במישור $(x,y) \leftarrow (r,\theta)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \xRightarrow{\text{כלל השרשרת}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\theta$$

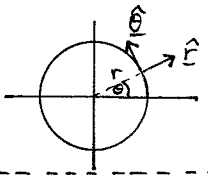
$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\text{grad}}{\boxed{\underline{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}}} \quad ①$$

$$\hat{r} = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} \qquad \hat{\theta} = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$$



שדה וקטורי: $\underline{f} = f_r\hat{r} + f_\theta\hat{\theta}$ (f_r, f_θ קומפוננטות לפי $\{\hat{r},\hat{\theta}\}$)

radial (רדיאלי) tangential (משיקי) components

$$= \begin{pmatrix} f_r\cos\theta - f_\theta\sin\theta \\ f_r\sin\theta + f_\theta\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla}\cdot\underline{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

$$= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(f_r\cos\theta - f_\theta\sin\theta)$$

$$+ \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)(f_r\sin\theta + f_\theta\cos\theta)$$

$$= \Big[\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial f_r}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$- \frac{1}{r}\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial f_r}{\partial\theta} - f_r\sin\theta - \sin\theta\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta} - f_\theta\cos\theta\right)\Big]$$

$$+ \Big[\sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial f_r}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial f_\theta}{\partial r}\right)$$

$$+ \frac{1}{r}\cos\theta\left(\sin\theta\frac{\partial f_r}{\partial\theta} + f_r\cos\theta + \cos\theta\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta} - f_\theta\sin\theta\right)\Big]$$

$$\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{f} = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rf_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta}} \quad ②$$

$$\underline{\nabla}^2\phi = \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\phi) = \underline{\nabla}\cdot\underline{f}$$

כאשר $\hat{r}\underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial r}}_{f_r} + \hat{\theta}\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}}_{f_\theta} \overset{①}{=} \underline{\nabla}\phi = \underline{f}$

$$\overset{②}{=} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

$$\boxed{\underline{\nabla}^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

בתלת-מימד $(x,y,z) \leftarrow (\rho,\theta,z)$ קואורדינטות גליליות

$$\underline{\nabla}^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

קואורדינטות כדוריות $(r,\theta,\phi) \leftarrow (x,y,z)$

$$\underline{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

$$\underline{\nabla} = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}$$

הערות: א. אופרטור דיפרנציאלי

$$y^2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$$

הנו $f(x,y) \mapsto y^2\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}$

דוגמא: $\left(y^2\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)(x\sin(xy))$

$$= y^2(yx\cos(xy) + \sin(xy)) + x^2\cos(xy)$$

ב: אבל ההרכבה לא תמיד קומוטטיבית:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \\ y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) &= y\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} \end{aligned}\right\}$$

משמעות:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \\ y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \end{aligned}\right\}$$

ג:

$$\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \neq \frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta$$

$$\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} \neq \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot f)$$

דרך אחרת

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{f} = \left(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\cdot\underline{f} = \hat{r}\cdot\frac{\partial\underline{f}}{\partial r} + \frac{1}{r}\hat{\theta}\cdot\frac{\partial\underline{f}}{\partial\theta}$$

$$\hat{r}\cdot\frac{\partial\underline{f}}{\partial r} = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} f_r\cos\theta - f_\theta\sin\theta \\ f_r\sin\theta + f_\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\hat{\theta}\cdot\frac{\partial\underline{f}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{pmatrix} f_r\cos\theta - f_\theta\sin\theta \\ f_r\sin\theta + f_\theta\cos\theta\end{pmatrix}$$

comparison

$$\hat{r}\cdot\frac{\partial\underline{f}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}(\underbrace{\hat{r}\cdot\underline{f}}_{f_r}) - \underbrace{\frac{\partial\hat{r}}{\partial r}}_{0}\cdot\underline{f} = \frac{\partial f_r}{\partial r}$$

$$\hat{\theta}\cdot\frac{\partial\underline{f}}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}(\underbrace{\hat{\theta}\cdot\underline{f}}_{f_\theta}) - \underbrace{\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta}}_{-\hat{r}}\cdot\underline{f} = \frac{\partial f_\theta}{\partial\theta} + f_r$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\theta} = \begin{pmatrix}-\cos\theta \\ -\sin\theta\end{pmatrix} = -\hat{r}}$$

$$\Rightarrow \underline{\nabla}\cdot\underline{f} = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f_\theta}{\partial\theta} + f_r\right)$$

