פרק 1: אנליזה וקטורית

1.1: משפטי אינטגרלים Green, Stokes, Gauss

תזכורת: אינטגרציה של שדה וקטורי $\underline{f}$

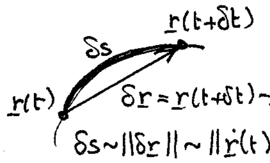
על מסילה C

C: curve

s: פרמטר האורך

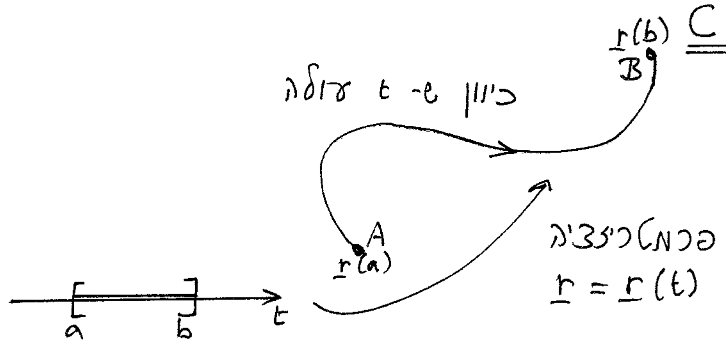
$d\underline{r} \equiv d\underline{s}$: דיפרנציאל או קירוב ליניארי לשינוי קטן $\delta\underline{r}$

$ds = \|d\underline{s}\|$: אלמנט אורך



$\delta\underline{r} = \underline{r}(t+\delta t) - \underline{r}(t) \sim d\underline{r} = \underline{\dot r}(t)\,dt$

$\delta s \sim \|\delta\underline{r}\| \sim \|\underline{\dot r}(t)\,dt\| = ds$



$$\int_C \underline{f}\cdot d\underline{r} \equiv \int_C \underline{f}\cdot d\underline{s} \equiv \int_a^b \underline{f}(\underline{r}(t))\cdot \underbrace{\underline{\dot r}(t)\,dt}_{d\underline{r}}$$

בדו-מימד: $\underline{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$: $\int_C \underline{f}\cdot d\underline{r} \equiv \int_C f_1\,dx + f_2\,dy$

בתלת-מימד: $\underline{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}$: $\int_C \underline{f}\cdot d\underline{r} \equiv \int_C f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$

על משטח Σ

Σ: אות יוונית שמקבילה S
surface

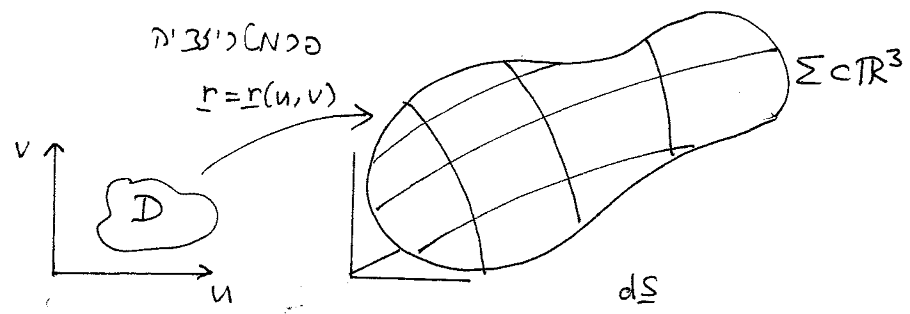
dS: חלק של משטח surface area

$dS\cdot\underline{\hat N} = d\underline{S}$
וקטור נורמלי למשטח

D: domain (תחום ההגדרה)

dA: אלמנט שטח של תחום

R: region (תלת-ממדי) area דו-מימדי $\begin{pmatrix} dxdy \\ = dA \end{pmatrix}$



$$\iint_\Sigma \underline{f}\cdot d\underline{S} \equiv \iint_D \underline{f}(\underline{r}(u,v))\cdot \overbrace{\left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right)du\,dv}^{d\underline{S}}$$

משפטי אינטגרלים:

