# חשבון אינפיניטסימלי מתקדם (80315)

## סמסטר א' תשס"ב

**מרצה** : רות לורנס-נאימרק (חדר 308 בניין איינשטיין , ruthel@ma.huji.ac.il)

**שעות הקורס** : יום ג' 10-12 (לוי 7) , יום ד' 1-3 (פלדמן ב')

**אתר** : http://www.math.huji.ac.il/~ruthel/courses/infima01

**תוכן הקורס**: ① **מרחבים מטריים ונורמים**

הגדרה, דוגמאות, קומפקטיות, שלמות, ושימושיה בתורת הקירובים

(פרקים IV, XI, VII, VIII)

② **פונקציות $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$**

דיפרנציאביליות, כלל שרשרת, משפטי הפונקציה ההפוכה והסתומה, כופלי לגרנז'

(פרק X)

③ **מסילות**

אורך מסילה, פונקציות בעלות השתנות חסומה

אינטגרציה על מסילות, הומוטופיה

(פרקים V, IX)

④ **אינטגרציה של פונקציות בכמה משתנים**

אינטגרל רימן בכמה משתנים, משפט פוביני, חילוף משתנה

(פרק XII)

**ספר לימוד עיקרי** : י. לינדנשטראוס "חשבון אינפיניטסימלי מתקדם" חלקים א' ו-ב' (אקדמון)

**ספרים באנגלית** : M. Spivak "Calculus on manifolds"

C. Edwards "Advanced Calculus of Several Variables"

R. Courant "Differential and Integral Calculus" Vol 2

**דרישות פורמליות** : ציון התרגיל מהווה 20% מן ציון הסופי ונקבע ע"י 5 בוחנים (תרגילי כיתה)

ציון הבחינה מהווה 80% מן ציון הסופי

(בחינה 3 שעות על החומר שנלמד בשעור ובתרגיל)

**הגדרה**: בשם מרחב מטרי (metric space) יקרא זוג $(X,d)$ כאשר

$X=$ (קבוצה לא ריקה)

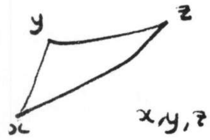
מטריקה (metric) $\to d: X\times X \to \mathbb{R}$

כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

א) (סימטריה) $d(x,y)=d(y,x)$ לכל $x,y\in X$

ב) (חיוביות) $d(x,y)>0$, $d(x,x)=0$ לכל $x,y\in X$ נקודות שונות

ג) (אי שיויון המשולש)



$$d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$$

לכל נקודות $x,y,z\in X$

$(\mathbb{R},d)$ $d(x,y)=|x-y|$

$(\text{מסילה}, d)$ מרחק על המסילה $=d$

$(\mathbb{R},d)$ $d(x,y)=|f(x)-f(y)|$ כאשר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חח"ע

$(\mathbb{R}^n,d)$ $d(\underline{x},\underline{y})=\left[\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$

$(\mathbb{R}^n,d)$ $d(\underline{x},\underline{y})=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$

$(\mathbb{R}^n,d)$ $d(\underline{x},\underline{y})=\sum_{i=1}^n |x_i-y_i|$

$(X,d)$ קבוצה שרירותית $d(x,y)=\begin{cases}1 & x\ne y\\ 0 & x=y\end{cases}$

מטריקה דיסקרטית (discrete metric)

$(X,d)$ מרחב מטרי $\Rightarrow$ $(Y,d')$ מרחב מטרי כאשר $\emptyset\ne Y\subset X$

$d'=d|_{Y\times Y}$

<u>המטריקה המושרית</u>
induced metric

**הגדרה**: בשם מרחב נורמי (normed space) יקרא זוג $(X,\|\cdot\|)$ כאשר

$X=$ מרחב וקטורי

נורמה (norm) $\to \|\cdot\|: X\to\mathbb{R}$

כך שהתנאים הבאים מתקיימים:

א) (חיוביות) $\|\underline{x}\|>0$ לכל $\underline{0}\ne\underline{x}\in X$

ב) $\|\lambda\cdot\underline{x}\|=|\lambda|\cdot\|\underline{x}\|$ לכל $\underline{x}\in X$, $\lambda$ סקלר

ג) $\|\underline{x}+\underline{y}\|\le\|\underline{x}\|+\|\underline{y}\|$ לכל $\underline{x},\underline{y}\in X$

מרחב נורמי $(X,\|\cdot\|)$ $\Rightarrow$ מרחב מטרי $(X,d)$

$d(\underline{x},\underline{y})=\|\underline{x}-\underline{y}\|$

על $\mathbb{R}^n$:

$$\|\underline{x}\|_1=\sum_{i=1}^n|x_i|$$

$$\|\underline{x}\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

$$\|\underline{x}\|_2=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$$

על קבוצה של פונקציות רציפות ב-$[0,1]$

$$\|f\|=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)|$$

<u>אי שיויון Cauchy-Schwartz</u>: $\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$

הוכחה 1:

$$0\le\sum_{i,j=1}^n (x_iy_j-x_jy_i)^2=\sum_{i,j=1}^n (x_i^2y_j^2+x_j^2y_i^2-2x_iy_ix_jy_j)$$

$$=2\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)-2\sum_{1\le i,j\le n}x_iy_ix_jy_j$$

$$=2\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)-2\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2$$

$\square$

לכל מספרים ממשיים $x_i$ ו-$y_i$.

$$\sum_{i=1}^n (x_i+\lambda y_i)^2$$

$$=\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)+2\lambda\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)+\lambda^2\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)}_{\text{חיובי לכל מספר ממשי } \lambda}$$

$$\Downarrow b^2\le 4ac$$

$$\left(2\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2\le 4\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$$

$\square$

ב- $\mathbb{R}^n$:

$$\|\underline{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\|\underline{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

$$l_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$$

$$l_\infty^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$$

א) ב- $\mathbb{R}^1$, $\|\underline{x}\|_p = \|\underline{x}\|_\infty = |x|$

ב) $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$ קבוע $\Leftarrow \lim_{p\to\infty}\|\underline{x}\|_p = \|\underline{x}\|_\infty$

ג) $l_2^n =$ המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^n$

ד) $0<p<1$, $n>1$

$\Leftarrow$ $l_p^n$ לא מרחב נורמי

$$\left[\begin{matrix}\underline{x}=(1,0,\dots)\\ \underline{y}=(0,1,\dots)\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\|\underline{x}\|_p=\|\underline{y}\|_p=1\\ \|\underline{x}+\underline{y}\|_p = 2^{1/p}>2\end{matrix}\right]$$

<u>הגדרה</u> $l_p = (X_p, \|\cdot\|_p)$

כאשר

$$X_p = \left\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \sum_{i=1}^\infty |x_i|^p<\infty\right\}$$

סדרה אין סופית

$$\|\underline{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^p\right)^{1/p}$$

<u>הגדרה</u> $l_\infty = (X_\infty, \|\cdot\|_\infty)$

$$X_\infty = \{\text{סדרות חסומות}\} = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid \sup_i |x_i|<\infty\}$$

$$\|\underline{x}\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$$

$$n\le m \Rightarrow l_p^n\subset l_p^m\subset l_p$$

$$1\le p<q \Rightarrow l_p\subset l_q\subset l_\infty$$

$$\left(\tfrac{1}{i}\right)\in l_2\setminus l_1 \Rightarrow l_1 \subsetneqq l_2$$

---

<u>משפט</u> $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ מרחב נורמי אם $p\ge 1$ (או $p=\infty$)

<u>הוכחה</u> רק צריכים להוכיח ש- $\|\underline{x}+\underline{y}\|_p \le \|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p$

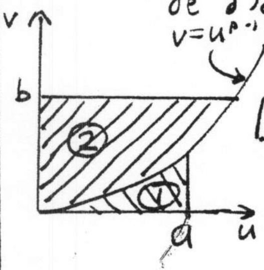
"א' שיוויון Minkowski"

$p=1$ ו- $p=\infty$: ברור

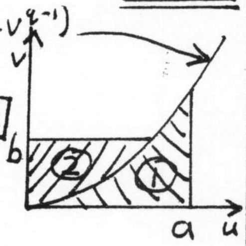
נניח $p>1$. נגדיר את $q$ ע"י $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow (p-1)(q-1)=1$

<u>למה א'</u> $ab\le \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$ כאשר $a,b\ge 0$

<u>הוכחה</u>




$\boxed{1\text{א}}$




בכל מקרה: $ab \le \underbrace{(2 \text{ מ"ל})}_{\int_0^b v^{q-1}dv \,=\, b^q/q} + \underbrace{(1 \text{ מ"ל})}_{\int_0^a u^{p-1}du \,=\, a^p/p}$ ☐

<u>למה ב'</u> $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \le \|\underline{x}\|_p \cdot \|\underline{y}\|_q$

(א' שיוויון Hölder)

<u>הוכחה</u> נניח ש- $\underline{x},\underline{y}\ne\underline{0}$

נסמן
$$\left.\begin{aligned}\underline{a} &= \underline{x}/\|\underline{x}\|_p\\ \underline{b} &= \underline{y}/\|\underline{y}\|_q\end{aligned}\right\}$$

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \overset{\text{למה א'}}{\le} \sum_{i=1}^n\left(\frac{|a_i|^p}{p}+\frac{|b_i|^q}{q}\right)$$
$$= \frac{1}{p}\|\underline{a}\|_p^p + \frac{1}{q}\|\underline{b}\|_q^q$$
$$= \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

☐

---

נסמן $z_i = (|x_i|+|y_i|)^{p-1}$.

אז:

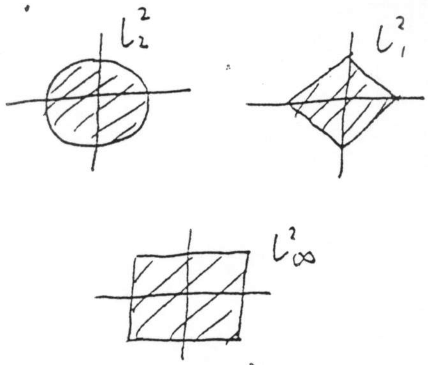
$$\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p = \sum_{i=1}^n |x_i z_i| + \sum_{i=1}^n |y_i z_i|$$
$$\overset{\text{למה ב'}}{\le} \|\underline{x}\|_p\cdot\|\underline{z}\|_q + \|\underline{y}\|_p\cdot\|\underline{z}\|_q$$
$$= (\|\underline{x}\|_p+\|\underline{y}\|_p)\left(\sum_{i=1}^n |z_i|^q\right)^{1/q}$$
$$= (\|\underline{x}\|_p+\|\underline{y}\|_p)\left(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/q}$$

[כי $(p-1)q = p$]

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/p} \le \|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p \qquad \left[\text{כי } 1-\tfrac{1}{q}=\tfrac{1}{p}\right]$$

$$\Rightarrow \|\underline{x}+\underline{y}\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{1/p} \underset{\substack{|x_i+y_i|\\ \le |x_i|+|y_i|}}{\le} \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p\right)^{1/p} \le \|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p$$

☐




**הגדרה** $(X,d)$ מרחב מטרי; $a\in X,\ r>0$

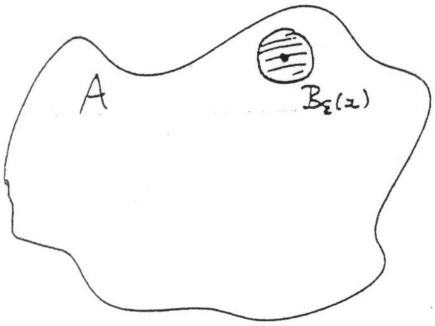
ספירה (sphere) $S(a,r)=\{x\in X \mid d(a,x)=r\}$

כדור פתוח (open ball) $B(a,r)=\{x\in X \mid d(a,x)<r\}$

כדור סגור (closed ball) $\bar{B}(a,r)=\{x\in X \mid d(a,x)\leq r\}$

---

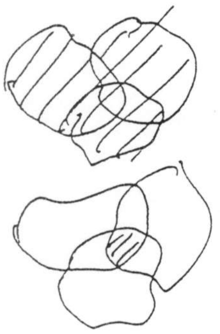
$(X,d)$ מרחב מטרי




**הגדרה** קבוצה $A\subset X$ נקראת פתוחה (open set)

אם"ם לכל $x\in A$, קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B_\varepsilon(x)\subset A$.

[ $\emptyset$ =קבוצה ריקה, קבוצה פתוחה לפי הגדרה]



**תכונות** * $B(a,r)$ קבוצה פתוחה

* $\{A_i\}_{i\in I}$ קבוצות פתוחות $\Rightarrow$ $\bigcup_{i\in I} A_i$ קבוצה פתוחה

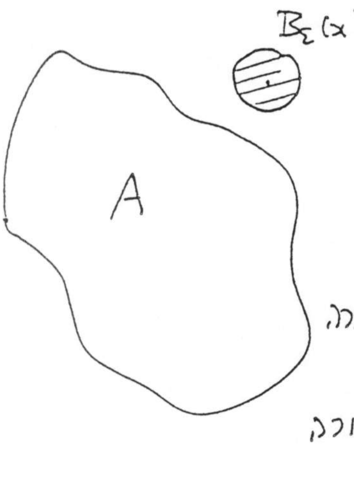
* $\{A_i\}_{i\in I}$ קבוצות פתוחות, $I$ קבוצה סופית $\Rightarrow$ $\bigcap_{i\in I} A_i$ קבוצה פתוחה

**דוגמאות** * $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(\underline{0},\frac{1}{n})=\{\underline{0}\}$ ב- $\mathbb{R}^2$

קבוצה לא פתוחה

* במרחב דיסקרטי, $B(x,r)=\begin{cases}\{x\} & r\leq 1\\ X & r>1\end{cases}$ $\Rightarrow$ כל קבוצה $A\subseteq X$ קבוצה פתוחה

---




**הגדרה** קבוצה $A\subset X$ נקראת סגורה (closed set)

אם"ם $X\setminus A$ קבוצה פתוחה.

[אם"ם לכל $x\notin A$, קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B_\varepsilon(x)\cap A=\emptyset$]

**תכונות** * $\bar{B}(a,r)$ קבוצה סגורה

* $\{A_i\}_{i\in I}$ קבוצות סגורות $\Rightarrow$ $\bigcap_{i\in I} A_i$ קבוצה סגורה

* $\{A_i\}_{i\in I}$ קבוצות סגורות, $I$ קבוצה סופית $\Rightarrow$ $\bigcup_{i\in I} A_i$ קבוצה סגורה

**הגדרה** סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ נקראת **מתכנסת** (convergent)

$x_n \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot x$

אם"ם קיימת נקודה $x\in X$ כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} d(x,x_n)=0$

[אם"ם לכל $\varepsilon>0$, קיים $N$ כך ש- $d(x,x_n)<\varepsilon$ לכל $n>N$]

**תכונות** * $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} d(x,x_n)=0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} d(y,x_n)=0\end{cases} \Rightarrow \underbrace{d(x,y)\le d(x,x_n)+d(x_n,y)}_{\to 0} \Rightarrow x=y$

לכן נכתוב: "$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$" או "$x_n \to x$"

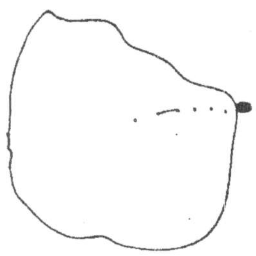
* $\begin{cases} x_n\to x \\ y_n \to y\end{cases} \Rightarrow d(x_n,y_n)\to d(x,y)$

$\left[\,|d(x_n,y_n)-d(x,y)| \underset{\text{אי שיוויון המשולש}}{\le} d(x,x_n)+d(y,y_n)\right]$

---

**הגדרה** **הסגור** של $A\subset X$:

closure



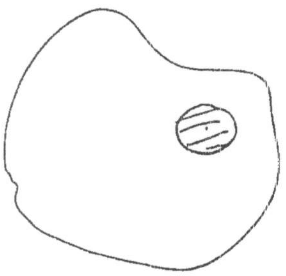
$A\subset \bar{A}=\{x\in X \mid$ קיימת סדרה $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x,\ x_n\in A\}$

[$x\in\bar{A}$ אם"ם $\forall\varepsilon>0$, קיימת נקודה $a\in A$ כך ש- $d(x,a)<\varepsilon$

אם"ם $\forall\varepsilon>0$, $B(x,\varepsilon)\cap A\ne\emptyset$ ]

**הפנים** של $A\subset X$:

interior



$A\supset \mathring{A}=\{x\in X \mid$ קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B(x,\varepsilon)\subset A\}$