הערה: מקבלים את הנוסחאות ל-(ρ,θ,z) מנוסחאות דו-מימדיות ע"י הוספת ביטוי עם z

הערה: כאן $\angle(\hat{r}, z \text{ ציר}) = \theta$ = polar angle $\in[0,\pi]$

ϕ = azimuthal angle $\in[0,2\pi]$

($\theta \leftrightarrow \phi$ ממתמ"פ (1) ומכט"ה)

(אבל כמו מתמ"פ (1) ומכט"ה)

1.3: פוטנציאל סקלרי ופוטנציאל וקטורי

scalar and vector potentials

פוטנציאל סקלרי

אומרים ש-ϕ פוטנציאל סקלרי של שדה וקטורי $\underline{f}$ אם $\underline{f}=-\nabla\phi$

קיים פוטנציאל סקלרי $\Leftarrow$ $\nabla\wedge\underline{f}=\underline{0}$

$\nabla\wedge(\nabla\phi)=\underline{0}$

אם $\boxed{\nabla\wedge\underline{f}=\underline{0}}$ בתחום D פשוט קשר (simply connected) $\Leftarrow$ קיימת פונקציה פוטנציאל ϕ

הוכחה: צריך לבדוק ש-$\underline{f}$ שדה משמר, כלומר ש- $\oint_C \underline{f}\cdot d\underline{r}=0$ לכל מסילה סגורה C.

מסילה C סגורה ב-D $\xLeftarrow{\text{D בתחום פשוט קשר}}$ קיים משטח Σ כך ש-$\partial\Sigma=C$

$\Downarrow$

$$\oint_C \underline{f}\cdot d\underline{r} = \oint_{\partial\Sigma} \underline{f}\cdot d\underline{r} \overset{\text{משפט Stokes}}{=} \iint_\Sigma (\nabla\wedge\underline{f})\cdot d\underline{S} \underset{\nabla\wedge\underline{f}=\underline{0}}{=} 0$$

□

הערה פונקציית פוטנציאל ϕ נתונה ע"י

$$\phi(\underline{r}) = -\int_\gamma \underline{f}\cdot d\underline{r} = \begin{pmatrix}\text{עבודה להגיע ל-}\underline{r}\\ \text{נגד הכוח } \underline{f}\end{pmatrix}$$

γ מסילה מנקודה קבועה $\underline{r}_0$ ל-$\underline{r}$ בתוך D

האינטגרל לא תלוי ב-γ כי

$$\int_{\gamma_1} \underline{f}\cdot d\underline{r} - \int_{\gamma_2} \underline{f}\cdot d\underline{r} = \oint_{\gamma_1\cup(-\gamma_2)} \underline{f}\cdot d\underline{r}=0$$

(מסילה סגורה)

דוגמה נגדית

$$\underline{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix}-y/(x^2+y^2)\\ x/(x^2+y^2)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\nabla\wedge\underline{f}=\underline{0}, \quad \oint_C \underline{f}\cdot d\underline{r} = \int_0^{2\pi}\underbrace{\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}}_{\underline{f}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}}_{d\underline{r}}dt$$

מעגל $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=0$, $0\le t\le 2\pi$

$$=\int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi\neq 0$$

לכן $\underline{f}$ לא שדה משמר

$\Leftarrow$ פוטנציאל סקלרי לא קיים

תחום ההגדרה $D=\mathbb{R}^3\setminus$ (ציר z)

לא בתוך D!

פוטנציאל וקטורי

אומרים ש-$\underline{A}$ פוטנציאל וקטורי של שדה וקטורי $\underline{f}$ אם $\underline{f}=\nabla\wedge\underline{A}$

קיים פוטנציאל וקטורי $\Leftarrow$ $\nabla\cdot\underline{f}=0$

$\nabla\cdot(\nabla\wedge\underline{A})=0$

אם $\boxed{\nabla\cdot\underline{f}=0}$ בתחום D בלי חורים (משפט Helmholtz) $\Leftarrow$ קיים פוטנציאל וקטורי $\underline{A}$ ל-$\underline{f}$ ($\underline{f}=\nabla\wedge\underline{A}$)

הערה נניח ש-$\nabla\cdot\underline{f}=0$ בתחום D בלי חורים.