בחד-מימד: סוגים של אינטגרל

$[\phi] \longleftrightarrow \int_a^b f\,dx$

$\boxed{[\phi]_a^b = \int_a^b \phi'}$

המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי
FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS

בדו-מימד: סוגים של אינטגרל:

$[\phi] \longleftrightarrow \int_C \underline{f}\cdot d\underline{s} \longleftrightarrow \iint_D g\,dA$

$\boxed{[\phi]_A^B \equiv [\phi]_{\partial C} = \int_C \nabla\phi\cdot d\underline{r}}$

C מסילה מנקודה A ל-B

$\boxed{\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy}$

משפט Green

בתלת-מימד:

$[\phi] \longleftrightarrow \int_C \underline{f}\cdot d\underline{s} \longleftrightarrow \iint_\Sigma \underline{g}\cdot d\underline{S} \longleftrightarrow \iiint_R h\,dV$

$\boxed{[\phi]_{\partial C} = \int_C \nabla\phi\cdot d\underline{s}}$

$[\phi]_A^B$

C מסילה מנקודה A ל-B

$\boxed{\oint_{\partial\Sigma} \underline{f}\cdot d\underline{s} = \iint_\Sigma (\underline{\nabla}\wedge\underline{f})\cdot d\underline{S}}$

משפט Stokes

$\boxed{\oiint_{\partial R} \underline{f}\cdot d\underline{S} = \iiint_R (\underline{\nabla}\cdot\underline{f})\,dV}$

משפט Gauss

שקילות של משפטים

$A: \boxed{[f]_a^b = \int_a^b f'}$ $\iff$ $B: \boxed{[\phi]_{\partial C} = \int_C \underline{\nabla}\phi \cdot d\underline{r}}$

Ⓐ מקרה פרטי של Ⓑ:

כאשר $\phi(x,y,z) = f(x)$

והמסילה C היא הקטע מ- $(a,0,0)$ ל- $(b,0,0)$

$(a,0,0) \xrightarrow{C} (b,0,0)$ $\quad \underline{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$[\phi]_{\partial C} \xrightarrow{\text{שווים מ-Ⓑ}} \int_C \nabla\phi \cdot d\underline{r}$$

$$[\phi]_{\partial C} = \phi(b,0,0) - \phi(a,0,0) = f(b) - f(a)$$

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\underline{r} = \int_a^b \underbrace{\begin{pmatrix} f'(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{\underline{r}(t)}}_{\nabla\phi} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\dot{\underline{r}}} dt = \int_a^b f'(t)\, dt$$

מקבלים Ⓐ

הוכחה של Ⓑ מ- Ⓐ:

$$\int_C \underline{\nabla}\phi \cdot d\underline{r} = \int_a^b (\underline{\nabla}\phi)(\underline{r}(t)) \cdot \dot{\underline{r}}(t)\, dt$$

$$\overset{\text{כלל השרשרת}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt}(\phi(\underline{r}(t))\, dt$$

$$\overset{Ⓐ}{=} [\phi(\underline{r}(t))]_a^b = [\phi]_A^B$$

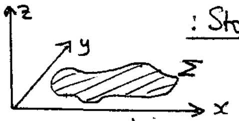
(כמו דף 6-11, מת"פ 1)

$\boxed{\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$ $\iff$ $\boxed{\oint_{\partial\Sigma} \underline{f} \cdot d\underline{s} = \iint_\Sigma (\underline{\nabla} \wedge \underline{f}) \cdot d\underline{S}}$

משפט Green — P, Q פונקציות של x,y, $D \subset \mathbb{R}^2$

משפט Stokes — $\underline{f}$ פונקציה של x,y,z, $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$

משפט Green מקרה פרטי של משפט Stokes:



כאשר $\underline{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$

והמשטח $\Sigma = \{(x,y,0) \mid (x,y) \in D\}$ (פרמטריזציה $\underline{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$)

$$\oint_{\partial\Sigma} \underline{f} \cdot d\underline{s} \xrightarrow[\text{ממשפט Stokes}]{\text{שווים}} \iint_\Sigma (\nabla \wedge \underline{f}) \cdot d\underline{S}$$

$$= \int_{\partial D} \begin{pmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} \cdot d\underline{r} = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$$

$$= \iint_D \left[\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx\,dy}_{d\underline{S}}$$

$$\underline{r}_x \wedge \underline{r}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