**השפה** של $A\subset X$:

boundary

$\partial A = \bar{A}\setminus\mathring{A}$

**תכונות** * $A$ סגורה $\Leftrightarrow \bar{A}=A$

* $A\subset B \Rightarrow \bar{A}\subseteq\bar{B}$

* $\bar{A}$ קבוצה סגורה

* $X\setminus\mathring{A}=\overline{(X\setminus A)}$

* $A$ פתוחה $\Leftrightarrow \mathring{A}=A$

* $A\subset B \Rightarrow \mathring{A}\subset\mathring{B}$

* $\mathring{A}$ קבוצה פתוחה

## דוגמאות: $\mathbb{R}^n$

ב-$\mathbb{R}^3$: $\underline{x}=(2,2,2)$, $\underline{y}=(1,2,3)$

$\underline{x}-\underline{y}=(1,0,-1)$

$d_1(\underline{x},\underline{y})=\|\underline{x}-\underline{y}\|_1=|1|+|0|+|-1|=2$

$d_2(\underline{x},\underline{y})=\|\underline{x}-\underline{y}\|_2=\sqrt{(1^2+0^2+(-1)^2)}=\sqrt{2}$

$d_\infty(\underline{x},\underline{y})=\sup(1,0,|-1|)=1$

---

ב-$\mathbb{R}^1$: $A_1=\{x\,|\,a\le x<b\}=[a,b)$

$\bar{A}_1=[a,b]$, $\mathring{A}_1=(a,b)$, $\partial A_1=\{a,b\}$

---

ב-$\mathbb{R}^2$: $A_2=\{(x,y)\,|\,-1<x\le 1,\ 0\le y<1\}$

$\bar{A}_2=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

$\mathring{A}_2=\{(x,y)\,|\,-1<x<1,\ 0<y<1\}$

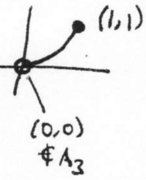
$\partial A_2=\{(x,y)\,|\,$ ($0\le y\le 1$ ו $x\in\{-1,1\}$) או ($-1\le x\le 1$ ו $y\in\{0,1\}$) $\}$

---

$A_3=\{(t^2,t^4)\,|\,0<t\le 1\}$

$\bar{A}_3=\{(t^2,t^4)\,|\,0\le t\le 1\}=\partial A_3$

$\mathring{A}_3=\emptyset$

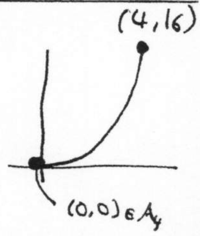



---

$A_4=\{(t^2,t^4)\,|\,-1<t\le 2\}$

$\bar{A}_4=A_4=\partial A_4$

$\mathring{A}_4=\emptyset$

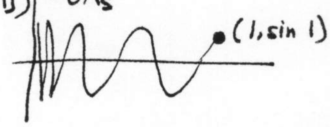



---

$A_5=\{(t,\sin\frac{1}{t})\,|\,0<t\le 1\}$

$\bar{A}_5=A_5\cup(\{0\}\times[-1,1])=\partial A_5$

$\mathring{A}_5=\emptyset$

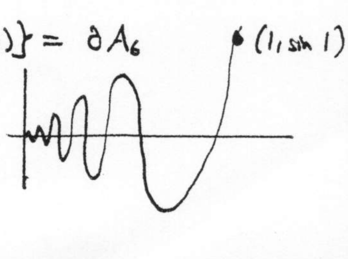



---

$A_6=\{(t,t\sin\frac{1}{t})\,|\,0<t\le 1\}$

$\bar{A}_6=A_6\cup\{(0,0)\}=\partial A_6$

$\mathring{A}_6=\emptyset$




---

## $C[0,1]$

(פונקציות רציפות $[0,1]\to\mathbb{R}$)

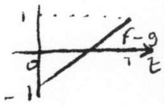
$\|\cdot\|_p=\left(\int_0^1|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$

$\|\cdot\|_\infty=\sup_{0\le t\le 1}|f(t)|$

---

$f(t)=2t$

$g(t)=1$




$d_\infty(f,g)=1$

$d_1(f,g)=\int_0^1|2t-1|\,dt=\frac{1}{2}$

$d_2(f,g)=\sqrt{\left(\int_0^1(2t-1)^2dt\right)}$

$=\sqrt{\left(\int_0^1(4t^2-4t+1)\,dt\right)}$

$=1/\sqrt{3}$

---

$S_1=\{f\in C[0,1]\,|\,f(0)>1\}$

פתוחה לפי $\|\cdot\|_\infty$

לא פתוחה לפי $\|\cdot\|_1$

$\bar{S}_1=\{f\in C[0,1]\,|\,f(0)\ge 1\}$

$(\mathring{S}_1)_\infty=S_1$

$(\mathring{S}_1)_1=\emptyset$

---

$S_2=\{f\in C[0,1]\,|\,f(0)\ge 1\}$

סגורה לפי $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$

$(\mathring{S}_2)_\infty=S_1$

$(\mathring{S}_2)_1=\emptyset$

---

## סדרות

$X_p=\{(x_n)\,|\,\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p<\infty\}$

$\|\underline{x}\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{1/p}\quad(p\ge 1)$

$\|\underline{x}\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$

קבוצה של מספרים טבעיים

---

$a=(0,0,0,\dots)\in X_p$ (לכל $p$)

$b=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots)$

$c=(1,1,1,\dots)$

$b\notin X_1$, $b\in X_p\ (p>1)$

$c\in X_\infty$, $c\notin X_p\ (p<\infty)$

$d_\infty(a,b)=\sup(\frac{1}{n})=1$

$d_\infty(b,c)=\sup(1-\frac{1}{n})=1$

$d_\infty(a,c)=1$

$d_2(a,b)=\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\pi}{\sqrt{6}}$

---

$a_i=(1,\frac{1}{2^i},\frac{1}{3^i},\dots)$

$a=(1,0,0,\dots)$

$d_\infty(a_i,a)=\frac{1}{2^i}\xrightarrow{i\to\infty}0$

לכן $a_i\to a$ כאשר $i\to\infty$

לפי נורמה $\|\cdot\|_\infty$

---

$S_1=\{(a_1,a_2,\dots)\,|\,|a_n|<\frac{1}{n}\}$

לא פתוחה לפי $\|\cdot\|_\infty$

(לכל $\varepsilon>0$ $B(\underline{0},\varepsilon)\not\subseteq S_1$, $\underline{0}\in S_1$)

$\bar{S}_1=\{(a_1,a_2,\dots)\,|\,|a_n|\le\frac{1}{n}\}=\partial S_1$

$\mathring{S}_1=\emptyset$

---

$S_2=\{(a_1,a_2,\dots)\,|\,|a_n|<1\}$

פתוחה לפי $\|\cdot\|_1$

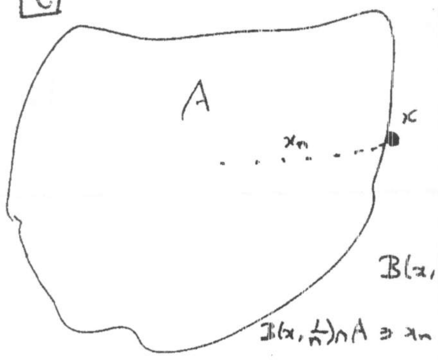
לא פתוחה לפי $\|\cdot\|_\infty$

$(S_2\ni(0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots))$

$\bar{S}_2=\{(a_1,a_2,\dots)\,|\,|a_n|\le 1\}$

$(\mathring{S}_2)_1=S_2$, $(\partial S_2)_\infty=\{(a_1,a_2,\dots)\,|\,\sup|a_n|=1\}$

$(\mathring{S}_2)_\infty=\{(a_1,a_2,\dots)\,|\,\sup|a_n|<1\}$




**הגדרה** $\bar A = \{x\in X \mid$ קיימת סדרה $(x_n)$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ו- $x_n\in A\}$

$$\boxed{x\in\bar A \iff \text{לכל } \varepsilon>0,\ B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset}$$

**הוכחה**

$(\Leftarrow)$ $x\in\bar A$ ⇐ $x=\lim_{n\to\infty} x_n$ כאשר $x_n\in A$

⇐ לכל $\varepsilon>0$, $\exists N$ כך ש- $d(x_n,x)<\varepsilon$ לכל $n>N$

⇐ $x_{N+1}\in B(x,\varepsilon)\cap A$

⇐ $B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$

$(\Rightarrow)$ לכל $\varepsilon>0$, $B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$

⇐ לכל $n$, נבחור את $x_n\in A\cap B(x,\frac{1}{n})$

⇐ $d(x,x_n)<\frac{1}{n}$ ו- $x_n\in A$

⇐ $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

⇐ $x\in\bar A$

□

---

$$\boxed{A \text{ סגורה} \iff A=\bar A} \iff \boxed{A \text{ לא סגורה} \iff A\neq\bar A}$$

**הוכחה** * נניח ש- $A$ לא סגורה

⇐ קיימת נקודה $x\in X\setminus A$ כך ש-

לכל $\varepsilon>0$, $B(x,\varepsilon)\not\subset X\setminus A$

⇐ לכל $\varepsilon>0$ $B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$

⇐ $x\in\bar A$

* נניח ש- $A\neq\bar A$

⇐ $\bar A\supsetneq A$

⇐ קיימת נקודה $x\in\bar A$ כך ש- $x\notin A$

⇐ $B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ לכל $\varepsilon>0$, ו- $x\notin A$

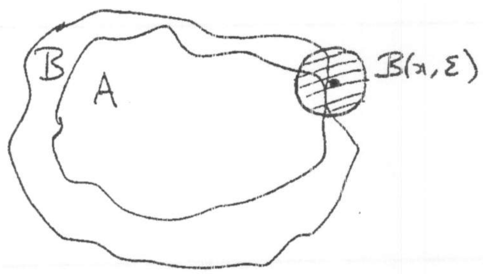
⇐ $B(x,\varepsilon)\not\subset X\setminus A$ לכל $\varepsilon>0$ ו- $x\in X\setminus A$

⇐ $X\setminus A$ קבוצה לא פתוחה ⇐ $A$ קבוצה לא סגורה

□

---

$$\boxed{\bar A\subset\bar B \Leftarrow A\subset B}$$




**הוכחה** $x\in\bar A$ ⇐ $B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset$ לכל $\varepsilon>0$

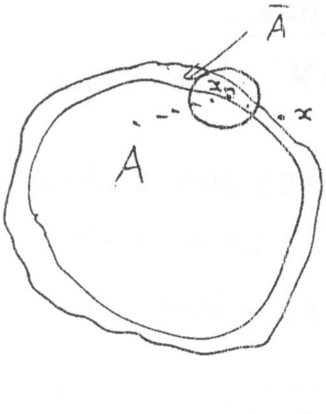
$\overset{B\supset A}{\Leftarrow}$ $B(x,\varepsilon)\cap B\neq\emptyset$ לכל $\varepsilon>0$

⇐ $x\in\bar B$

□

---

$$\boxed{\bar A \text{ קבוצה סגורה}} \iff \boxed{\bar{\bar A}=\bar A}$$




$x\in\bar{\bar A}$ ⇐ קיימת $x_n\in\bar A$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

$x_n\in\bar A$ ⇐ קיימת $a_n\in A$ כך ש- $d(x_n,a_n)<\frac{1}{n}$

⇐ $d(a_n,x)\le d(a_n,x_n)+d(x_n,x)$

$\to 0$

⇐ $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ ⇐ $x\in\bar A$

□

$\bar{A}$ = (קבוצה סגורה הכי קטנה $\supset A$)

**הגדרה** $\mathring{A} = \{x \in X \mid$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(x,\varepsilon) \subset A\}$

$$\boxed{X \setminus \mathring{A} = \overline{(X \setminus A)}} \iff \boxed{X \setminus \bar{A} = (X \setminus A)^{\circ}}$$

$x \in X \setminus \mathring{A} \iff x \notin \mathring{A}$

$\iff B(x,\varepsilon) \not\subset A$ לכל $\varepsilon > 0$

$\iff B(x,\varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$ לכל $\varepsilon > 0$

$\iff x \in \overline{(X \setminus A)}$

$\square$

* A פתוחה $\iff \mathring{A} = A$
* $A \supset B \iff \mathring{A} \supset \mathring{B}$
* $\mathring{A}$ קבוצה פתוחה
* $\mathring{A}$ = (קבוצה פתוחה הכי גדולה $\subset A$)
* $\partial (X \setminus A) = \partial A$

$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{(A \cup B)}$

$\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i = \overline{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)}$ אם I קבוצה סופית

$\bigcap_{i \in I} \mathring{A}_i = \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\circ}$

$\mathring{A} \cap \mathring{B} = (A \cap B)^{\circ}$

קיימות דוגמאות כך ש- : $\overline{B(x,r)} \neq \bar{B}(x,r)$

$\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$

$(A \cup B)^{\circ} \neq \mathring{A} \cup \mathring{B}$

**הגדרה** יהי $d_1$ ו- $d_2$ מטריקות על מרחב X. הן נקראות שקולות Lipschitz - אם"ם קיימים $k, K > 0$ כך ש- $K d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le k d_1(x,y)$ לכל $x,y \in X$

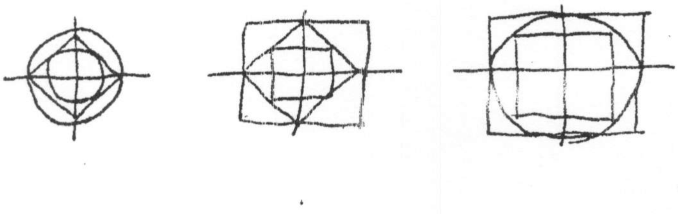
**מסקנה** קבוצה $A \subset X$ פתוחה ב- $(X, d_1)$ אם"ם A פתוחה ב- $(X, d_2)$

**מסקנה** ב- $\mathbb{R}^n$, כל נורמות שקולות

**דוגמאות** ב- $\mathbb{R}^2$, $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le 2\|x\|_\infty$

$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{2}\,\|x\|_\infty$

$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{2}\,\|x\|_2$



① פונקציה $f:X\to Y$, נקודה $x\in X$. אזי התנאים הבאים שקולים:

א) $f(x_n)\to f(x)$ לכל סדרה $(x_n)$ כך ש- $x_n\to x$

ב) לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך ש"$d_X(x,y)<\delta \Rightarrow d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$"

(כלומר: $f(B_X(x,\delta))\subset B_Y(f(x),\varepsilon)$)

f נקראת רציפה בנקודה x

---

**הוכחה**

א) ⇐ ב) נניח ש- ב) לא מתקיים.
אזי קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיים $y_\delta\in X$
כך ש- $d_Y(f(x),f(y_\delta))\ge\varepsilon$ אבל $d_X(x,y_\delta)<\delta$

לכן $y_{1/n}\to x$ כאשר $n\to\infty$

אבל $f(y_{1/n})\not\to f(x)$ ✗ □

ב) ⇐ א) נניח $x_n\to x$, $\varepsilon>0$

ב) ⇐ קיים $\delta>0$ כך ש- "$d_X(x,y)<\delta\Rightarrow d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$"

$x_n\to x$ ⇐ קיים $N$ כך ש- $d_X(x_n,x)<\delta$ לכל $n>N$

⇐ $d_Y(f(x_n),f(x))<\varepsilon$ לכל $n>N$

⇐ $f(x_n)\to f(x)$ □

---

② תהי פונקציה $f:X\to Y$. אזי התנאים הבאים שקולים:

א) f רציפה בכל נקודות ב- X

ב) $x_n\to x \Rightarrow f(x_n)\to f(x)$

ג) $\begin{pmatrix} A\subset Y \\ \text{קבוצה פתוחה}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f^{-1}(A)\subset X \\ \text{קבוצה פתוחה}\end{pmatrix}$

ד) $\begin{pmatrix} B\subset Y \\ \text{קבוצה סגורה}\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} f^{-1}(B)\subset X \\ \text{קבוצה פתוחה}\end{pmatrix}$

f נקראת רציפה

**הוכחה**

(ב) $\overset{(1.1)}{\Leftrightarrow}$ (א)

$B=Y\setminus A$
(ד) $\Leftrightarrow$ (ג)
$f^{-1}(B)=X\setminus f^{-1}(A)$

א) ⇐ ג) $A\subset Y$ קבוצה פתוחה, $x\in f^{-1}(A)$

⇐ $f(x)\in A$ ⇐ קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B(f(x),\varepsilon)\subset A$

f רציפה ב-x ⇐ קיים $\delta>0$ כך ש $f(B(x,\delta))\subset B(f(x),\varepsilon)$

⇐ $f(B(x,\delta))\subset A$ ⇐ $B(x,\delta)\subset f^{-1}(A)$ □

ג) ⇐ א) נניח ש- $x\in X$, $\varepsilon>0$

$B(f(x),\varepsilon)$ פתוחה ⇐ $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ פתוח

⇐ קיים $\delta>0$ כך ש

$B(x,\delta)\subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$

⇐ $f(B(x,\delta))\subset B(f(x),\varepsilon)$

---

**דוגמאות**

* $(X,d)$ מרחב מטרי שרירותי; $f:X\to X$, $x\mapsto x$ רציפה

---

* $\begin{cases} f:X\to Y \\ g:Y\to Z\end{cases}$ פונקציות רציפות ⇐ $g\circ f:X\to Z$, $x\mapsto g(f(x))$ פונקציה רציפה

$[(g\circ f)^{-1}(A)=f^{-1}(g^{-1}(A))]$

---

* נורמה $\|\cdot\|_\infty$

$\begin{cases} F:C[0,1]\to\mathbb{R} \\ f(x)\mapsto\int_0^1 f(x)\,dx\end{cases}$ רציפה

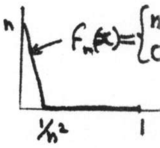
$\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 g(x)\,dx\right|\le\int_0^1|f(x)-g(x)|\,dx$

⇐ "$d_\infty(f,g)<\varepsilon \Rightarrow |F(f)-F(g)|<\varepsilon$"

---

* נורמה $\|\cdot\|_1$

$\begin{cases} F:C[0,1]\to\mathbb{R} \\ f(x)\mapsto \sup\limits_{0\le x\le 1}|f(x)|\,dx\end{cases}$ לא רציפה




$f_n(x)=\begin{cases} n-n^3x & 0\le x\le\frac{1}{n^2} \\ 0 & x>1/n^2\end{cases}$

$\|f_n\|_1=\frac{1}{2n}$

$F(f_n)=n$

אז $f_n\to 0$ לפי $\|\cdot\|_1$

אבל $F(f_n)\not\to F(0)$.