Σ משטח סגור בתוך D $\xLeftarrow{\text{אין חורים ב-D}}$ קיים תחום R ב-D כך ש-$\partial R=\Sigma$

$\Downarrow$

$$\oiint_\Sigma \underline{f}\cdot d\underline{S} = \oiint_{\partial R} \underline{f}\cdot d\underline{S} \overset{\text{משפט Gauss}}{=} \iiint_R (\nabla\cdot\underline{f})\,dV \underset{\nabla\cdot\underline{f}=0}{=} 0$$

$\iint_\Sigma \underline{f}\cdot d\underline{S}$ לא תלוי ב-Σ רק בשפה $\partial\Sigma$ $\Leftrightarrow$ $\oiint_\Sigma \underline{f}\cdot d\underline{S}=0$ לכל משטח סגור Σ

$\Uparrow$

$\underline{A}$ פוטנציאל וקטורי $\Leftarrow$ $\iint_\Sigma \underline{f}\cdot d\underline{S} \overset{\text{משפט Stokes}}{=} \oint_{\partial\Sigma} \underline{A}\cdot d\underline{s}$

דוגמה נגדית

$$\underline{f}(x,y,z)=\frac{\underline{r}}{r^3} = -\nabla(1/r)$$

$$\nabla\cdot\underline{f} = -\nabla^2(1/r)=0$$

$$\oiint_\Sigma \underline{f}\cdot d\underline{S} = \oiint_\Sigma \frac{\underline{r}}{r^3}\cdot\underbrace{\frac{\underline{r}}{r}}_{\underline{N}}\,dS$$

ספירה $r=a$

$$=\oiint_\Sigma 1/a^2\,dS = \frac{4\pi a^2}{a^2} = 4\pi\neq 0$$

$\Leftarrow$ לא קיים פוטנציאל וקטורי

תחום ההגדרה $D=\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$

$\not\supset$ כדור $\text{Int}\,\Sigma$

דוגמאות של פוטנציאל סקלרי

א. שדה הכובד של מסה נקודתית m ב-$\underline{O}$ (gravitational field)
הוא:

$$\underline{F} = -\frac{Gm}{r^3}\underline{r} = \nabla\left(\frac{Gm}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \iint_{\substack{\text{ספירה}\\ r=a}} \underline{F}\cdot d\underline{S} = -4\pi G m, \qquad \nabla\cdot\underline{F} = \nabla^2\left(\frac{Gm}{r}\right) = 0$$

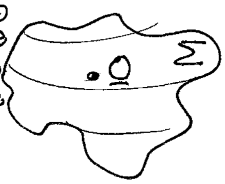
לכל נקודה $\neq \underline{O}$

$\Downarrow$ Green Gauss

$$\iint_\Sigma \underline{F}\cdot d\underline{S} = \iiint_R \nabla\cdot\underline{F}\,dV = 0$$

לכל $\Sigma = \partial R$ שפה של תחום R, $\underline{O}\notin R$

$$\overset{\text{כמו בתרגילים}}{\Rightarrow} \oiint_\Sigma \underline{F}\cdot d\underline{S} = \begin{cases}-4\pi G m, & \underline{O}\in \text{פנים של }\Sigma\\ 0, & \underline{O}\notin \text{פנים של }\Sigma\end{cases} = -4\pi G\cdot\left(\text{מסה בתוך }\Sigma\right)$$



ב. שדה הכובד של גוף קשיח בתחום D
עם צפיפות $\rho(\underline{r})$ הוא

$$\underline{F}(\underline{r}) = -\iiint_D \frac{G\rho(\underline{r}')}{\|\underline{r}-\underline{r}'\|^3}(\underline{r}-\underline{r}')\,d^3\underline{r}'$$

$$\overset{(א)}{\Rightarrow} \oiint_\Sigma \underline{F}\cdot d\underline{S} = -4\pi G\cdot\left(\text{מסה בתוך }\Sigma\right) \qquad (*)$$

שני הצדדים תלויים לינארית בצפיפות, ρ

$$\Rightarrow \oiint_{\partial R} \underline{F}\cdot d\underline{S} = -4\pi G\iiint_R \rho\,dV$$

לכל תחום R

Gauss || Green

$$\iiint_R (\nabla\cdot\underline{F})\,dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\underline{F} = -4\pi G\rho}$$

בגלל ש- $-\frac{Gm}{r} =$ (פוטנציאל סקלרי של מסה נקודתית m ב-$\underline{O}$)

לכן
$$\boxed{\phi(\underline{r}) = -\iiint_D \frac{G\rho(\underline{r}')}{\|\underline{r}-\underline{r}'\|}\,d^3\underline{r}'}$$
הוא הפוטנציאל סקלרי כאן