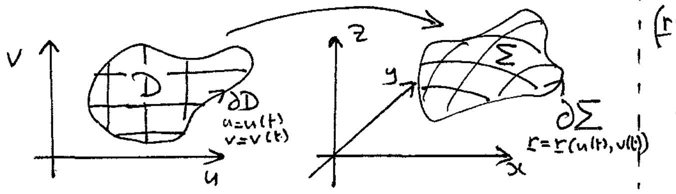
$$= \iint_D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

מקבלים את משפט Green

הוכחה של משפט Stokes ממשפט Green:

עבור פרמטריזציה $\underline{r} = \underline{r}(u,v)$, $(u,v) \in D$ של Σ



נניח ש- $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ $(a \le t \le b)$ פרמטריזציה של ∂D

$$\oint_{\partial\Sigma} \underline{f} \cdot d\underline{s} = \int_a^b \underline{f}(\underline{r}(u(t),v(t))) \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\dot{u}(t) + \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\dot{v}(t)\right)}_{d\underline{r}/dt \text{ (כלל השרשרת)}} dt$$

פרמטריזציה $\underline{r} = \underline{r}(u(t),v(t))$, $a \le t \le b$

$$= \int_a^b \begin{pmatrix} \underline{f}(\underline{r}(u,v)) \cdot \partial\underline{r}/\partial u \\ \underline{f}(\underline{r}(u,v)) \cdot \partial\underline{r}/\partial v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_{\partial D} \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \cdot d\underline{r}$$

נגדיר: $\boxed{\begin{aligned} P(u,v) &= \underline{f}(\underline{r}(u,v)) \cdot \partial\underline{r}/\partial u \\ Q(u,v) &= \underline{f}(\underline{r}(u,v)) \cdot \partial\underline{r}/\partial v \end{aligned}}$

משפט Green

$$= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du\,dv$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right)^T * [(D\underline{f}) - (D\underline{f})^T] * \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right) du\,dv$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \underline{f}(\underline{r}(u,v)) \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial v}(\underline{f}(\underline{r}(u,v)))}_{D\underline{f}|_{\underline{r}(u,v)} * \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}$$

כלל השרשרת — כפל מטריצות $*$

$$= \underline{f} \cdot \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right)^T * (D\underline{f})^T * \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u} = \underline{f} \cdot \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial u \partial v} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial u}(\underline{f}(\underline{r}(u,v)))}_{D\underline{f}|_{\underline{r}(u,v)} * \frac{\partial \underline{r}}{\partial u}} \cdot \frac{\partial \underline{r}}{\partial v}$$

$$= \underline{f} \cdot \frac{\partial^2 \underline{r}}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial v}\right)^T * (D\underline{f}) * \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial u}\right)$$

• מכפלה פנימית

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{a}^T * \underline{b} = \underline{b}^T * \underline{a}$$

$$\underline{f}=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix} \Rightarrow D\underline{f}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}&\frac{\partial f_1}{\partial y}&\frac{\partial f_1}{\partial z}\\\frac{\partial f_2}{\partial x}&\frac{\partial f_2}{\partial y}&\frac{\partial f_2}{\partial z}\\\frac{\partial f_3}{\partial x}&\frac{\partial f_3}{\partial y}&\frac{\partial f_3}{\partial z}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (D\underline{f})-(D\underline{f})^T=\begin{pmatrix}0&\frac{\partial f_1}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial x}&\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\\\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}&0&\frac{\partial f_2}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial y}\\\frac{\partial f_3}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial z}&\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-C&B\\C&0&-A\\-B&A&0\end{pmatrix}$$

כאשר

$$\underline{\nabla}\wedge\underline{f}=\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\\partial/\partial y\\\partial/\partial z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\\\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\\\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$$