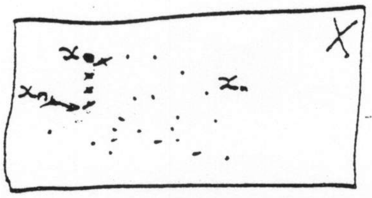
---

* $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\|x\|$ רציפה אם $\|\cdot\|$ נורמה שרירותית על $\mathbb{R}^n$

($\mathbb{R}^n$ לפי נורמה $\|\cdot\|_2$)

# 2: מרחבים מטריים קומפקטיים

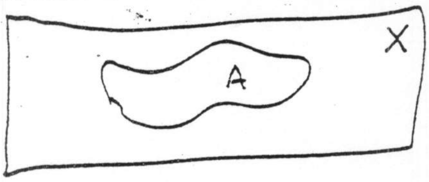
**הגדרה 2.1** מרחב מטרי X נקרא **קומפקטי** (compact) אם"ם: לכל סדרה $(x_n)$ ב-X קיימת תת-סדרה מתכנסת $(x_{n_k})$



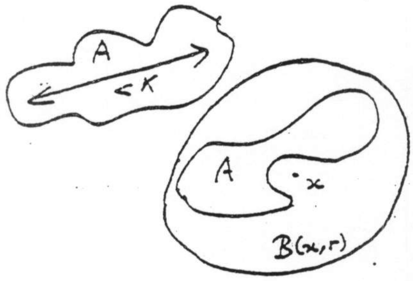

**דוגמא** $[a,b] (\subseteq \mathbb{R})$ מרחב מטרי קומפקטי (לפי משפט Bolzano-Weierstrass)

**דוגמא** יהי $(X,d)$ מרחב מטרי כך ש-X קבוצה סופית $\Leftarrow$ X קומפקטי

תת-קבוצה $A \subseteq X$ נקראת **קומפקטית** (compact) אם"ם $(A,d)$ מרחב מטרי קומפקטי

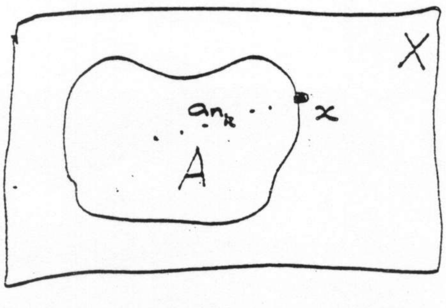



תת-קבוצה $A \subseteq X$ נקראת **חסומה** (bounded) אם"ם קיים מספר K כך ש-
$d(x,y)<K$ לכל $x,y \in A$
אם"ם קיים כדור $B(x,r)$ שמכיל את A
$(x\in X,\ r>0)$



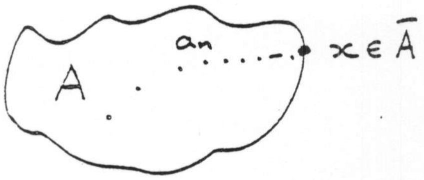

**למה 2.4** $X \supseteq A$ ⇐ A קומפקטי
(X מרחב מטרי קומפקטי, A קבוצה סגורה)

**הוכחה**
$(a_n)$ סדרה ב-A $\Leftarrow$ $(a_n)$ סדרה ב-X
X קומפקטי $\Leftarrow$ קיימת תת-סדרה מתכנסת $(a_{n_k})$
$\Leftarrow$ קיימת נקודה $x\in X$
כך ש- $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = x$
A קבוצה סגורה $\Leftarrow$ $x\in \bar{A} = A$
□




**למה 2.5** $A \subseteq X$ (X מרחב מטרי, A קבוצה קומפקטית) $\Leftarrow$ A קבוצה סגורה וחסומה

A קבוצה סגורה (כל נקודות ההצטברות של A נמצאות ב-A)
$x\in X$ נקודת הצטברות של A $\Leftarrow$ קיימת סדרה $(a_n)$ ב-A
כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = x$
A קומפקטי
$\Leftarrow$ קיימת תת-סדרה מתכנסת
$a_{n_k} \to a \in A$
$\Leftarrow$ $\underbrace{d(a_{n_k},x)}_{\to 0 \text{ כי } \lim_{n\to\infty} a_n = x} \to d(a,x)$
$\Leftarrow$ $A \ni a = x$



$A \subseteq X$ ⇍ A קבוצה קומפקטית

X מרחב מטרי

A קבוצה סגורה וחסומה

**דוגמא** X = מרחב מטרי דיסקרטי

$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$

A = תת קבוצה של X

* A קבוצה סגורה וחסומה

* A קבוצה קומפקטית אמ"ם A סופית

**דוגמא** $X = l_\infty$

$A = \bar{B}(\underline{0},1) = \{(x_n) \mid -1\le x_n\le 1 \text{ לכל } n\}$

* A קבוצה סגורה וחסומה

* A קבוצה אינה קומפקטית

$\underline{e}^{(n)} = (0,\dots,0,1,0,\dots)$

$\{\underline{e}^{(n)}\}$ סדרה מתבדרת

**A קבוצה חסומה**

A אינה חסומה ⇐ (לכל $x\in X$, $r>0$ ⇐ $A \not\subset B(x,r)$)

נבחר את $x \in X$

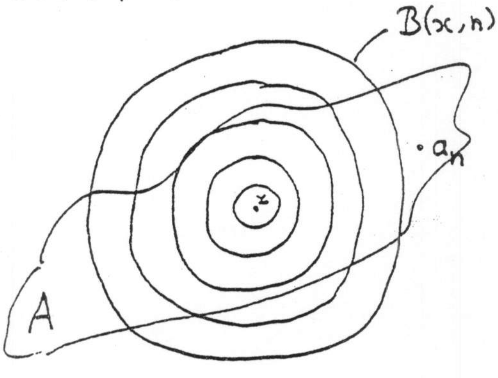
נבחר את $a_n \in A\setminus B(x,n)$

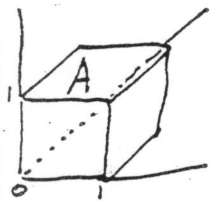
A קומפקטית ⇐ קיימת תת-סדרה מתכנסת $(a_{n_k})$

של $(a_n)$, $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ $(a\in A)$

⇐ $\underbrace{d(a_{n_k},x)}_{>n_k \to \infty} \xrightarrow{k\to\infty} d(a,x)$

כי $a_n \notin B(x,n)$




**למה** ב- $l_\infty^n = (\mathbb{R}^n, d_\infty)$, כדורים סגורים הם קומפקטיים

**הוכחה** $A = B(\underline{0},1) = \{\underline{x}\in\mathbb{R}^n \mid -1\le x_i\le 1 \text{ לכל } 1\le i\le n\}$

נניח ש- $\underline{a}^{(m)}\in A$ לכל $m\in\mathbb{N}$.

$a_1^{(m)}\in[-1,1]$ ⇐ קיימת תת-סדרה מתכנסת $(a_1^{(m)})_{m\in I_1} \to a_1$, כאשר $\mathbb{N}\supset I_1$

$a_2^{(m)}\in[-1,1]$ ⇐ קיימת תת-סדרה מתכנסת $(a_2^{(m)})_{m\in I_2} \to a_2$ כאשר $I_1\supset I_2$

$[-1,1]$ קומפקטי

⋮

$a_n^{(m)}\in[-1,1]$ ⇐ קיימת תת-סדרה מתכנסת $(a_n^{(m)})_{m\in I_n} \to a_n$ כאשר $I_{n-1}\supset I_n$

לכן $(\underline{a}^{(m)})_{m\in I_n} \to \underline{a} = (a_1,a_2,\dots,a_n) \in A$

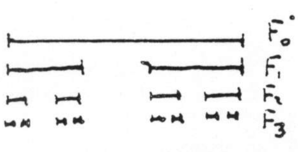
□

**מסקנה** $A\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית אמ"ם A קבוצה סגורה וחסומה.

עם נורמה $\|\cdot\|_p$ שרירותי

**דוגמא** קבוצת Cantor היא קבוצה קומפקטית.

$:=\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$



**הגדרה** $(X,d)$ - מרחב מטרי

$\mathcal{F}$ - קבוצה של תת-קבוצות של $X$

$\mathcal{F}$ נקרא **כיסוי** (cover) אם"ם $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F = X$

$\mathcal{F}$ נקרא **כיסוי פתוח** (open cover) אם"ם $F$ קבוצה פתוחה לכל $F\in\mathcal{F}$ ו- $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F = X$

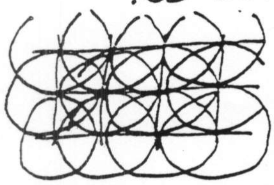
תת-קבוצה $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ נקראת **תת-כיסוי** אם"ם $\mathcal{G}$ כיסוי

**דוגמא:** $\mathcal{F}=\{B(\underline{x},1)\mid \underline{x}\in\mathbb{R}^2\}$

$\mathcal{G}=\{B(\underline{x},1)\mid \underline{x}\in\mathbb{Z}^2\}$

$\mathcal{F}$ כסוי פתוח

$\mathcal{G}$ תת-כסוי



$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ (קבוצה של תת-קבוצות של $X$): נאמר ש- $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ מתקיימת את **תכונת החיתוך הסופי** (Finite intersection property) אם"ם $\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha \neq \emptyset$ לכל תת-קבוצה סופית $J\subset I$.

**משפט Heine-Borel** יהי $(X,d)$ מרחב מטרי. אזי התנאים הבאים שקולים:

א) $X$ מרחב מטרי קומפקטי

ב) לכל כסוי פתוח של $X$, קיים תת-כסוי סופי

ג) אם $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ קבוצה של תת-קבוצות סגורות של $X$ שמתקיימת את תכונת החיתוך הסופי, אז $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\neq\emptyset$

**למה א'** $\left\{\begin{array}{l}X \text{ קומפקטי} \\ \mathcal{F} \text{ כסוי פתוח}\end{array}\right.$ $\Leftarrow$ קיים $\underline{\varepsilon>0}$ כך שלכל $x\in X$, $B(x,\varepsilon)$ מוכל בקבוצה ב- $\mathcal{F}$
[כלומר, קיים $F\in\mathcal{F}$ כך ש- $B\subset F$.]

מספר $\varepsilon$ נקרא **מספר Lebesgue** (Lebesgue number) של $\mathcal{F}$

**הוכחה** $\varepsilon$ לא קיים $\Leftarrow$ קיימת נקודה $x_n\in X$ כך ש- $B(x_n,\frac{1}{n})\not\subset F$ לכל $F\in\mathcal{F}$

$\overset{\text{קומפ'}}{\Leftarrow}$ קיימת תת-סדרה מתכנסת $(x_{n_k})\to x$

$\overset{\mathcal{F}\text{ כסוי}}{\Leftarrow}$ קיים $F\in\mathcal{F}$ כך ש- $x\in F$

$\overset{F\text{ פתוח}}{\Leftarrow}$ קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B(x,\varepsilon)\subset F$

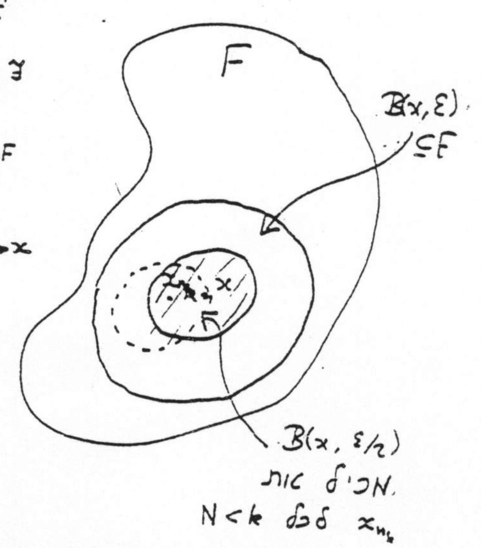
$\overset{x_{n_k}\to x}{\Leftarrow}$ קיים $N$ כך ש- $d(x_{n_k},x)<\varepsilon/2$ לכל $k>N$

$\Leftarrow$ $B(x_{n_k},\varepsilon/2)\subset B(x,\varepsilon)\subset F$ לכל $k>N$

$\Leftarrow$ $B(x_{n_k},\frac{1}{n_k})\subset F$ לכל $k>N$, $n_k>2/\varepsilon$

$\times$ ← הגדרה של $x_n$

□

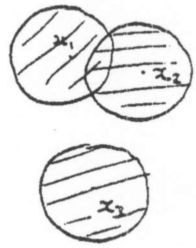


**למה ב'** X קומפקטי, $\varepsilon>0$ $\Rightarrow$ קיים כסוי פתוח סופי של כדורים ברדיוס $\varepsilon$

**הוכחה** לא קיים כסוי פתוח סופי של כדורים ברדיוס $\varepsilon$ ⇐ נבחר את נקודה $x_1\in X$

⇐ $\{B(x_1,\varepsilon)\}$ לא כסוי ⇐ נבחר את נקודה $x_2\in X\setminus B(x_1,\varepsilon)$

⇐ $\{B(x_i,\varepsilon)\}_{i=1,2}$ לא כסוי ⇐ נבחר את נקודה $x_3\in X\setminus\bigcup_{i=1,2}B(x_i,\varepsilon)$



$\vdots$

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה ב-X כך ש- $x_n\notin\bigcup_{i<n}B(x_i,\varepsilon)$ ⇐ $d(x_m,x_n)\ge\varepsilon$ לכל $m\ne n$

$\overset{X\text{ קומפ'}}{\Leftarrow}$ קיימת תת-סדרה מתכנסת $\{x_{n_k}\}\to x$

$$\varepsilon\le d(x_{n_k},x_{n_{k+1}})\le d(x_{n_k},x)+d(x,x_{n_{k+1}})\xrightarrow{k\to\infty}0$$

※ □

**הוכחה של משפט Heine-Borel**

**א) ⇐ ב)** [X קומפקטי ⇐ ($\exists$ כסוי פתוח ⇐ קיים תת-כסוי סופי)]

∴ X קומפקטי, $\mathcal{F}$ כסוי פתוח $\overset{\text{למה א'}}{\Leftarrow}$ קיים מספר Lebesgue $\varepsilon>0$ של $\mathcal{F}$

$\overset{\text{למה ב'}}{\Leftarrow}$ קיים כסוי $\{B(x_i,\varepsilon)\}_{i=1,2,\dots,n}$ כאשר $x_i\in X$

$\overset{\text{מספר Lebesgue}}{\Leftarrow}$ קיים $F_i\in\mathcal{F}$ כך ש- $B(x_i,\varepsilon)\subset F_i$, לכל i

⇐ $\{F_1,\dots,F_n\}$ תת-כסוי סופי של $\mathcal{F}$

**ב) ⇐ ג)** [($\exists$ כסוי פתוח ⇐ קיים תת-כסוי סופי) ⇐ ($\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ מתקיימת תכונת החיתוך הסופי ו- $A_\alpha$ קבוצה סגורה לכל $\alpha\in I$ ⇐ $\bigcap A_\alpha\ne\emptyset$)]