וגם $\underline{F} = -\nabla\phi \Leftarrow \nabla\cdot(\nabla\phi) = 4\pi G\rho$

$$\boxed{\nabla^2\phi = 4\pi G\rho}$$

ג. נקח גוף קשיח בצורה של כדור ברדיוס a, מסה M, צפיפות קבועה.

$$\iint_{\substack{\text{ספירה}\\ \text{ברדיוס } r}} \underline{F}\cdot d\underline{S} = \begin{cases}-4\pi GM & r\geq a\\ -4\pi G\frac{Mr^3}{a^3} & r<a\end{cases} \Leftarrow (*)$$

סימטריה $\Leftarrow$ $\underline{F}\,\|\,\underline{r}$ וגם $\|\underline{F}\|$ תלוי רק ב-r

צ"ל $\underline{F} = F(r)\cdot\hat{\underline{r}}$

$$\iint_{\substack{\text{ספירה}\\ \text{ברדיוס } r}} \underline{F}\cdot d\underline{S} = 4\pi r^2 F(r) \quad \Leftarrow$$

לכן:
$$4\pi r^2 F(r) = \begin{cases}-4\pi GM & r\geq a\\ -4\pi G\frac{Mr^3}{a^3} & r<a\end{cases}$$

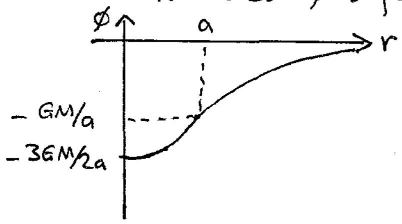
$$\Leftarrow F(r) = \begin{cases}-GM/r^2 & r\geq a\\ -GMr/a^3 & r<a\end{cases}$$

$$\Leftarrow \underline{F} = \begin{cases}-GM\underline{r}/r^3 & r\geq a\\ -GM\underline{r}/a^3 & r<a\end{cases}$$

וגם הפוטנציאל ϕ כך ש- $-\nabla\phi = \underline{F}$
הוא:

$$\phi(\underline{r}) = \begin{cases}-GM/r & r\geq a\\ GMr^2/2a^3 + \underbrace{\text{קבוע}}_{= -3GM/2a} & r<a\end{cases}$$

כך ש-ϕ רציפה ב-$r=a$



ד. מטען נקודתי q ב-$\underline{O}$ $\Leftarrow$ $\underline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\underline{r} = -\nabla\left(q/4\pi\varepsilon r\right)$ שדה חשמלי

$\rho =$ צפיפות המטען החשמלי

$$\underline{E}(\underline{r}) = \iiint \frac{\rho(\underline{r}')}{4\pi\varepsilon\|\underline{r}-\underline{r}'\|^3}(\underline{r}-\underline{r}')\,d^3\underline{r}' \quad \Leftarrow$$

$$\underline{E} = -\nabla V,\quad V(\underline{r}) = \iiint \frac{\rho(\underline{r}')}{4\pi\varepsilon\|\underline{r}-\underline{r}'\|}\,d^3\underline{r}' \quad \Leftarrow$$

$=$ (פוטנציאל חשמלי)

$$\nabla\cdot\underline{E} = -\nabla^2 V = \rho/\varepsilon$$

$$-\frac{1}{4\pi\varepsilon} \longleftrightarrow G$$

דוגמאות של פוטנציאל וקטורי

א. שדה מגנטי $\underline{B}$ כאשר $\underline{j}$ = וקטור צפיפות הזרם החשמלי מקיים את המשוואה:

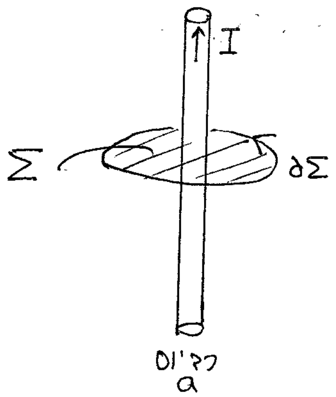
(משוואת Maxwell) $\nabla \wedge \underline{B} = \mu \underline{j}$

$$\Leftarrow \oint_{\partial\Sigma} \underline{B}\cdot d\underline{r} \underset{\text{משפט Stokes}}{=} \iint_\Sigma (\nabla\wedge\underline{B})\cdot d\underline{S} = \iint_\Sigma \mu \underline{j}\cdot d\underline{S}$$