תזכורת מאלגברה לינארית

המטריצה $\begin{pmatrix}0&-C&B\\C&0&-A\\-B&A&0\end{pmatrix}$ היא המטריצה של ההעתקה הלינארית

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}0&-C&B\\C&0&-A\\-B&A&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-Cy+Bz\\Cx-Az\\-Bx+Ay\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ $D\underline{f}-(D\underline{f})^T$ היא המטריצה של ההעתקה הלינארית $\underline{v}\longmapsto(\underline{\nabla}\wedge\underline{f})\wedge\underline{v}$

$$\oint_{\partial\Sigma}\underline{f}\cdot d\underline{s}\overset{(\text{1-2 דף})}{=}\iint_D\left(\frac{\partial\underline{r}}{\partial v}\right)^T*\left[(D\underline{f})-(D\underline{f})^T\right]*\left(\frac{\partial\underline{r}}{\partial u}\right)du\,dv$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial\underline{r}}{\partial v}\right)^T*\left((\underline{\nabla}\wedge\underline{f})\wedge\left(\frac{\partial\underline{r}}{\partial u}\right)\right)du\,dv$$

$$\boxed{\underline{a}^T*\underline{b}=\underline{a}\cdot\underline{b}}\rightarrow=\iint_D\left((\underline{\nabla}\wedge\underline{f})\wedge\frac{\partial\underline{r}}{\partial u}\right)\underset{\text{מכפלה פנימית}}{\cdot}\frac{\partial\underline{r}}{\partial v}\,du\,dv$$

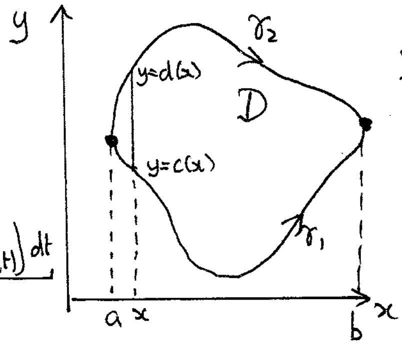
$$=\iint_D(\underline{\nabla}\wedge\underline{f})\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial\underline{r}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\underline{r}}{\partial v}\right)du\,dv}_{d\underline{S}}=\iint_D(\underline{\nabla}\wedge\underline{f})\cdot d\underline{S}$$

קבלנו את משפט Stokes משפט Green

הוכחה של משפט Green

① מקרה פרטי: התחום D מקיים התנאי: "תחום פשוט"

"כל חיתוך לא ריק עם קו מקביל לציר x או ציר y הוא קטע"



$D=\{(x,y): a\le x\le b,\ c(x)\le y\le d(x)\}$

$\partial D=\gamma_1\cup(-\gamma_2)$

$\gamma_1=\{(t,c(t)): a\le t\le b\}$

$\gamma_2=\{(t,d(t)): a\le t\le b\}$

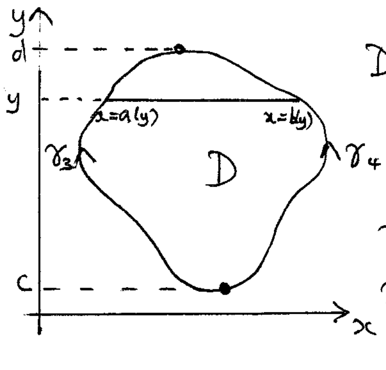
$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dA=\int_a^b\left(\int_{c(x)}^{d(x)}\left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dy\right)dx$$

$$=\int_a^b\left[-P(x,y)\right]_{y=c(x)}^{y=d(x)}dx$$

$$=\int_a^b P(x,c(x))-P(x,d(x))\,dx$$

$$\oint_{\substack{\partial D\\ \gamma_1\cup(-\gamma_2)}}P\,dx=\underbrace{\int_a^b\begin{pmatrix}P(t,c(t))\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\c'(t)\end{pmatrix}dt}_{\int_{\gamma_1}}-\underbrace{\int_a^b\begin{pmatrix}P(t,d(t))\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\d'(t)\end{pmatrix}dt}_{\int_{\gamma_2}}$$