$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\emptyset$ ⇐ $\mathcal{F}=\{X\setminus A_\alpha\mid\alpha\in I\}$ כסוי

$A_\alpha$ סגורה לכל $\alpha$ ⇐ $X\setminus A_\alpha$ קבוצה פתוחה

$\overset{ב)}{\Leftarrow}$ קיים תת-כסוי סופי $\{X\setminus A_\alpha\mid\alpha\in J\}$ כאשר $J\subseteq I$ קבוצה סופית ⇐ $\bigcap_{\alpha\in J}A_\alpha=\emptyset$

※

**ג) ⇐ א)** [($\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ מתקיימת תכונת החיתוך הסופי ו- $A_\alpha$ קבוצה סגורה לכל $\alpha\in I$ ⇐ $\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\ne\emptyset$) ⇐ X קומפקטי]

$(x_n)$ סדרה ב-X ⇐ נסמן $A_n=\{x_m\mid m\ge n\}=\{x_n,x_{n+1},\dots\}$

⇐ $\bigcap_{n\in J}\bar{A}_n\supset\bigcap_{n\in J}A_n=A_{\max J}\ne\emptyset$ לכל תת-קבוצה סופית $J\subseteq\mathbb{N}$

$\overset{ג)}{\Leftarrow}$ $\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n\ne\emptyset$, אז נבחר את $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n$

⇐ לכל $n\in\mathbb{N}$, $x\in\bar{A}_n$

⇐ $A_n\cap B(x,\frac{1}{n})\ne\emptyset$, אז נבחר את $y_n\in A_n\cap B(x,\frac{1}{n})$

⇐ $y_n=x_{p_n}$ כאשר $n\le p_n$ וגם $d(y_n,x)<\frac{1}{n}$ ⇐ $x_{n_k}\to x$ כאשר $\{n_k\}$ תת-סדרה עולה של $\{p_n\}$

**הגדרה** $(X,d_X)$ ו- $(Y,d_Y)$ מרחבים מטריים

פונקציה $f:X\to Y$ נקראת **רציפה בנקודה $x\in X$** אם"ם לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך ש- $d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$ לכל $y$ כך ש- $d_X(x,y)<\delta$

אם"ם $f(x_n)\to f(x)$ לכל סדרה $(x_n)$ כך ש- $x_n\to x$

פונקציה $f:X\to Y$ נקראת **רציפה** אם"ם $f$ רציפה בכל נקודות ב- $X$

אם"ם לכל סדרה מתכנסת $(x_n)\to x$, גם $f(x_n)\to f(x)$

אם"ם לכל קבוצה פתוחה $A\subset Y$ $\Leftarrow$ $f^{-1}(A)\subset X$ קבוצה פתוחה

אם"ם לכל קבוצה סגורה $A\subset Y$ $\Leftarrow$ $f^{-1}(A)\subset X$ קבוצה סגורה

פונקציה $f:X\to Y$ נקראת **רציפה במ"ש** אם"ם לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך ש- $d(f(x),f(y))<\varepsilon$ לכל $x,y\in X$ כך ש- $d_X(x,y)<\delta$

**משפט** $\left.\begin{array}{l} f:X\to Y \text{ רציפה} \\ X \text{ קומפקטי} \end{array}\right\} \Rightarrow f(X)$ קומפקטית

**מסקנה** $\left.\begin{array}{l} f:X\to\mathbb{R} \text{ רציפה} \\ X \text{ קומפקטי} \end{array}\right\} \Rightarrow$ קיימות נקודות $x_1,x_2\in X$ כך ש- $\inf_{x\in X} f(x)=f(x_1)$, $\sup_{x\in X} f(x)=f(x_2)$

**הגדרה** $f:X\to Y$ **הומאומורפיזם** אם"ם $f$ חח"ע ו- $f, f^{-1}$ רציפות

**למה** יהיו $A$ ו- $B$ מרחבים מטריים קומפקטיים.
אזי $A\times B$ גם מרחב קומפקטי.

קבוצה $\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$ עם מטריקה

$$\left\{\begin{array}{l} d_1((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = d(a_1,a_2)+d(b_1,b_2) \\ d_\infty((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = \max(d(a_1,a_2),d(b_1,b_2)) \\ d_2((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = \sqrt{d(a_1,a_2)^2+d(b_1,b_2)^2} \end{array}\right.$$

$d_\infty$ או $d_2$ או $d_1$ — מטריקות שקולות

**הוכחה** תהי $(x_n)$ סדרה ב- $A\times B$. לכן $x_n=(a_n,b_n)$ כאשר $a_n\in A$, $b_n\in B$

$A$ קומפקטי $\Leftarrow$ קיימת תת-סדרה מתכנסת $(a_{n_k})$ של $(a_n)$

$B$ קומפקטי $\Leftarrow$ קיימת תת-סדרה מתכנסת $(b_{n_{k_r}})$ של $(b_{n_k})$

לכן $((a_{n_{k_r}}, b_{n_{k_r}}))$ היא תת-סדרה מתכנסת של $(x_n)$, ב- $(A\times B)$

$\square$

---

**הגדרה** תהי $K$ תת-קבוצה של $\mathbb{R}^n$.

**קמור** של $K$ $= \mathrm{Conv}(K) = \left\{ t_1\underline{x}_1+\dots+t_{n+1}\underline{x}_{n+1} \,\middle|\, \begin{array}{l} 0\le t_i\le 1 \\ \sum t_i=1 \\ \underline{x}_i\in K \end{array}\right\}$

convex hull of K

$\underline{x}_1$ $\underline{x}_{n+1}$ $\subset\mathbb{R}^n$

simplex

דוגמאות

① $K=$  $\mathrm{Conv}(K)=$ 

② $K=$  $\mathrm{Conv}(K)=$ 

---

**משפט** $K$ קומפקטית $\Leftarrow$ $\mathrm{Conv}(K)$ קומפקטית

**הוכחה** $\mathrm{Conv}(K) = (F$ תמונה של$)$ כאשר

$$\left(\begin{array}{l} F: \overbrace{K\times\dots\times K}^{n+1}\times\Delta_n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\underline{x}_1,\dots,\underline{x}_{n+1},\ \underline{t}) \longmapsto \sum_{i=1}^{n+1} t_i\underline{x}_i \end{array}\right)$$

$\Delta_n = \left\{(t_1,\dots,t_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, 0\le t_i\le 1,\ \sum_{i=1}^{n+1} t_i=1\right\}$ סגורה, חסומה $\Rightarrow$ קומפקטית

$\Downarrow$

$\square$ $\mathrm{Conv}(K)$ קומפקטית $\overset{F \text{ רציפה}}{\Leftarrow}$ $K\times\dots\times K\times\Delta$ קומפקטית

$\Delta_1=$ — , $\Delta_2=\triangle$ , $\Delta_3=$ 

**שקילות של נורמות:** $\|\cdot\|_a$ ו- $\|\cdot\|_b$ נקראות שקולות אמ"ם קיימים מספרים $k_1,k_2>0$ כך ש- $k_1\|\underline{x}\|_a \le \|\underline{x}\|_b \le k_2\|\underline{x}\|_a$ לכל $\underline{x}$ ב- $X$.

$\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ שקולות, $A\subset X$

אזי $A$ פתוחה לפי $\|\cdot\|_a$ אמ"ם $A$ פתוחה לפי $\|\cdot\|_b$

**הוכחה:** $A$ פתוחה לפי $\|\cdot\|_a$, $x\in A$

⇐ קיים $0<\varepsilon$ כך ש- $B_{\|\cdot\|_a}(x,\varepsilon)\subset A$

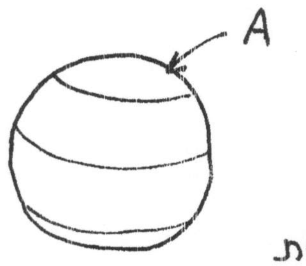
⇐ $B_{\|\cdot\|_b}(x,k\cdot\varepsilon)\subset A$

□

**דוגמאות:**

* $\|\underline{x}\|_\infty \le \|\underline{x}\|_1 \le n\|\underline{x}\|_\infty$ על $\mathbb{R}^n$
* $\|\cdot\|_p$ שקולות לכל $p$ על $\mathbb{R}^n$
* $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1$ לא שקולות על $C[0,1]$

**משפט:** כל נורמות על $\mathbb{R}^n$ שקולות




**הוכחה:** נניח ש- $\|\cdot\|$ נורמה שרירותית

אזי $f:\mathbb{R}^n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \mathbb{R}$, $\underline{x}\longmapsto\|\underline{x}\|$ רציפה

$A=S(\underline{0},1)$ קבוצה סגורה וחסומה ⇐ קבוצה קומפקטית

⇐ קיימות נקודות $x_1,x_2\in A$ כך ש- $\inf_{x\in A} f(\underline{x})=f(\underline{x_1})=k_1$ , $\sup_{x\in A} f(x)=f(\underline{x_2})=k_2$

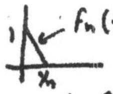
⇐ $k_1,k_2>0$ ו- $k_1\le\|\underline{x}\|\le k_2$ לכל $\underline{x}$ כך ש- $\|\underline{x}\|_2=1$

⇐ $k_1\|\underline{x}\|_2\le\|\underline{x}\|\le k_2\|\underline{x}\|_2$

□

**דוגמאות של נורמות** $C(X,Y)=\{f:X\to Y$ פונקציות רציפות$\}$ ; $F(X,Y)=\{f:X\to Y$ פונקציות$\}$

* $X$ קומפקטי, $Y$ מטרי ⇐ מרחב מטרי $C(X,Y)$ עם $d_\infty(f,g)=\sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$
* $X$ קומפקטי, $Y$ נורמי ⇐ מרחב נורמי $C(X,Y)$ עם $\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}\|f(x)\|$
* $Y$ מטרי וחסום ⇐ מרחב מטרי $C(X,Y)$ עם $d_\infty(f,g)=\sup_{x\in X} d(f(x),g(x))$
* $C(X)=C(X,\mathbb{R})$ מרחב נורמי אם $X$ קומפקטי
* $X=Y=[0,1]$ ⇐ מרחב מטרי אינו קומפקטי




$f_n(x)=\begin{cases}1-nx & 0\le x\le 1/n\\ 0 & x\ge 1/n\end{cases}$

$d_\infty(f_m,f_n)=1-n/m\ (m>n)$

* $Y$ מטרי, חסום ⇐ $F(X,Y)$ מרחב מטרי עם $d_\infty$ ו- $C(X,Y)\subset F(X,Y)$ תת-קבוצה סגורה

**דוגמא:** $X$ = מרחב מטרי, $P(X)=\{A\subset X$ קבוצות$\}$

1) $0=d(x,x)$, $0<d(x,y)$ אם $x\neq y$
2) $d(x,y)=d(y,x)$
3) $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

?

**נסיון א':** $D_1(A,B)=\inf_{x\in A,\ y\in B} d(x,y)$

**נסיון ב':** $D_2(A,B)=\sup_{a\in A}\left(\inf_{b\in B} d(a,b)\right)$

**נסיון ג':** $D_3(A,B)=\max(D_2(A,B),D_2(B,A))$

# מרחבים שלמים

**הגדרה** $(X,d)$ מרחב מטרי. סדרה $(x_n)$ נקראת סדרת קושי (Cauchy sequence)

אומ"מ "$\forall \varepsilon>0, \exists N : d(x_m,x_n)<\varepsilon \ \forall m,n>N$"

* מתכנסת ⇐ סדרת קושי

* סדרת קושי, קיימת תת-סדרה מתכנסת } ⇐ מתכנסת

| | |
|---|---|
| לכל | $= \forall$ |
| קיים | $= \exists$ |
| כך ש- | $= :$ |

**הגדרה** $(X,d)$ מרחב מטרי. $X$ נקרא שלם אומ"מ

"$(x_n)$ סדרת קושי ⇐ $(x_n)$ סדרה מתכנסת"

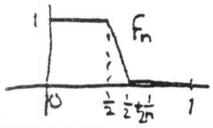
**דוגמאות**

* $\mathbb{R}^n$
* $l^\infty$
* $l^p$ כאשר $1\le p$
* $C[a,b]$ : $d_\infty(f,g)=\sup_{a\le x\le b}|f(x)-g(x)|$

**לא שלם:**

* $Q$ : $x_n=[\sqrt{2}\,10^n]/10^n$
* $X=\{f:[0,1]\to\mathbb{R}$ , $f$ פונקציה רציפה$\}$

$d_1(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$



$d_1(f_m,f_n)=\left|\frac{1}{4n}-\frac{1}{4m}\right|$

$l^\infty$ : נניח ש-$(x^{(n)})$ סדרה קושי ב-$l^\infty$

$\varepsilon>0 \overset{\text{קושי}}{\Leftarrow}$ קיים $N(\varepsilon)$ כך ש- $\|x^{(m)}-x^{(n)}\|_\infty<\varepsilon$ לכל $m,n>N$

⇐ $\varepsilon>|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}|$ לכל $i$, $m,n>N(\varepsilon)$ (*)

⇐ $(x_i^{(n)})$ סדרת קושי ב-$\mathbb{R}$, לכל $i$

⇐ $(x_i^{(n)})$ מתכנסת, $x_i \leftarrow$, לכל $i$

$\overset{(*)\ m\to\infty}{\Leftarrow}$ $\varepsilon>|x_i-x_i^{(n)}|$ לכל $i$, $n>N(\varepsilon)$

⇐ $\varepsilon\ge\|x-x^{(n)}\|_\infty$ לכל $n>N(\varepsilon)$

⇐ $x^{(n)}\to x$

□

$C[a,b]$ : $(f_n(x))$ סדרה קושי ב-$C[a,b]$

$\varepsilon>0$ ⇐ קיים $N(\varepsilon)$ כך ש- $\|f_m-f_n\|_\infty<\varepsilon$ לכל $m,n>N(\varepsilon)$

⇐ $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ לכל $m,n>N(\varepsilon)$, $x\in[a,b]$ (*)

⇐ $(f_n(x))$ סדרת קושי ב-$\mathbb{R}$, לכל $x\in[a,b]$

⇐ $(f_n(x))$ מתכנסת, ל-$f(x)$ לכל $x$

(*) $\overset{m\to\infty}{\Leftarrow}$ $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ לכל $n>N(\varepsilon)$, $x\in[a,b]$

⇐ $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

$\{f_n\}$ פונקציות רציפות ⇐ $f$ פונקציה רציפה

□

**משפט** $(X,d)$ מרחב מטרי. אזי התנאים הבאים שקולים

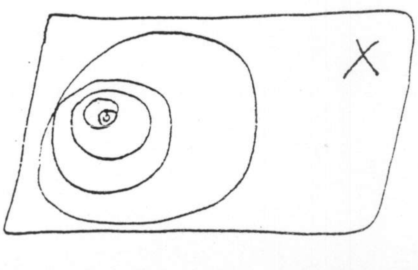
א) לכל סדרה $\{B_n\}$ של כדורים סגורים יורדים כך ש- $r_n\to0$ ⇐ $\bigcap_{n=1}^\infty B_n\neq\emptyset$

$B_n=\bar{B}(x_n,r_n)$ כאשר $x_n\in X$, $r_n>0$ ; $B_{n+1}\subseteq B_n$

ב) לכל סדרה $\{B_n\}$ של כדורים סגורים יורדים כך ש- $r_n\to0$ ⇐ $\bigcap_{n=1}^\infty B_n=\{$נקודה אחת$\}$

$B_n=\bar{B}(x_n,r_n)$

ג) $X$ מרחב שלם.



ת

**הוכחה**

א) ⇐ ב) $\{B_n\}$ סדרה של כדורים סגורים יורדים, $r_n \to 0$

א) $\Leftarrow$ $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$

$x,y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \Leftarrow x,y \in B_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$

$\Leftarrow d(x,y) < 2r_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$

$\xLeftarrow{r_n \to 0} d(x,y) = 0$

$\Leftarrow x = y$

ב) ⇐ א) ברור!