ב. לחוט חשמלי בציר-z עם זרם I, רדיוס a

$$\oint_{\substack{\text{מעגל}\\ \text{סביב}\\ \text{ציר } z\\ \text{רדיוס } \rho}} \underline{B}\cdot d\underline{r} = \iint_{\substack{\Sigma\\ \text{דיסק}\\ \text{רדיוס } \rho}} \mu\underline{j}\cdot d\underline{S} = \begin{cases} \mu I & \rho\ge a \\ \mu I\rho^2/a^2 & \rho<a \end{cases}$$

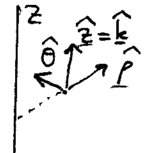
אם צפיפות הזרם החשמלי קבועה בחוט



סימטריות $\Leftarrow$ $\underline{B} \parallel \hat{\theta}$ ו- $\|\underline{B}\|$ תלוי רק ב-ρ

הקואורדינטה הגלילית ρ = (מרחק מציר z)

ז"א $\underline{B} = B(\rho)\,\hat{\theta}$



$\hat{\theta}$ וקטור יחידה $\parallel \frac{\partial r}{\partial\theta}$

$$\Rightarrow \oint_{\substack{\text{מעגל}\\ \text{סביב ציר } z\\ \text{ברדיוס } \rho}} \underline{B}\cdot d\underline{r} = B(\rho)\cdot 2\pi\rho = \begin{cases} \mu I & \rho\ge a \\ \mu I\rho^2/a^2 & \rho<a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad B(\rho) = \begin{cases} \mu I/2\pi\rho & \rho\ge a \\ \mu I\rho/2\pi a^2 & \rho<a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{B} = B(\rho)\,\hat{\underline{\theta}} = B(\rho)\,\hat{\underline{k}}\wedge\hat{\underline{\rho}} = (\nabla A(\rho))\wedge\hat{\underline{k}} = \nabla\wedge(A(\rho)\,\hat{\underline{k}})$$

כאשר $A'(\rho) = -B(\rho)$

$$A(\rho) = \begin{cases} -\mu I/2\pi \,\ln\rho + \text{קבוע} & \rho\ge a \\ -\mu I\rho^2/4\pi a^2 + \text{קבוע} & \rho<a \end{cases}$$

$\Rightarrow \underline{B} = \nabla\wedge\underline{A}$, $\underline{A} = A(\rho)\,\hat{\underline{k}}$: פוטנציאל מגנטי

$$\Rightarrow \nabla\wedge\underline{B} = \nabla\wedge(\nabla\wedge\underline{A}) \overset{1-8}{=} \nabla(\underbrace{\nabla\cdot\underline{A}}_{=0}) - \Delta\underline{A} = \begin{cases} 0 & \rho\ge a \\ \mu I/\pi a^2 & \rho<a \end{cases} = \mu\underline{j}$$

$\ln\rho$ פונקציה הרמונית

הערות

* אם $\underline{a}$ וקטור קבוע,
$\nabla\wedge(f\underline{a}) = (\nabla f)\wedge\underline{a}$

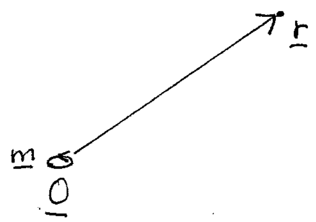
---

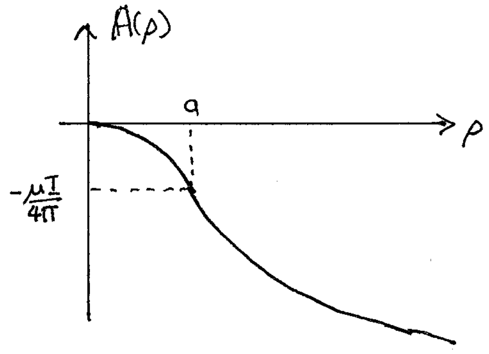
* אם f פונקציה רק של ρ,
$\nabla f(\rho) = f'(\rho)\cdot\hat{\underline{\rho}}$

ג. למסלול קצר של זרם ב-$\underline{O}$

$$\underline{A} = \frac{\mu}{4\pi}\,\frac{\underline{m}\wedge\underline{r}}{r^2}$$

כאשר $\underline{m}$ = (magnetic dipole moment of loop)





$$\nabla\cdot\underline{A} = \nabla\cdot(f(\rho)\,\hat{\underline{k}}) = \frac{\partial}{\partial z}(f(\rho)) = 0$$

$$\Delta(\rho^2) = \Delta(x^2+y^2) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^2+y^2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^2+y^2) = 2+2 = 4$$