$$=\int_a^b P(t,c(t))\,dt-\int_a^b P(t,d(t))\,dt$$



$D=\{(x,y): c\le y\le d,\ a(y)\le x\le b(y)\}$

$\partial D=(-\gamma_3)\cup\gamma_4$

$\gamma_3=\{(a(t),t): c\le t\le d\}$

$\gamma_4=\{(b(t),t): c\le t\le d\}$

$$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\,dA=\int_c^d\left(\int_{a(y)}^{b(y)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\right)dy$$

$$=\int_c^d\left[Q(x,y)\right]_{x=a(y)}^{x=b(y)}dy$$

$$=\int_c^d Q(b(y),y)-Q(a(y),y)\,dy$$

$$\oint_{\substack{\partial D\\ (-\gamma_3)\cup\gamma_4}}Q\,dy=-\int_c^d\begin{pmatrix}0\\Q(a(t),t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a'(t)\\1\end{pmatrix}dt+\int_c^d\begin{pmatrix}0\\Q(b(t),t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b'(t)\\1\end{pmatrix}dt$$

$$=-\int_c^d Q(a(t),t)\,dt+\int_c^d Q(b(t),t)\,dt$$

לכן:

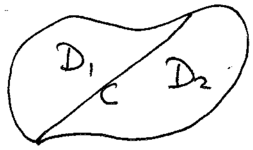
$$\begin{cases}\oint_{\partial D}P\,dx=\iint_D-\frac{\partial P}{\partial y}\,dA\\ \oint_{\partial D}Q\,dy=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\,dA\end{cases}$$

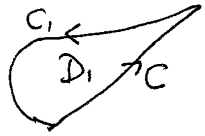
סכום: $\oint_{\partial D}P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$

קבלנו את משפט Green

עבור תחומים פשוטים

* קיום משפט Green לתחומים D_1, D_2
גורר קיומו עבור איחודם $D=D_1\cup D_2$
כאשר D_1, D_2 הם תחומים זרים עם חלק משותף
של שפה C





$$\oint_{\underset{\substack{C_1\cup C\\(\int_{C_1}+\int_C)}}{\partial D_1}} Pdx+Qdy=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

$$\oint_{\underset{\substack{(-C)\cup C_2\\(-\int_C+\int_{C_2})}}{\partial D_2}} Pdx+Qdy=\iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA$$

סכום

$$\oint_{C_1\cup C_2} Pdx+Qdy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA \rightarrow \text{משפט Green ל-}D.$$

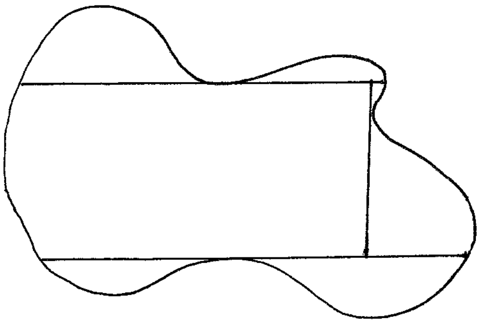
$D=D_1\cup D_2$

□

קיבלנו את משפט Green הכללי ולכן גם את משפט Stokes

② מקרה כללי

*כל תחום כללי, ניתן להצגה ע"י איחוד של תחומים פשוטים.



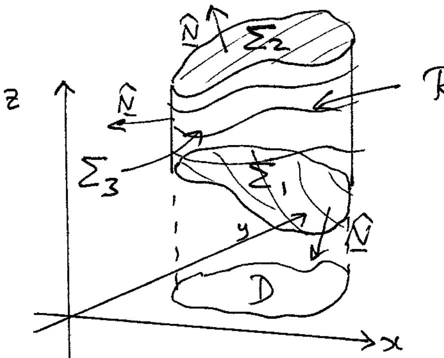
הוכחת משפט Gauss $\iiint_R(\nabla\cdot f)dV=\oiint_{\partial R} f\cdot d\Sigma$

הרעיון: ⓐ להוכיח לתחומים עם תנאי מיוחד, $f=\begin{pmatrix}0\\0\\f_3\end{pmatrix}$