ב) ⇐ ג) נניח ש-$(x_n)$ סדרת קושי

$p \in \mathbb{N} \Leftarrow$ קיים $n_p$ כך ש- $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^p}$ לכל $n_p \le m,n$

נסמן $\bar{B}(x_{n_p}, \frac{1}{2^{p-1}}) = B_p$

$\Leftarrow d(x_{n_p}, x_{n_{p+1}}) < \frac{1}{2^p}$

$\Leftarrow B_{p+1} \subseteq B_p$

$\bar{B}(x_{n_{p+1}}, \frac{1}{2^p}) \subseteq \bar{B}(x_{n_p}, \frac{2}{2^p})$

$\xLeftarrow{(ב)} \bigcap B_p = \{x\}$ כאשר $x \in X$

$\Leftarrow x \in B_p$ לכל $p$

$\Leftarrow d(x_{n_p}, x) < \frac{1}{2^{p-1}} \Leftarrow x_{n_p} \to x$ □

ג) ⇐ ב) $B_n = \bar{B}(x_n, r_n)$ סדרה של כדורים סגורים יורדים, $r_n \to 0$

$\varepsilon > 0 \xLeftarrow{r_n \to 0}$ קיים $N(\varepsilon)$ כך ש- $r_n < \varepsilon$ לכל $n \ge N(\varepsilon)$

$\xLeftarrow{B_m \subset B_{N(\varepsilon)}} x_m \in \bar{B}(x_{N(\varepsilon)}, r_{N(\varepsilon)})$ לכל $m > N(\varepsilon)$

$\Leftarrow d(x_m, x_n) \le 2r_{N(\varepsilon)} < 2\varepsilon$ לכל $m,n > N(\varepsilon)$

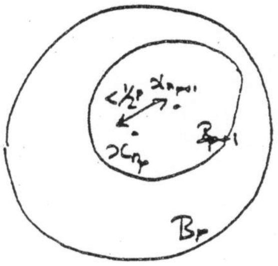
$\Leftarrow (x_n)$ סדרת קושי

$\xLeftarrow{\text{שלמות}} (x_n)$ מתכנסת, ל-$x$

$n$ קבוע $\xLeftarrow{B_m \subset B_n} x_m \in B_n$ לכל $n < m$

$\Leftarrow x \in \bar{B}_n = B_n$

לכן $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ ו- $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset$




The contraction mapping principle

**עקרון ההעתקה המכווצת**

**הגדרה** $(X,d)$ מרחב מטרי, $f: X \to X$ העתקה. $f$ נקראת כווצת (contraction) אומ״ם קיים $\lambda < 1$ כך ש- $d(f(x), f(y)) \le \lambda\, d(x,y)$ לכל $x,y \in X$

**הגדרה** $X$ קבוצה, $f: X \to X$ העתקה. $x \in X$ נקראת נקודת שבת (fixed point) אומ״ם $f(x) = x$

**משפט** $f$ כווצת, $X$ מרחב מטרי שלם $\Leftarrow$ יש ל-$f$ נקודת שבת יחידה.

**הוכחה** נתונים: $\left\{ \begin{array}{l} X \text{ מרחב מטרי שלם , } \lambda<1 \\ d(f(x),f(y)) \le \lambda d(x,y) \text{ לכל } x,y \in X \end{array} \right.$

נבחור את נקודה $x_0 \in X$

נסמן $x_n = f^n(x_0) = \underbrace{f(f(\cdots f(x_0)\cdots))}_{n \text{ פעמים}}$

$f$ כווץ $\Leftarrow$ $d(x_n,x_{n+1}) \le \lambda^n d(x_0,x_1)$

$\Leftarrow$ $d(x_n,x_m) \le \sum_{r=n}^{m-1} d(x_r,x_{r+1}) \le \sum_{r=n}^{m-1} \lambda^r d(x_0,x_1) = \frac{\lambda^n-\lambda^m}{1-\lambda} d(x_0,x_1)$ לכל $m>n$

$\Leftarrow$ $d(x_n,x_m) \le \lambda^{\max(m,n)} \cdot \frac{d(x_0,x_1)}{1-\lambda}$

$\Leftarrow$ $d(x_n,x_m)<\varepsilon$ לכל $N(\varepsilon)<n$ כאשר $\lambda^{N(\varepsilon)} < \frac{(1-\lambda)\varepsilon}{d(x_0,x_1)}$

$N(\varepsilon)$ קיים כי $\lambda<1$

$\Leftarrow$ $(x_n)$ סדרת קושי

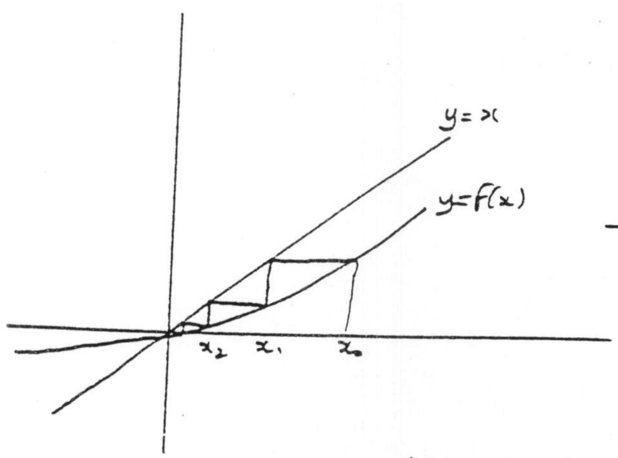
$\Leftarrow$ $(x_n)$ מתכנסת, $x_n \to x$

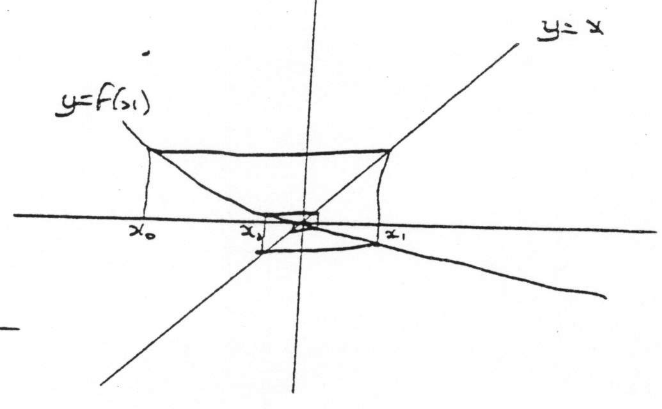
$f(x_n)=x_{n+1} \xRightarrow{n\to\infty} f(x)=x$

**יחידות**

$\left\{ \begin{array}{l} f(x)=x \\ f(y)=y \end{array} \right. \Rightarrow d(x,y)=d(f(x),f(y)) \le \lambda d(x,y) \overset{\lambda<1}{\Rightarrow} d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

□




$f$ כווץ בסביבה של $a$ $\Leftrightarrow$ $|f'(a)|<1$

$f(a)=a$

# שימושים של כווצים

$F: X\to X$ כווץ אם"ם קיים $\lambda<1$ כך ש- $d(f(x),f(y)) \le \lambda d(x,y)$ לכל $x,y \in X$

## לפתור את $f(x)=x$:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות

$$x_n = f(x_{n-1})$$

אם $f(a)=a$, $|f'(a)|<1$ $\Leftarrow$ $f$ כווץ בסביבה מספיק קטנה של $a$, ו-$(x_n)$ סדרה מתכנסת.

$f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ העתקה ליניארית

$$x_n = f(x_{n-1})$$

$f$ כווץ $\Leftrightarrow$ $\|f\| \equiv \sup_{\substack{x\neq 0\\ (\in\mathbb{R}^N)}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} < 1$

הגדרה של $\|\cdot\|$ מטריצה

$A =$ מטריצה של $f$ $(N\times N)$

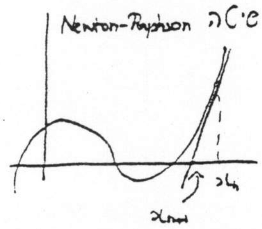
על $\mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} \|\cdot\|_\infty : & \|f\| = \max_i \sum_j |A_{ij}| \\ \|\cdot\|_1 : & \|f\| = \\ \|\cdot\|_2 : & \|f\| = \end{cases}$$

## לפתור את $f(x)=0$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות

שיטה Newton-Raphson




$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = A(x_n)$$

$$A(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow A'(x) = \frac{ff''}{f'^2}$$

$$A(x) = x \Leftrightarrow f(x)=0$$

$$A'(x) = 0 \Leftarrow f(x)=0$$

בסביבה מספיק קטנה של $a$ כך ש-$f(a)=0$ $\Leftarrow$ $|A'(x)|<1$ $\Leftarrow$ $A$ כווץ $\Leftarrow$ $(x_n)$ מתכנסת

## $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$

① $\underline{x}^{(n+1)} = (\underline{I}-\underline{A})\underline{x}^{(n)} + \underline{b}$ מתכנסת אם $\|\underline{I}-\underline{A}\|<1$

② שיטה Gauss-Seidel

$$x_j^{(n+1)} = \frac{1}{a_{jj}}\left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk}x_k^{(n+1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk}x_k^{(n)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underline{D}\underline{x}^{(n+1)} = \underline{b} - \underline{L}\,\underline{x}^{(n+1)} - \underline{U}\,\underline{x}^{(n)}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \ddots & & \underline{U} \\ & \underline{D} & \\ \underline{L} & & \ddots \end{pmatrix} = \underbrace{\underline{L}}_{\text{מטריצה משולשת תחתונה}} + \underbrace{\underline{D}}_{\text{מטריצה אלכסונית}} + \underbrace{\underline{U}}_{\text{מטריצה משולשת עליונה}}$$

$$\underline{x}^{(n+1)} = (\underline{D}+\underline{L})^{-1}(\underline{b} - \underline{U}\,\underline{x}^{(n)})$$

מתכנסת אם $\|(\underline{D}+\underline{L})^{-1}\underline{U}\|<1$

$\Uparrow$

$\boxed{\sum_{k\neq j}|a_{jk}| < |a_{jj}| \text{ לכל } j}$ — מקיים בשימושים חשובים

## משפט Picard

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \Longleftrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u,x(u))\,du$$

$f$ פונקציה רציפה על $R=\{(t,x) \mid |t-t_0|\le a,\ |x-x_0|\le b\}$

$f$ מקיים תנאי Lipschitz: $|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \le k|x_1-x_2|$ ($k$ קבוע)

$X = \{$פונקציה רציפה $[t_0-\beta,t_0+\beta] \to [x_0-b,x_0+b]\}$

$$[A(x)](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u,x(u))\,du$$

$$\left(\underset{\text{כווץ}}{A : X\to X}\right) \Longleftarrow \beta < \min\left(a, \frac{1}{k}, \frac{b}{\max_R f}\right)$$

$\Downarrow$

קיים פתרון יחיד על $[t_0-\beta,t_0+\beta]$

## דוגמא (פתרון של משוואה דיפרנציאלית)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x & \leftarrow \text{משוואה} \\ x(0) = 1 & \leftarrow \text{תנאי התחלה} \end{cases}$$

x פונקציה של t

$$\Updownarrow \int_0^t$$

$$x(t) - 1 = \int_0^t \frac{dx}{du}\,du = \int_0^t x(u)\,du$$

$$\Updownarrow$$

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(u)\,du$$

$$\Updownarrow$$

$$x = f(x)$$

**כאשר:** f העתקה על פונקציות

$f:$ פונקציה $\rightarrow$ פונקציה

$x(t) \longmapsto 1 + \int_0^t x(u)\,du$

**הערה:** לפי $\|\cdot\|_\infty$ על $C[-\lambda,\lambda]$ $(\lambda<1)$ (פונק' רציפות על $[-\lambda,\lambda]$)
f העתקה מכווצת

**הוכחה**

$$\|f(x)-f(y)\|_\infty = \sup_{t\in[-\lambda,\lambda]} |(f(x))(t)-(f(y))(t)|$$
$$= \sup_{t\in[-\lambda,\lambda]} \left| \left(1+\int_0^t x(u)\,du\right) - \left(1+\int_0^t y(u)\,du\right) \right|$$
$$= \sup_{t\in[-\lambda,\lambda]} \left| \int_0^t (x(u)-y(u))\,du \right|$$
$$\le \sup_{t\in[-\lambda,\lambda]} \left| \int_0^t |x(u)-y(u)|\,du \right|$$
$$\le \lambda \sup_{-\lambda\le u\le\lambda} |x(u)-y(u)| = \lambda\|x-y\|_\infty$$

□

פתרון: $x(t) = e^t$

נבחר פונקציה $x_0 = 0$
נגדיר פונקציות $x_n$ ע"י $x_{n+1} = f(x_n)$ (פונקציות של t)

לכן:
$$x_1 = f(x_0) = 1$$
$$x_2 = f(x_1) = 1 + \int_0^t 1\,du = 1+t$$
$$x_3 = f(x_2) = 1 + \int_0^t (1+u)\,du = 1+t+t^2/2$$
$$\vdots$$
$$x_{n+1} = 1+t+\dots+t^n/n! \xrightarrow{n\to\infty} e^t$$

**תרגיל:** $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ פעמים}}$ העתקה מכווצת על $C[-a,a]$ עם נורמה $\|\cdot\|_\infty$ אם $a^n/n! < 1$

(לכן: לכל a, $\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ פעמים}}$ העתקה מכווצת על $[-a,a]$ לכל n מספיק גדול.)

## מסקנה של עקרון ההעתקה המכווצת

X מרחב שלם
$f: X\to X$
$\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ פעמים}} = g$ העתקה מכווצת
$\Rightarrow$ קיימת נקודת שבת יחידה ל-f

**הוכחה**

קיום: g העתקה מכווצת $\xRightarrow{\text{עקרון ההעתקה המכווצת}}$ קיימת נקודת שבת יחידה $x_0$ ל-g

$g(f(x_0)) = f(g(x_0)) \Rightarrow$ $f(x_0)$ נקודת שבת של g
$= f(x_0)$

$\xRightarrow{\text{יחידות ל-g}}$ $f(x_0) = x_0$

יחידה: $x_1$ נקודת שבת ל-f $\Rightarrow$ $x_1$ נקודת שבת ל-g $\xRightarrow{\text{יחידות ל-g}}$ $x_0 = x_1$

□

**משפט:** יהי X מרחב מטרי שלם, $Y\subseteq X$, אזי Y שלם אם"ם Y קבוצה סגורה

**הוכחה** (רק אם) ($\Leftarrow$) Y שלם, צ"ל ש-Y קבוצה סגורה
נניח ש- $y \in \overline{Y}$
לכן קיימת סדרה $(y_n)$ ב-Y, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ (הגדרה של הסגור)
$\Leftarrow$ $(y_n)$ סדרת קושי ב-Y
$\xLeftarrow{Y \text{ שלם}}$ $(y_n)$ סדרה מתכנסת ב-Y
$\Leftarrow$ $y\in Y$

□

(אם) ($\Rightarrow$) Y קבוצה סגורה, צ"ל ש-Y שלם
נניח $(y_n)$ סדרת קושי ב-Y
$\Leftarrow$ $(y_n)$ סדרת קושי ב-X
$\xLeftarrow{X \text{ שלם}}$ $(y_n)$ סדרה מתכנסת ב-X, $\lim_{n\to\infty} y_n = x$
$\Leftarrow$ x ב $Y = \overline{Y}$
הגדרה של סגור/Y סגורה

□

# פונקציות מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}^m$

## המרחב של העתקות ליניאריות

**הגדרה** תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית.
**הנורמה** של $T$ נגדיר ע"י $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$

**הערה**: נשתמש בנורמה $\|\cdot\|_2$ על $\mathbb{R}^n$ ו- $\mathbb{R}^m$ בשיעור.

**למה** נניח שהמטריצה של $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ היא

$$(a_{ij})_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

אז $\max_{i,j} |a_{ij}| \le \|T\| \le \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2}$

**הוכחה**

$$\|T\underline{x}\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n\\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n\end{pmatrix}\right\|^2$$

$$= \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\Big)^2 \underset{\text{אי שיויון Cauchy-Schwarz}}{\le} \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2\Big)\Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)$$

$$= \Big(\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big)\cdot \|\underline{x}\|^2$$

$$\Rightarrow \|T\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\| \le \Big(\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big)^{1/2}$$

לכל $i,j$: $\|T\| \ge \|T\underline{e_j}\| = \Big(\sum_{i=1}^m a_{ij}^2\Big)^{1/2} \ge |a_{ij}|$

$\underline{e}_j = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \leftarrow$ הקואורדינט ה-$j$-י

□

**דוגמאות** * $\|T\| = \sup_{\underline{x}\neq \underline{0}} \frac{\|T\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}$

---

* $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $\{\|x\|=1\} = \{\pm 1\}$

$T$ ליניארית $\Leftarrow$ $T(x) = a\cdot x$

$\|T\| = |\overset{\text{קבוע}}{a}|$

$-1 \quad 0 \quad +1 \;\to\; a \quad 0 \quad -a$

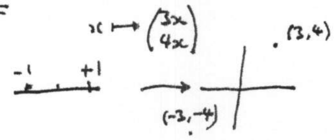
---

* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto x-2y+2z$ $\Leftarrow$ $\|T\| = \sup_{x^2+y^2+z^2=1} |x-2y+2z|$

$= \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = 3$


---

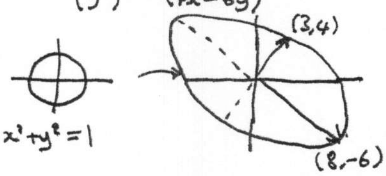
* $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $x\mapsto\begin{pmatrix}3x\\4x\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $\|T\| = 5$