חלוקה של שדה וקטורי לרכיב אורכי ולרכיב רוחבי

* $\underline{\nabla}\cdot\underline{f}=0 \Leftarrow$ מקומי' $\underline{f}$ בצורה $\underline{\nabla}\wedge\underline{A}$

* $\underline{\nabla}\wedge\underline{f}=\underline{0} \Leftarrow$ מקומי' $\underline{f}$ בצורה $\underline{\nabla}\phi$

* $\underline{f}$ שדה וקטורי כללי (בתחום מסום)

נגדיר $\rho=\underline{\nabla}\cdot\underline{f}$

$\Leftarrow$ קיימת פונקציה ϕ כך ש- $\rho=\underline{\nabla}^2\phi$ $\rightsquigarrow$ $\phi(\underline{r})=-\frac{1}{4\pi}\iiint_D \frac{\rho(\underline{r}')}{\|\underline{r}-\underline{r}'\|}d^3\underline{r}'$

פוטנציאל חשמלי של צפיפות המטען החשמלי ρ

(כמו דף 1-11 $\Leftarrow$ $\rho=\underline{\nabla}^2\phi$)

$$\Leftarrow \quad \underline{\nabla}\cdot(\underline{\nabla}\phi)=\underline{\nabla}\cdot\underline{f}$$

$$\Leftarrow \quad \underline{\nabla}\cdot(\underline{f}-\underline{\nabla}\phi)=0$$

$$\Leftarrow \quad \underline{f}-\underline{\nabla}\phi=\underline{\nabla}\wedge\underline{A}$$

לכן $\boxed{\underline{f}=\underline{\nabla}\phi+\underline{\nabla}\wedge\underline{A}}$

רכיב אורכי longitudinal component $(\underline{\nabla}\wedge\underline{f_1}=\underline{0})$ irrotational אי-סיבובי

רכיב רוחבי transverse component $(\underline{\nabla}\cdot\underline{f_2}=0)$ divergence-free ללא מקורות

<u>דוגמה חשמלי</u> אם $\rho, \underline{B}$ נתונים, מצאו את $\underline{E}$.

משוואות Maxwell

① $\underline{\nabla}\cdot\underline{E}=\rho/\varepsilon$ $\rightsquigarrow$ לבחור פתרון ϕ ל- $\underline{\nabla}^2\phi=\rho/\varepsilon$

$$\phi(\underline{r})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_D \frac{\rho(\underline{r}')}{\|\underline{r}-\underline{r}'\|}d^3\underline{r}'$$

$\Leftarrow \underline{\nabla}\cdot(\underline{E}-\underline{\nabla}\phi)=0 \Leftarrow$ קיים $\underline{A}$ כך ש- $\underline{E}-\underline{\nabla}\phi=\underline{\nabla}\wedge\underline{A}$

$$\boxed{\underline{E}=\underline{\nabla}\phi+\underline{\nabla}\wedge\underline{A}}$$

② $\underline{\nabla}\wedge\underline{E}=-\frac{\partial\underline{B}}{\partial t} \Leftarrow \underline{\nabla}\wedge(\underline{\nabla}\wedge\underline{A})=-\frac{\partial\underline{B}}{\partial t}$ (צריכים לפתור ל- $\underline{A}$)

לבחור פתרון $\underline{A}$

$$\underline{\nabla}^2\underline{A}=\frac{\partial\underline{B}}{\partial t}$$

$$\underline{A}(\underline{r})=-\frac{1}{4\pi}\iiint_D \frac{\partial\underline{B}/\partial t}{\|\underline{r}-\underline{r}'\|}d^3\underline{r}'$$

③ $\underline{\nabla}\cdot\underline{B}=0 \Leftarrow \underline{\nabla}\cdot\underline{A}=0$

$$\underline{\nabla}\wedge(\underline{\nabla}\wedge\underline{A})=\underline{\nabla}(\underline{\nabla}\cdot\underline{A})-\underline{\nabla}^2\underline{A}=-\partial\underline{B}/\partial t$$

לכן קיבלנו פתרון : $\boxed{\underline{E}=\nabla\phi+\nabla\wedge\underline{A}}$

רכיב אורכי ($\nabla\phi$) , רכיב רוחבי ($\nabla\wedge\underline{A}$)