ⓑ לסכום על שלושה מקרים $\begin{pmatrix}f_1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\f_2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\f_3\end{pmatrix}$

לקבלת הוכחה עבור המקרה בו f כללי והתחום הוא תחום פשוט)

ⓒ להדביק את התחומים הפשוטים ביחד לקבלת תחום כללי



ⓐ מקרה פרטי: $R=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\ a(x,y)\le z\le b(x,y)\}$, $f=\begin{pmatrix}0\\0\\g(x,y,z)\end{pmatrix}$

$\partial R=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\Sigma_3$

$\Sigma_1:\ r=\begin{pmatrix}x\\y\\a(x,y)\end{pmatrix}$

$\frac{\partial r}{\partial x}\wedge\frac{\partial r}{\partial y}=\begin{pmatrix}1\\0\\\partial a/\partial x\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\1\\\partial a/\partial y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\partial a/\partial x\\-\partial a/\partial y\\1\end{pmatrix}$

רוצים נורמל חיצוני ל-R ⇐ שלילה

$$\iint_{\Sigma_1} f\cdot d\Sigma=\iint_D\begin{pmatrix}0\\0\\g\end{pmatrix}\Big|_r\cdot\begin{pmatrix}\partial a/\partial x\\\partial a/\partial y\\-1\end{pmatrix}dxdy$$
$$=-\iint_D g(x,y,a(x,y))\,dxdy$$

$\Sigma_2:\ r=\begin{pmatrix}x\\y\\b(x,y)\end{pmatrix}$

$\frac{\partial r}{\partial x}\wedge\frac{\partial r}{\partial y}=\begin{pmatrix}-\partial b/\partial x\\-\partial b/\partial y\\1\end{pmatrix}$

נורמלה חיצוני ל-R
⇐ שלילה ב-Σ_2

$$\iint_{\Sigma_2} f\cdot d\Sigma=\iint_D\begin{pmatrix}0\\0\\g\end{pmatrix}\Big|_r\cdot\begin{pmatrix}-\partial b/\partial x\\-\partial b/\partial y\\1\end{pmatrix}dxdy$$
$$=\iint_D g(x,y,b(x,y))\,dxdy$$

Σ_3: וקטור נורמלה
$\parallel$ מישור x,y

$\Rightarrow\iint_{\Sigma_3} f\cdot d\Sigma$
$=\iint_\Sigma\begin{pmatrix}0\\0\\g\end{pmatrix}\cdot\hat N\,dS$
$=0$

ביחד:

$$\iint_\Sigma f\cdot d\Sigma=\iint_D g(x,y,b(x,y))-g(x,y,a(x,y))\,dxdy$$

$$\iiint_R(\nabla\cdot f)dV=\iint_D\left(\int_{a(x,y)}^{b(x,y)}\frac{\partial g}{\partial z}dz\right)dxdy=\iint_D[g(x,y,z)]_{z=a(x,y)}^{z=b(x,y)}dxdy=\iint_D g(x,y,b(x,y))-g(x,y,a(x,y))\,dxdy$$

$\nabla\cdot f=\partial g/\partial z$

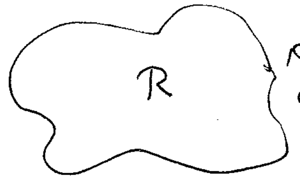
קיבלנו את משפט Gauss עבור המקרה הפרטי

□

(ⓑ,ⓒ כמו במשפט Green)

שימושים של משפט Gauss – משוואת הרציפות
THE EQUATION OF CONTINUITY

א) Fluid flow (דינמיקת זורמים)

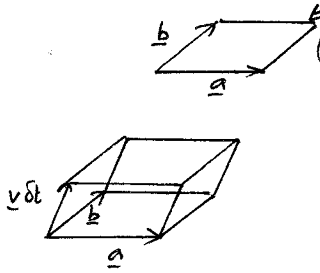


תחום $\subset \mathbb{R}^3$

מהירות וקטורית $= \underline{v}(x,y,z,t)$

צפיפות $= \rho(x,y,z,t)$

מסה בתוך R $= \iiint_R \rho(x,y,z,t)\,dV$



חלק קטן של משטח בצורה מקבילית $(d\underline{S} = \underline{a}\wedge\underline{b})$