---

* $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3x+8y\\4x-6y\end{pmatrix}$

$\|T\| = 10$




---

**תכונות**: $\boxed{\|T\underline{x}\| \le \|T\|\cdot\|\underline{x}\|}$

⊛ $\|(S\circ T)\underline{x}\| = \|S(T\underline{x})\| \le \|S\|\cdot\|T\underline{x}\|$
$\le \|S\|\cdot\|T\|\cdot\|\underline{x}\|$

לכן $\boxed{\|S\circ T\| \le \|S\|\cdot\|T\|}$

⊛ $T_k\to T$ כאשר $k\to\infty$ (בתוך $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$) אמ"ם $a_{ij}(T_k)\to a_{ij}(T)$ לכל $i,j$

**הוכחה**:
$(\Leftarrow)$ $\max_{i,j}|a_{ij}(T_k)-a_{ij}(T)| \le \|T_k-T\| \to 0$
$(\Rightarrow)$ $\|T_k-T\| \le \Big(\sum_{i,j}(a_{ij}(T_k)-a_{ij}(T))^2\Big)^{1/2} \to 0$

□

---

$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) = \{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקות ליניאריות$\}$

מרחב נורמי עם נורמה $\|T\|$

**הוכחה** ① $\|T\|>0$ אם $T\neq \underbrace{\underline{0}}$ כי $\|T\|\ge\max_{i,j}|a_{ij}|>0$
(העתקה כך ש- $\underline{x}\mapsto\underline{0}$ לכל $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$)

② $\|\lambda T\| = \sup_{\|\underline{x}\|=1}\|\lambda T\underline{x}\| = \sup_{\|\underline{x}\|=1}|\lambda|\cdot\|T\underline{x}\| = |\lambda|\cdot\|T\|$

③ $\|S+T\| = \sup_{\|\underline{x}\|=1}\|S\underline{x}+T\underline{x}\| \le \sup_{\|\underline{x}\|=1}(\|S\underline{x}\|+\|T\underline{x}\|)$
$\le \sup_{\|\underline{x}\|=1}\|S\underline{x}\| + \sup_{\|\underline{x}\|=1}\|T\underline{x}\|$
$= \|S\|+\|T\|$

□

---

$F:\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$
$T\longmapsto \det T$ $\Leftarrow$ ① $F$ רציפה (פולינום ב- $a_{ij}$)

② $\underbrace{GL(\mathbb{R}^n)}_{\text{קבוצה של העתקות הפיכות}}$ או $GL_n(\mathbb{R}) = F^{-1}(\underbrace{\mathbb{R}\setminus\{0\}}_{\text{קבוצה פתוחה ב-}\mathbb{R}})$ פתוחה ב-$(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$

③ $GL_n(\mathbb{R})\to GL_n(\mathbb{R})$, $T\to T^{-1}$ רציפה

④ $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ אינה הפיכה $\Leftarrow$ $\|\underbrace{\underline{I}}_{\text{העתקת הזהות } \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}-T\|\ge 1$

## דוגמאות

$n=1 \Leftarrow$ $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^1,\mathbb{R}^1) \simeq \mathbb{R}$

$F:(x) \longmapsto x$

$GL_1(\mathbb{R}) = \{x \mid x \neq 0\}$

רציפה $\begin{array}{c} x \longmapsto x^{-1} \\ GL_1(\mathbb{R}) \longrightarrow GL_1(\mathbb{R}) \end{array}$

---

$n=2 \Leftarrow$ $F: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad-bc$

$$GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, ad-bc \neq 0 \right\}$$

רציפה, $GL_2(\mathbb{R}) \to GL_2(\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$

---

## גבולות

$X, Y$ מרחבים מטריים

1. $\left( \lim_{n\to\infty} x_n = x \right.$ כאשר $\left. x_n \in X \text{ סדרה} \right)$ $\overset{\text{הגדרה}}{\Longleftrightarrow}$ $d(x_n,x) \to 0$ כאשר $n \to \infty$ $\Longleftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$, קיים $N$ כך ש- $d(x_n,x)<\varepsilon$ לכל $n>N$

2. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ כאשר $f:X\to Y$ פונקציה $\overset{\text{הגדרה}}{\Longleftrightarrow}$ לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך ש- $d(f(x),f(a))<\varepsilon$ לכל $x$, $d(x,a)<\delta$ $\Longleftrightarrow$ $f$ רציפה בנקודה $a$

3. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ כאשר $f: X\setminus\{a\} \to Y$ פונקציה $\overset{\text{הגדרה}}{\Longleftrightarrow}$ לכל $\varepsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך ש- $d(f(x),b)<\varepsilon$ לכל $x$ כך ש- $d(x,a)<\delta$

4. $\left( \lim_{x\to a} f(x) = \underline{b} \right.$, $\left. f: X\setminus\{a\} \to \mathbb{R}^n \right)$ פונקציה $\Longleftrightarrow$ $\left( \lim_{x\to a} f_i(x) = b_i \right.$ לכל $\left. i=1,2,\dots,n \right)$ כאשר $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

---

## דוגמאות

1. $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \frac{x_i^2}{\|\underline{x}\|} = 0$ כאשר $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ כי $0 \leq \frac{x_i^2}{\|\underline{x}\|} \leq |\underline{x}|$

2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ב- $\mathbb{R}^1$

3. $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$ לא קיים.

4. $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \left( \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2+y^2+y^3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{1}{1}} \begin{pmatrix} x^3/(x^2+y^2) \\ (x^2+y^2+y^3)/(x^2+y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$

6. $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{0}{0}} \left( \frac{x^2}{x^2+y^2} \right)$ לא קיים $\left[ \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} = 0 \\ x=y \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2} \end{array} \right]$

7. פונקציה $r: X\setminus\{0\} \to Y$ נקראת ב- $o(\|\underline{x}\|)$ אם"ם $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \frac{r(\underline{x})}{\|\underline{x}\|} = 0$

[סימון: $r(\underline{x}) = o(\|\underline{x}\|)$]

לדוגמא: $x^2 = o(\|\underline{x}\|)$

$xy = o(\|\underline{x}\|)$

$x \neq o(\|\underline{x}\|)$

# נגזרות של פונקציות בכמה משתנים

תהי $f:A\to\mathbb{R}^m$ פונקציה מתחום $A\subset\mathbb{R}^n$ , $a\in\mathring{A}$ (בפנים של $A$)

**הגדרה** $f$ גזירה בנקודה $a$ אם"ם
differentiable

קיימת העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ כך ש-

$$\lim_{x\to0}\frac{f(a+x)-f(a)-Tx}{\|x\|}=0$$

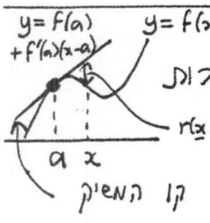
$$\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-T(x-a)}{\|x-a\|}=0 \iff\right)$$

$$\left(\underline{r}(\underline{x})=o(\|\underline{x}\|) \text{ כאשר } f(a+x)=f(a)+Tx+r(\underline{x}) \iff\right)$$

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ (נגזרת חלקית) קיימת אם"ם $\lim_{t\to0}\frac{f(a+te_i)-f(a)}{t}$ קיים.

**דוגמאות**

① $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ : נושא רגיל של גזירות



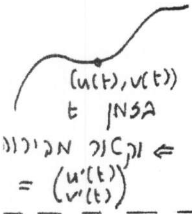

$D_f(a)\in Hom(\mathbb{R},\mathbb{R})$

מיוצג ע"י: $(f'(a))$

② $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

$x\mapsto\begin{pmatrix}u(x)\\v(x)\end{pmatrix}$

$\left(\text{מיוצג ע"י } D_f(a)\right)=\begin{pmatrix}u'(a)\\v'(a)\end{pmatrix}$




$\Leftarrow$ וקטור מהירות $=\begin{pmatrix}u'(t)\\v'(t)\end{pmatrix}$

③ $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ בנקודה $\underline{0}=a$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x^2+y+1\\x+y^2\end{pmatrix}$

$$f(\underline{x})=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x^2\\y^2\end{pmatrix}$$
$$=f(\underline{0})+T\underline{x}+r(\underline{x})$$

$D_f(\underline{0})\in Hom(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$

$$\lim_{\binom{x}{y}\to\underline{0}}\frac{\left\|\binom{x^2}{y^2}\right\|}{\left\|\binom{x}{y}\right\|}=0$$

**הערות**: ① $T$ קיימת $\Leftarrow$ $T$ יחידה

$$\frac{f(a+tx)-f(a)}{t}=\frac{T(t\underline{x})+r(t\underline{x})}{t}=T(\underline{x})+\frac{r(t\underline{x})}{t}\xrightarrow[t\to0]{}T(\underline{x})$$

$$\Leftarrow\quad T(\underline{x})=\lim_{t\to0}\frac{f(a+tx)-f(a)}{t}$$

② נסמן את $T$ ב- $D_f(a)\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$

③ $f$ גזירה $\Leftarrow$ $f$ רציפה

כי $\lim_{x\to0}f(a+x)=f(a)$

$(Tx\to0,\ r(\underline{x})\to0)$

**למה** $f$ גזירה ב-$a$ אם"ם $f_i$ גזירה ב-$a$

לכל $i=1,2,\dots,m$

$$f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\\vdots\\f_m(x)\end{pmatrix}$$

**הוכחה** $f$ גזירה ב-$a$

$\iff$ קיימת $T\in Hom(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ כך ש- $\underline{0}=\lim_{x\to0}\frac{f(a+x)-f(a)-Tx}{\|\underline{x}\|}$

$\iff$ קיימת $T_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ליניארית כך ש- $0=\lim_{x\to0}\frac{f_i(a+x)-f_i(a)-T_ix}{\|\underline{x}\|}$ לכל $i$

$\iff$ $f_i$ גזירה ב-$a$ לכל $i$

**למה** $f$ גזירה ב-$a$ $\Leftarrow$ קיים $\partial f_i/\partial x_j(a)$ לכל $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,n$ ו-

$$a_{ij}(D_f(a))=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

**הוכחה**

$$D_f(a)(\underline{e}_j)=\lim_{t\to0}\frac{f(a+te_j)-f(a)}{t}=\partial f/\partial x_j=\begin{pmatrix}\partial f_1/\partial x_j\\\vdots\\\partial f_m/\partial x_j\end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow\quad D_f(a)(\underline{x})=\sum_{j=1}^n x_j\,D_f(a)(\underline{e}_j)=\begin{pmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_n\\\vdots & & \vdots\\\partial f_m/\partial x_1 & \dots & \partial f_m/\partial x_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

הנגזרות החלקיות
מחושבות בנקודה $a$

$\square$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{מיוצג ע"י של } D_f(a):\\ \begin{pmatrix}\partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_n\\\vdots & & \vdots\\\partial f_m/\partial x_1 & \dots & \partial f_m/\partial x_n\end{pmatrix}\end{array}}$$

## דיפרנציאביליות ①

$f: A \to \mathbb{R}$ גזירה ב-$a$, $\quad A \subseteq \mathbb{R}^n$

אז $D_f(a) \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \Leftarrow D_f(a): x \mapsto \langle x, v \rangle$

מכפלה הפנימית

כאשר $v$ ב $\mathbb{R}^n$

$$v = grad f(a) = \nabla f(a) = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial f/\partial x_n \end{pmatrix}(a)$$

מטריצה של $D_f(a)$ היא $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$

---

② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ גזירה

$$D_f(a)\cdot 1 = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t}$$

אז $D_f(a) \in Hom(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \Leftarrow D_f(a): x \mapsto x \cdot v$

$$v = f'(a) = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x \\ \vdots \\ \partial f_n/\partial x \end{pmatrix}(a) = (\text{מטריצה של } D_f(a))$$

---

③ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow \quad f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$

$f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2$

$$\Leftarrow \quad \begin{pmatrix} \text{מטריצה של} \\ D_f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 & 1 \\ 1 & 2a_2 \end{pmatrix}$$

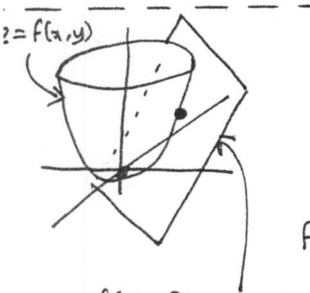
---

④ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2^2$$

$\Leftarrow \quad D_f(a)x = (2a_1 \;\; 2a_2)x$

$$grad f(a) = \begin{pmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{pmatrix}$$




מישור המשיק

$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f(a) = 2$

$$D_f(a)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2 \;\; 2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x + 2y$$

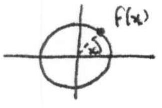
$$\Leftarrow \quad f\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{a} + \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{x}\Big) = \underbrace{2}_{f(a)} + \underbrace{(2x+2y)}_{D_f(a)x} + \underbrace{(x^2+y^2)}_{r(x)}$$

אז $f(x) = f(a) + D_f(a)(x-a) + r(x-a)$

---

⑤ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$



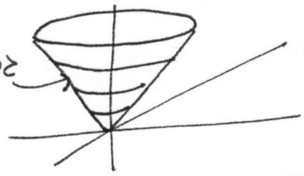

$$D_f(a): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \cos a \\ -\sin a \end{pmatrix} \cdot x$$

---

⑥ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$$

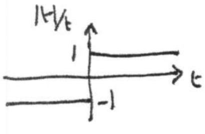


גרף של $f$

$f$ אינה גזירה ב-$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ וגם $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ לא קיימים

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$

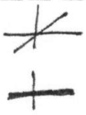
$$\lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t}$$




---

⑦ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq 0 \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$



$\Leftarrow \quad \partial f/\partial x(0,0) = 1$ כי $\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 1$

$\partial f/\partial y(0,0) = 0$ כי $\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$

אבל $f(x,y) - x = \frac{x^3}{x^2+y^2} - x = \frac{-xy^2}{x^2+y^2}$

ו- $\frac{f(x,y)-x}{\|(x,y)\|} = \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \not\to 0$ כאשר $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to 0$

$$\begin{pmatrix} x=0 \Rightarrow 0 \\ x=y \Rightarrow -1/2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$ $f$ אינה גזירה ב-$0$

$\boxed{f \text{ גזירה } \Rightarrow\ (\not\Leftarrow) \text{ קיים } \partial f/\partial x_i \text{ לכל } i}$

## כלל השרשרת (CHAIN RULE)

$A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$

$\begin{cases} f: A \to \mathbb{R}^m \\ g: B \to \mathbb{R}^k \end{cases}$ פונקציות גזירות ב- $\left[\begin{array}{l} a \in A \\ f(a) \in B \end{array}\right.$

$\mathring{A} \ni a$

$\mathring{B} \ni f(a)$

$\Leftarrow$ פונקציה המורכבת

$g\circ f: A \to \mathbb{R}^k$

היא גזירה ב- $a$ ו-

$$\underbrace{D_{g\circ f}(a)}_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k} = \underbrace{D_g(f(a))}_{\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k} \circ \underbrace{D_f(a)}_{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m}$$

### הוכחה

$f$ גזירה ב- $a$ $\Leftarrow$ $f(a+x) = f(a) + D_f(a)x + r(x)$ כאשר $r(x) = o(\|x\|)$

$g$ גזירה ב- $f(a)$ $\Leftarrow$ $g(f(a)+x) = g(f(a)) + D_g(f(a))x + s(x)$ כאשר $s(x) = o(\|x\|)$

לכן

$$(g\circ f)(a+x) = g(f(a+x)) = g(f(a)) + D_g(f(a))\,(f(a+x)-f(a)) + s(f(a+x)-f(a))$$

$$= (g\circ f)(a) + D_g(f(a))\circ D_f(a)\,x + D_g(f(a))\,r(x) + s(f(a+x)-f(a))$$

$\Leftarrow$

$$\left\| \frac{(g\circ f)(a+x) - (g\circ f)(a) - D_g(f(a))\circ D_f(a)\,x}{\|x\|} \right\| \le \frac{\|D_g(f(a))\,r(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|s(f(a+x)-f(a))\|}{\|x\|}$$

$$\le \underbrace{\|D_g(f(a))\| \cdot \frac{\|r(x)\|}{\|x\|}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\frac{\|s(f(a+x)-f(a))\|}{\|x\|}}$$

$$= \frac{o(\|f(a+x)-f(a)\|)}{\|x\|} = \underbrace{\frac{o(\|D_f(a)\,x + r(x)\|)}{\|x\|}}_{\to 0}$$

כאשר $\|x\| \to 0$ $\Leftarrow$ $g\circ f$ גזירה ב- $a$

ו- $D_{g\circ f}(a) = D_g(f(a))\circ D_f(a)$

$\square$

---

### דוגמאות

① $\left.\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{array}\right\}$ $\Leftarrow$ $g\circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

כלל השרשרת: $\underbrace{\frac{d}{dx}(g(f(x)))}_{D_{g\circ f}(x)\cdot 1} = \underbrace{g'(f(x))\cdot f'(x)}_{D_g(f(x))\,(D_f(x)\cdot 1)}$, $f'(x) = D_f(x)\cdot 1$

② $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos x \cos y \\ \cos x \sin y \\ \sin x \end{pmatrix}$

$D_f(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}$

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto x^2 + 2y^2 + 3z^2$

$D_g(b) = (2b_1, 4b_2, 6b_3)$

$g\circ f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \cos^2 x \cos^2 y + 2\cos^2 x \sin^2 y + 3\sin^2 x$

בדקו!

$\underline{a} = \begin{pmatrix} \pi/4 \\ \pi/4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D_f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

$f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow D_g(f(\underline{a})) = (1 \;\; 2 \;\; 3\sqrt{2})$

$D_g(f(\underline{a}))D_f(\underline{a}) = (1 \;\; 2 \;\; 3\sqrt{2}) \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

$= (3/2 \;\; 1/2) = D_{g\circ f}(\underline{a})$

---

### הגדרה

תהי $f: A \to \mathbb{R}^n$ גזירה ב- $a \in A$, $A \subset \mathbb{R}^n$

**היעקוביאן** (Jacobian) של $f$ ב- $a$ הוא $J_f(a) = \det D_f(a)$

(מטריצה)

### דוגמאות

① $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos y \\ x \sin y \end{pmatrix}$

מטריצה של

$D_f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{pmatrix}$

$J_f(\underline{x}) = \begin{vmatrix} \cos y & -x\sin y \\ \sin y & x\cos y \end{vmatrix} = (\cos y)(x\cos y) - (\sin y)(-x\sin y) = x.$

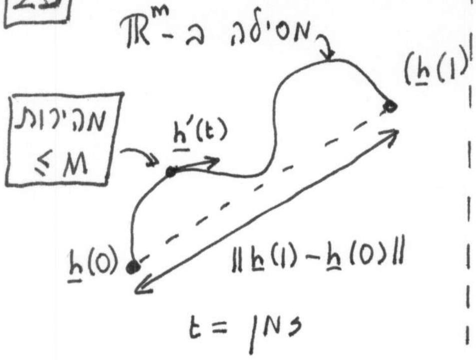
③ $\begin{array}{l} f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \\ g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \end{array}$ $\Leftarrow$ $g\circ f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$D_{g\circ f}(a) = D_g(f(a))\circ D_f(a) \Rightarrow \boxed{J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a))\cdot J_f(a)}$

② $f: X \to X$ העתקת הזהות

$D_f(\underline{x}) = \underline{I}$

$J_f(\underline{x}) = \det \underline{I} = 1$



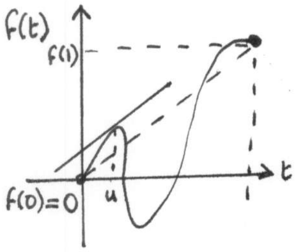

**למה** $h: A \to \mathbb{R}^m$ פונקציה גזירה,
$A \subset \mathbb{R}$ פתוחה
$[0,1] \subset A$
$\sup_{0\le t\le 1} |h'(t)| = M$
$\Leftarrow$ $\|\underline{h}(1)-\underline{h}(0)\| \le M$

**הוכחה** $f(t) = \langle h(t)-h(0),\, h(1)-h(0)\rangle$

מכפלה הפנימית $\Leftarrow$ $|f'(t)| = |\langle h'(t), h(1)-h(0)\rangle|$

אי שיוויון Cauchy-Schwartz $\to$ $\le \|h'(t)\|\cdot\|h(1)-h(0)\|$

$\le M\cdot \|h(1)-h(0)\|$




$f$ גזירה $A \to \mathbb{R}$ ו-$[0,1]$ $\Leftarrow$ משפט הערך הממוצע $\Leftarrow$ קיים $u \in [0,1]$ כך ש- $f(1)-f(0) = f'(u)$

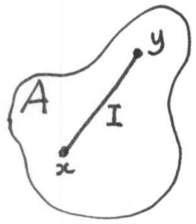
$f(1) = \|h(1)-h(0)\|^2$, $f(0) = 0$, $f'(u) \le 1\cdot 1 \le M\cdot\|h(1)-h(0)\|$

$\Leftarrow$ $\|h(1)-h(0)\|^2 \le M\cdot\|h(1)-h(0)\|$

$\Leftarrow$ $\|h(1)-h(0)\| \le M$

□

---




**משפט** $g: A \to \mathbb{R}^m$ פונקציה גזירה
$A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה
$x, y \in A$ כך ש- $A \supset I = \{\lambda y + (1-\lambda)x \mid 0\le\lambda\le 1\}$
קטע בין x ובין y
$\sup_{z\in I} \|D_g(z)\| = M$
$\Leftarrow$ $\|g(y)-g(x)\| \le M\|y-x\|$

**הוכחה** נגדיר את $h$ ע"י $h(t) = g(t\underline{y} + (1-t)\underline{x})$
$[0,1] \to \mathbb{R}^m$ $\quad = g(f(t))$

כאשר $f(t) = t\underline{y} + (1-t)\underline{x}$
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow D_h(t) = D_g(f(t)) \circ D_f(t)$

$\Rightarrow h'(t) = D_g(f(t))\,(\underline{y}-\underline{x})$

$\Rightarrow \|h'(t)\| \le \|D_g(f(t))\|\cdot\|\underline{y}-\underline{x}\| \le M\cdot\|\underline{y}-\underline{x}\|$

$\overset{\text{למה}}{\Rightarrow} \underbrace{\|h(1)}_{g(\underline{y})} - \underbrace{h(0)\|}_{g(\underline{x})} \le M\cdot\|\underline{y}-\underline{x}\|$

□

## הנגזרת לפי קומפוננטות

תהי $f:A\to\mathbb{R}^m$ ($A\subset\mathbb{R}^n$) פונק' גזירה ב-$a\in\mathring{A}$

נכתוב $\underline{y}=f(\underline{x})$

משתנים וקטורים

$$\underline{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \underline{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\qquad y_i=f_i(x_1,\dots,x_n)$$

לכן $D_f(a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ העתקה ליניארית

ומטריצה שלה היא:

$$\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\equiv\begin{pmatrix}\partial y_1/\partial x_1 & \cdots & \partial y_1/\partial x_n\\ \vdots & & \vdots\\ \partial y_m/\partial x_1 & \cdots & \partial y_m/\partial x_n\end{pmatrix}$$

בנקודה $\underline{x}=\underline{a}$

יעקוביאן

$$J_f(a)=\left|\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}\right|\equiv\det(D_f(a))$$

## כלל השרשרת לפי קומפוננטות

נניח: $f:A\to\mathbb{R}^m$, $A\subset\mathbb{R}^n$ גזירה ב-$a\in\mathring{A}$

$g:B\to\mathbb{R}^k$, $B\subset\mathbb{R}^m$ גזירה ב-$f(a)\in\mathring{B}$

אם יש משתנים וקטורים $\underline{x}\in\mathbb{R}^n$, $\underline{y}\in\mathbb{R}^m$, $\underline{z}\in\mathbb{R}^k$ עם $\underline{y}=f(\underline{x})$, $\underline{z}=g(\underline{y})$

$\underline{z}=(g\circ f)(\underline{x})$

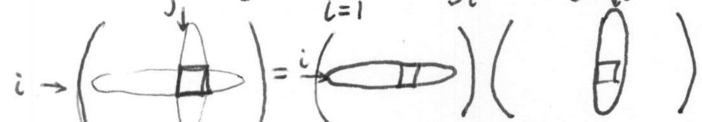
לכן כלל השרשרת אומר ש:

$$\frac{\partial(z_1,\dots,z_k)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}=\frac{\partial(z_1,\dots,z_k)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}\cdot\frac{\partial(y_1,\dots,y_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$$

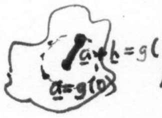
מטריצה של $D_{g\circ f}(a)$ ב-$\underline{x}=\underline{a}$ ; מטריצה של $D_g(f(a))$ ב-$\underline{y}=f(\underline{a})$ ; מטריצה של $D_f(a)$ ב-$\underline{x}=\underline{a}$

או, בקומפוננטות:

$$\partial z_i/\partial x_j=\sum_{l=1}^{m}\partial z_i/\partial y_l\;\partial y_l/\partial x_j$$




## טור Taylor בכמה משתנים

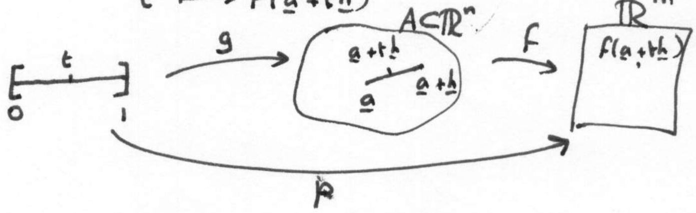



$f:A\to\mathbb{R}^m$, $A\subset\mathbb{R}^n$ גזירה $n$ פעמים

$a\in A$ כך ש-$B_\varepsilon(a)\subset\mathring{A}$, $\underline{h}\in\mathbb{R}^n$, $\|\underline{h}\|<\varepsilon$

לכן נגדיר פונקציה $p:[0,1]\to\mathbb{R}^m$

$t\longmapsto f(\underline{a}+t\underline{h})$




$p(0)=f(\underline{a})$ , $p(1)=f(\underline{a}+\underline{h})$

$p'(0)=D_f(\underline{a})\cdot\underline{h}=\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}h_i$

$p''(0)=\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j$

$p=f\circ g$
כאשר $g:[0,1]\to\mathbb{R}^n$
$g(t)=\underline{a}+t\underline{h}$

$$\boxed{f(\underline{a}+\underline{h})\sim f(\underline{a})+\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}h_i+\frac{1}{2!}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}h_ih_j+\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}h_ih_jh_k+\dots}$$

## דוגמאות

א) $\underline{a}=(0,0)$ , $f(x,y)=\sin x\cos y$

$$f(x,y)\sim \underset{f(0,0)}{0}+\underset{\sum\partial f/\partial x_i\,h_i}{x}+0\;\underline{-\tfrac12 xy^2-\tfrac16x^3}$$

$h_1=x$, $h_2=y$

$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos x\cos y$ , $\frac{\partial f}{\partial y}=-\sin x\sin y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\sin x\cos y$ , $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\cos x\sin y$ , $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\sin x\cos y$

$(i=j=k=1)$ $\quad\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\Big|_a=-1$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\Big|_a=0$

$\begin{pmatrix}i=1,\ j=k=2\\ j=1,\ i=k=2\\ k=1,\ i=j=2\end{pmatrix}$ $\quad\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\Big|_a=-1$

$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\Big|_a=0$

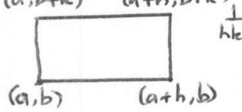
ב) אם $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות

$\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y$ רציפות

ו- $\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y$ גזירות ברציפות

אז' $\partial^2 f/\partial x\partial y=\partial^2 f/\partial y\partial x$

הוכחה




$$\frac{1}{hk}\big(f(a+h,b+k)-f(a,b+k)-f(a+h,b)+f(a,b)\big)$$

$$\frac1h\left(\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k}-\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}\right)\xrightarrow{h,k\to0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac1k\left(\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b+k)}{h}-\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}\right)\xrightarrow{h,k\to0}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

□

נניח ש-$f:A\to B$ תמו"ע, $f$ ו-$f^{-1}$ פונק' גזירות ($a\in\mathring{A}$)
(תחומים ב-$\mathbb{R}^n$) $\quad f^{-1}=g$

$f\circ g=id$ (העתקת זהות) $\Leftarrow$ $D_f(g(b))\circ D_g(b)=I$

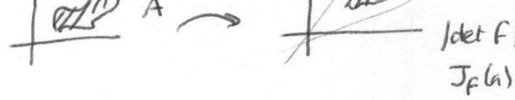
העתקות ליניאריות $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

$b=f(a)$, $a=g(b)$ $\Leftarrow$ $\boxed{J_f(a)^{-1}=J_{f^{-1}}(b)}\ \boxed{D_f(a)^{-1}=D_{f^{-1}}(b)}$


שימו לב!
צד ימין ב-b
צד שמאל ב-a

## משמעות של יעקוביאן

א) $f$ פונק' ליניארית $\Leftarrow$ $D_f(a)=f$




$=|\det f|\cdot A$

$=J_f(a)\cdot A$

ב) $f$ פונקציה גזירה כללית $\Leftarrow$ $J_f(a)=$ יחס מקומי של שטח

(מהפיכה $\Leftarrow$ $J_f\neq0$)

# נוסחת טיילור לפונקציה של n משתנים

הגדרה: $U\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה, $f:U\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ב-$U$ $k$ פעמים ברציפות, $a\in U$ ו-$h\in\mathbb{R}^n$ מקיימים: לכל $0\le t\le 1$ הנקודה $p_t=a+th$ שייכת ל-$U$.

נוסחת טיילור עבור $n=1$: $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ גזירה $k$ פעמים ברציפות. אזי קיים $0<\theta<1$ כך ש

$$F(1)=F(0)+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}F^{(j)}(0)+\frac{1}{k!}F^{(k)}(\theta).$$

נשתמש את הנוסחה עבור הפונקציה $F(t)=f(p_t)$; היא מקיימת את הנדרש.
נשים לב ש-$F(0)=f(a)$, $F(1)=f(a+h)$.

מכיוון ש-$(p_t)'=\frac{d}{dt}p_t=h$, מכלל השרשרת מקבלים:

$$(*)\qquad F'(t)=\langle\nabla f(a+th),h\rangle=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)\,h_i$$

וגם

$$F''(t)=\langle D_{\nabla f}(a+th)h,h\rangle=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(a+th)\,h_i h_j$$

מסקנה (נוסחת טיילור עם שארית מסדר 2): קיים $0<\theta<1$ כך ש:

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,h_i+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_i}(a+\theta h)\,h_i h_j.$$

עבור $k$ גדולים מ-2 נרשום את הנוסחה רק במקרה $n=2$, המשתנים $x$, $y$:

טענה: יהי $n=2$, $F$ כנ"ל. אזי מתקיים

$$(**)\qquad F^{(j)}(t)=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\frac{\partial^j f(a+th)}{\partial^{j-i}y\,\partial^i x}h_1^{\,i}h_2^{\,j-i}$$

הוכחה: באינדוקציה על $j$. עבור $j=1$ זו נוסחה (*). נניח שהנוסחה נכונה עבור $j\ge1$ מסוים.

אם נסמן $G(t)=\frac{\partial^j f(a+th)}{\partial^{j-i}y\,\partial^i x}$, נוסחה אנלוגית ל-(*) תיתן

$$G'(t)=\frac{\partial^{j+1}f(a+th)}{\partial^{j-i}y\,\partial^{i+1}x}h_1+\frac{\partial^{j+1}f(a+th)}{\partial^{j+1-i}y\,\partial^{i}x}h_2$$

נגזור את הסכום ב-(**) איבר-איבר ונסדר את אותם האיברים, ונקבל

$$F^{(j+1)}(t)=\sum_{i=0}^{j+1}\alpha_i h_1^{\,i}h_2^{\,j+1-i}$$

כאשר

$$\alpha_i=\binom{j}{i-1}+\binom{j}{i}\underset{\text{Pascal נוסחת}}{=}\binom{j+1}{i}\qquad(i\ge1 \text{ עבור})$$

זה מוכיח את (**).