חלקיק עם מהירות $\underline{v}$ בזמן δt יוצא נפח: ~ נפח של מקבילון

$= (\underline{a}\wedge\underline{b})\cdot \underline{v}\,\delta t$

$= (\underline{v}\cdot d\underline{S})\,\delta t$

כמות המסה היוצאת ביחידת זמן: $\rho\,\underline{v}\cdot d\underline{S}$

אינטגרציה $\longrightarrow$

$$\oiint_{\partial R} \rho\,\underline{v}\cdot d\underline{S} = \left(\text{כמות המסה העוברת דרך } \partial R \text{ (החוצה מ-}R\text{) ביחידת זמן}\right)$$

משוואת הרציפות: (אם אין מקור)

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_R \rho(x,y,z,t)\,dV\right) = -\oiint_{\partial R} \rho\,\underline{v}\cdot d\underline{S} \overset{\text{משפט Gauss}}{=} -\iiint_R \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{v})\,dV$$

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint_R \rho\,dV\right) = \lim_{\delta t\to 0}\frac{1}{\delta t}\left(\iiint_R \rho(x,y,z,t+\delta t)\,dV - \iiint_R \rho(x,y,z,t)\,dV\right)$$

$$= \lim_{\delta t\to 0}\iiint_R \underbrace{\frac{\rho(x,y,z,t+\delta t)-\rho(x,y,z,t)}{\delta t}}_{\to\,\partial\rho/\partial t}\,dV$$

$$= \iiint_R \partial\rho/\partial t\,dV$$

$$\longrightarrow \iiint_R \partial\rho/\partial t\,dV = -\iiint_R \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{v})\,dV \Leftarrow$$

$$\frac{\iiint_R \partial\rho/\partial t\,dV}{\text{נפח של } R} = -\frac{\iiint_R \underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{v})\,dV}{\text{נפח של } R} \Leftarrow$$

ממוצע של $\partial\rho/\partial t$ על R — ממוצע של $\underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{v})$ על R

$$\boxed{\partial\rho/\partial t = -\underline{\nabla}\cdot(\rho\underline{v})} \Leftarrow$$

בגבול כאשר R תחום קטן סביב נקודה מסוימת

דוגמה: זרימה לא דחיסה
incompressible flow

$\underline{\nabla}\cdot\underline{v} = 0 \Leftarrow \rho =$ קבוע

ב) electric current

$\underline{j} =$ וקטור צפיפות הזרם החשמלי — current density

$\rho =$ צפיפות המטען החשמלי — charge density

$\Leftarrow$ משוואת הרציפות

$$\boxed{\underline{\nabla}\cdot\underline{j} = -\partial\rho/\partial t}$$

ג) Maxwell's equation

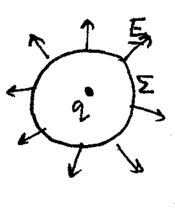
$\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \rho/\varepsilon$ (static)

$\underline{E} =$ שדה חשמלי

$\rho =$ צפיפות המטען החשמלי

$$\oiint_\Sigma \underline{E}\cdot d\underline{S} \overset{\text{משפט Gauss}}{=} \iiint_{\text{פנים של }\Sigma} (\underline{\nabla}\cdot\underline{E})\,dV = \iiint_{\text{פנים של }\Sigma} \frac{\rho}{\varepsilon}\,dV = Q/\varepsilon$$

Q — המטען הכולל בתוך Σ



דוגמה: מטען נקודתי point charge q ב-0, $\Sigma =$ (ספירה ברדיוס a)

$$\oiint_\Sigma \underline{E}\cdot d\underline{S} = \frac{q}{\varepsilon} \Leftarrow$$

סימטריות $\Rightarrow \underline{E}\parallel\underline{r}$

$$\underline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\hat{\underline{r}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\,\underline{r}$$