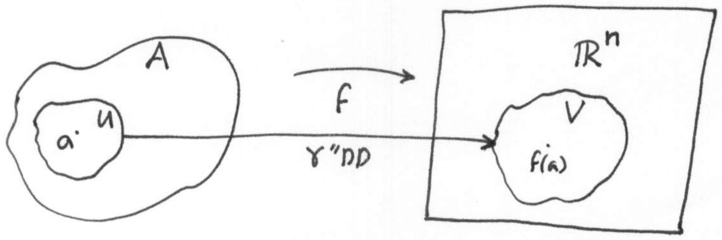
מסקנה (נוסחת טיילור עבור פונקציה של שני משתנים): קיים $0<\theta<1$ כך ש

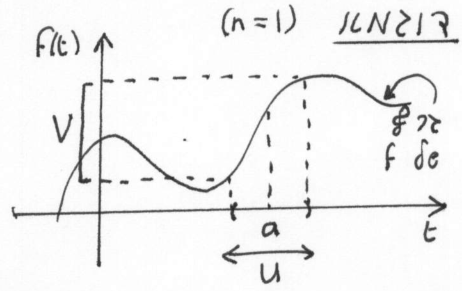
$$f(a+h)=f(a)+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\frac{\partial^j f(a)}{\partial^{j-i}y\,\partial^i x}h_1^{\,i}h_2^{\,j-i}+\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\partial^k f(a+\theta h)}{\partial^{k-i}y\,\partial^i x}h_1^{\,i}h_2^{\,k-i}$$

# משפט הפונקציה ההפוכה [INVERSE FUNCTION THEOREM]

$A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה
$a \in A$
$f: A \to \mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות
$J_f(a) \neq 0$

$\Leftarrow$ קיימת תת-קבוצה פתוחה $U \subseteq A$ כך ש-
$a \in U$
$V = f(U)$ פתוחה
$f: U \to V$ חח"ע
$f^{-1}: V \to U$ גזירה ברציפות

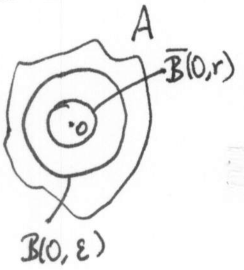



## הוכחה

נניח ש- $a = 0$, $f(a) = 0$, $D_f(a) = I$ ← העתקת הזהות $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

<u>מקרה כללי:</u> נגדיר את $g$ ע"י
$$g(\underline{x}) = D_f^{-1}(a)\left(f(\underline{x}+\underline{a}) - f(\underline{a})\right)$$
$g(\underline{0}) = \underline{0}$, $D_g(\underline{0}) = \underline{I}$ א/ז




$0 \in A$ פתוחה $\Leftarrow$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש- $B(0,\varepsilon) \subset A$

$D_f$ רציפה $\Leftarrow$ קיים $r < \varepsilon$ כך ש- $\|D_f(x) - I\| < \frac{1}{2}$ לכל $x \in \bar{B}(0,r)$

נגדיר את $F_y$ ע"י $[y \in B(0, r/2)]$
$$\begin{cases} F_y: \bar{B}(0,r) \to \mathbb{R}^n \\ \underline{x} \mapsto \underline{x} - f(\underline{x}) + \underline{y} \end{cases}$$

<u>תכונות:</u> ① $D_{F_y}(\underline{x}) = I - D_f(\underline{x})$ $\Leftarrow$ $\|D_{F_y}(\underline{x})\| < \frac{1}{2}$ לכל $\underline{x} \in \bar{B}(0,r)$

$\xLeftarrow[\text{בדף 26}]{\text{למה}}$ $\|F_y(\underline{x}) - F_y(\underline{x}')\| \le \frac{1}{2}\|\underline{x} - \underline{x}'\|$ לכל $\underline{x}, \underline{x}' \in \bar{B}(0,r)$

② $\underline{x} \in \bar{B}(0,r)$ $\Leftarrow$
$$\|F_y(\underline{x})\| \le \|\underline{x} - f(\underline{x})\| + \|\underline{y}\| = \|F_y(\underline{x}) - F_y(\underline{0})\| + \|\underline{y}\| \overset{①}{\le} \tfrac{1}{2}\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| \le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$
$\Leftarrow$ $F_y(\underline{x}) \in \bar{B}(0,r)$

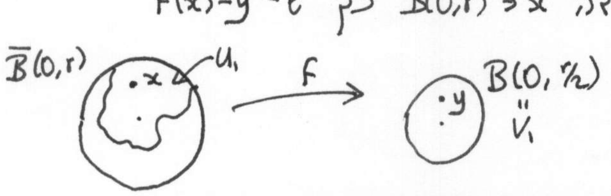
אז $F_y: \bar{B}(0,r) \to \bar{B}(0,r)$ כווץ ו- $\bar{B}(0,r)$ תת-קבוצה סגורה של $\mathbb{R}^n$ $\Leftarrow$ שלם
($\mathbb{R}^n$ שלם)

$\xLeftarrow{\text{עקרון ההעתקה המכווצת}}$ קיימת <u>נקודת שבת</u> יחידה ל- $F_y$ ב- $\bar{B}(0,r)$
$$F_y(\underline{x}) = \underline{x} \iff f(\underline{x}) = \underline{y}$$

$\Leftarrow$ לכל $y \in B(0, r/2)$, קיימת נקודה יחידה $x \in \bar{B}(0,r)$ כך ש- $f(x) = y$

נסמן: $U_1 = f^{-1}(B(0,r/2)) \cap \bar{B}(0,r)$, $V_1 = B(0, r/2)$

$\boxed{f: U_1 \to V_1 \text{ חח"ע}}$ א/ז



① $\Leftarrow$ $\|F_y(\underline{x}) - F_y(\underline{x}')\| \le \frac{1}{2}\|\underline{x}-\underline{x}'\|$ לכל $\underline{x},\underline{x}' \in \bar{B}(0,r)$

$\Leftarrow$ $\|(\underline{x}-\underline{x}') - (f(\underline{x}) - f(\underline{x}'))\| \le \frac{1}{2}\|\underline{x}-\underline{x}'\|$

$\Leftarrow$ $\|f(\underline{x}) - f(\underline{x}')\| \ge \frac{1}{2}\|\underline{x}-\underline{x}'\|$

$U_1 \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} V_1$

$f: U_1 \to V_1$ חח"ע $\Leftarrow$ קיימת $f^{-1}: V_1 \to U_1$

$\underline{y}, \underline{y}' \in V_1$ $\Leftarrow$ $f^{-1}(\underline{y}_1), f^{-1}(\underline{y}_2) \in U_1 \subset \bar{B}(0,r)$

$\Leftarrow$ $\|f(f^{-1}(\underline{y}_1)) - f(f^{-1}(\underline{y}_2))\| \ge \frac{1}{2}\|f^{-1}(\underline{y}_1) - f^{-1}(\underline{y}_2)\|$

$\Leftarrow$ $\|f^{-1}(\underline{y}_1) - f^{-1}(\underline{y}_2)\| \le 2\|\underline{y}_1 - \underline{y}_2\|$

$\Leftarrow$ $f^{-1}$ רציפה

$\underbrace{f^{-1}(B(0,r/2))}_{\text{פתוחה (f רציפה)}} \cap \underbrace{B(0,r)}_{\text{פתוחה}} = \boxed{U \text{ פתוחה}}$, $\subset U_1$ $\overset{f^{-1}\text{ רציפה}}{\Leftarrow}$ $(f^{-1})^{-1}(U)$ פתוחה ב-$V_1$

$(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$

$\overset{V_1 \text{ פתוחה}}{\Leftarrow}$ $\boxed{f(U) = V \text{ פתוחה}}$ ב-$\mathbb{R}^n$

$$\begin{bmatrix} V \ni y, y+k \\ x = f^{-1}(y) \\ h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) \end{bmatrix} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y+k = f(x+h) \\ \|k\| \ge \frac{1}{2}\|h\| \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - D_f(x)^{-1}k\| \\ &= \|(x+h) - x - D_f(x)^{-1}(f(x+h) - f(x))\| \\ &= \|h - D_f(x)^{-1}(D_f(x)h + r(h))\| \\ &= \|D_f(x)^{-1} r(h)\| \le \|D_f(x)^{-1}\| \cdot \|r(h)\| \end{aligned}$$

$$\Leftarrow \frac{\|f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) - D_f(x)^{-1}k\|}{\|k\|} \le \|D_f(x)^{-1}\| \cdot \frac{\|r(h)\|}{\|k\|} \le 2\|D_f(x)^{-1}\| \cdot \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \to 0$$

לכן $f^{-1}$ גזירה ו- $\boxed{D_{f^{-1}}(y) = D_f(x)^{-1}}$

$\|D_f(x) - I\| \le \frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ $D_f(x)$ הפיכה

נגזרת של $f^{-1}$: $y \longmapsto D_{f^{-1}}(y)$ " $D_f(x)^{-1}$ "

$$\begin{array}{ccc} y & \longmapsto & D_{f^{-1}}(y) \\ {\scriptstyle f^{-1}\text{ רציפה}}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle (A \to A^{-1})} \\ x = f^{-1}(y) & \xrightarrow[\text{רציפה}]{D_f} & D_f(x) \end{array}$$

(f גזירה ברציפות)

$\Leftarrow$ $\boxed{f^{-1} \text{ גזירה ברציפות}}$

∎

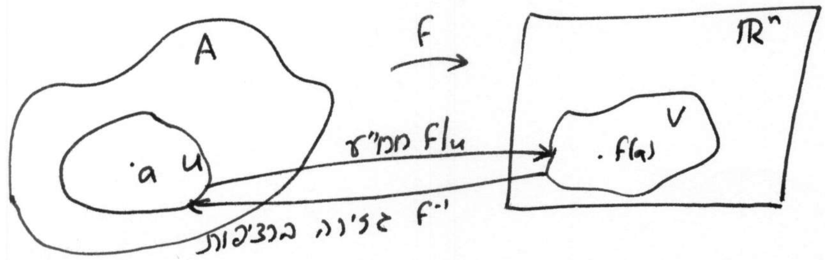
# משפט הפונקציה ההפוכה [INVERSE FUNCTION THEOREM]

$A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה
$a \in A$
$f: A \to \mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות
$J_f(a) \neq 0$

$\Leftarrow$ קיימת תת-קבוצה פתוחה $\overset{a}{\underset{}{\ni}}U$ של $A$ כך ש-

א) $f(U) = V$ פתוחה
ב) $f: U \to V$ חח"ע
ג) $f^{-1}: V \to U$ גזירה ברציפות

ו- $D_{f^{-1}}(y) = (D_f(x))^{-1}$ לכל $x \in U$, $y = f(x)$.




---

## הוכחה

① מספיק להוכיח במקרה ש- $a = f(a) = 0$, $D_f(a) = \underset{\text{ההעתקה הזהות } \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}{I}$

כי נניח שכבר הוכחנו את המשפט במקרה הזה; $f$ פונקציה כללית.

נגדיר את פונקציה $g$ ע"י

(הפיכה) $D_f(a) \Leftarrow J_f(a) \neq 0$

$$g(x) = (D_f(a))^{-1}(f(a+x) - f(a))$$

תכונות:
* $g(0) = 0$
* $D_g(0) = I$ (לכן $J_g(0) \neq 0$)
* $g$ מוגדרת $A-a \to \mathbb{R}^n$ (קבוצה פתוחה $0 \in$ ($\{x-a \mid x \in A\}$))
* $g$ גזירה ברציפות

$\Leftarrow$ מקרה פרטי

קיימת $\underset{0}{\ni}U' \subset A-a$ פתוחה כך ש-

א) $g(U') = V'$ פתוחה
ב) $g: U' \to V'$ חח"ע
ג) $g^{-1}: V' \to U'$ גזירה ברציפות

$\Downarrow$

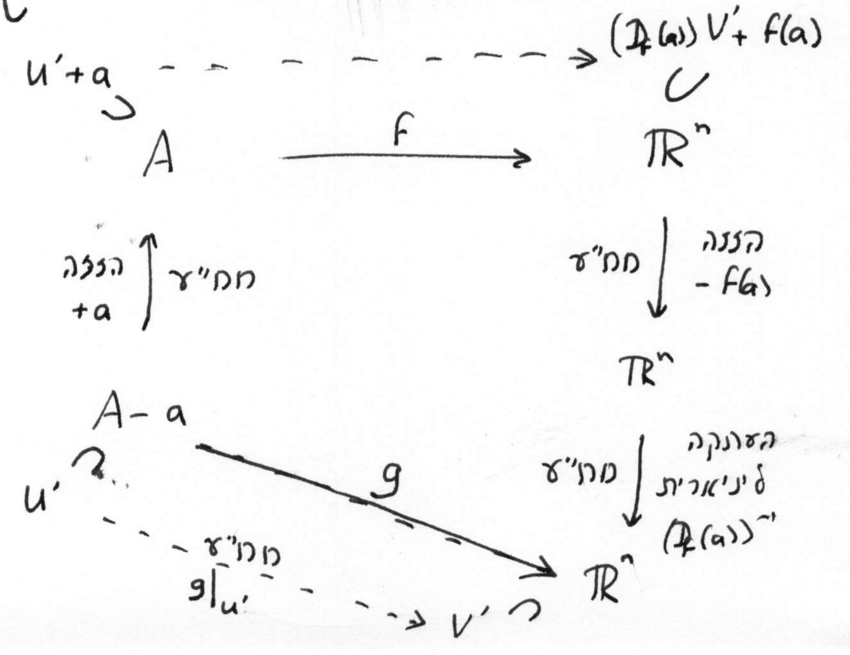
נגדיר את $U$, $V$ ע"י

$U = U' + a$

$V = (D_f(a))V' + f(a)$

לכן
* $a \in U$ פתוחה, $\subset A$
* $f(U) = V$ פתוחה ($D_f(a)$ העתקה ליניארית הפוכה)
* $f: U \to V$ חח"ע
* $f^{-1}: V \to U$ גזירה ברציפות

הרכבה של $g^{-1}$ עם הזזות והעתקה ליניארית הפוכה



$27^2$

אכשיו נניח ש- $a=f(a)=0$ ו- $D_f(a)=I$.

② נגדיר $\varepsilon>0$ כך ש- $\bar{B}(0,\varepsilon)\subset A$ ו- $\|D_f(x)-I\|<\frac{1}{2}$ לכל $x\in\bar{B}(0,\varepsilon)$

מדוע $\varepsilon$ קיים? $0\in A$ פתוחה $\Leftarrow$ קיים $\varepsilon_1>0$ כך ש- $\bar{B}(0,\varepsilon_1)\subset A$

$f$ גזירה ברציפות $\Leftarrow$ $D_f(x)$ רציפה כפונקציה של $x$

$(D_f : A\to\mathbb{R}^{n^2})$

לפי נורמה רגילה ב- $\mathbb{R}^{n^2}$

$\underset{\text{שקילות של נורמות}}{\Leftarrow}$ לפי נורמה של העתקות

$\Leftarrow$ קיים $\varepsilon_2>0$ כך ש- $\|D_f(x)-D_f(0)\|<\frac{1}{2}$

לכל $x\in\bar{B}(0,\varepsilon_2)$

$\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ $\Leftarrow$ $\bar{B}(0,\varepsilon)\subset A$ ו- $\|D_f(x)-I\|<\frac{1}{2}$ לכל $x\in\bar{B}(0,\varepsilon)$

③ לכל $y\in B(0,\frac{\varepsilon}{2})$ נגדיר $h_y$ ע"י $h_y(x)=x-f(x)+y$

א) $h_y$ מוגדרת $\bar{B}(0,\varepsilon)\to\bar{B}(0,\varepsilon)$

ב) $h_y$ העתקה מכווצת

ג) $\bar{B}(0,\varepsilon)$ מרחב שלם.

Ⓐ $f$ מוגדרת על $\bar{B}(0,\varepsilon)\subset A$ $\Leftarrow$ $h_y$ מוגדרת על $\bar{B}(0,\varepsilon)$

אם $x\in\bar{B}(0,\varepsilon)$, צ"ל $h_y(x)\in\bar{B}(0,\varepsilon)$

$$\|h_y(x)\| = \|x-f(x)+y\| \underset{\text{אי שיוויון המשולש}}{\le} \|x-f(x)\| + \|y\|$$

$$= \|p(x)-p(0)\| + \|y\|$$

כאשר $p(x)=x-f(x)$ $(D_p=I-D_f)$

$$\le \frac{1}{2}\|x-0\| + \|y\|$$

(כי $\|D_p\|\le\frac{1}{2}$ ב- $\bar{B}(0,\varepsilon)$)

$$\le \frac{1}{2}\varepsilon + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Ⓑ
$$\|h_y(x)-h_y(z)\| = \|(x-f(x)+y)-(z-f(z)+y)\|$$

$x,z\in\bar{B}(0,\varepsilon)$

$$= \|(x-f(x))-(z-f(z))\|$$

$$= \|p(x)-p(z)\|$$

(כאשר $p(x)=x-f(x)$)

$$\le \frac{1}{2}\|x-z\|$$

(כי $\|D_p\|\le\frac{1}{2}$ ב- $\bar{B}(0,\varepsilon)$)

Ⓒ $\bar{B}(0,\varepsilon)$ תת קבוצה סגורה של מרחב שלם $\mathbb{R}^n$ ($\Leftarrow$ שלם)

## ④ משתמשים בעקרון ההעתקה המכווצת

לכל $y \in B(0,\frac{\varepsilon}{2})$, קיימת נקודה שבת יחידה ל- $h_y$ ב- $\bar{B}(0,\varepsilon)$.

לכן, לכל $y \in B(0,\frac{\varepsilon}{2})$, קיימת נקודה יחידה $x \in \bar{B}(0,\varepsilon)$ כך ש-

$$h_y(x) = x$$

$$\left[\begin{array}{rcll} x - f(x) + y &=& x & \Leftrightarrow \\ y &=& f(x) & \Leftrightarrow \end{array}\right]$$

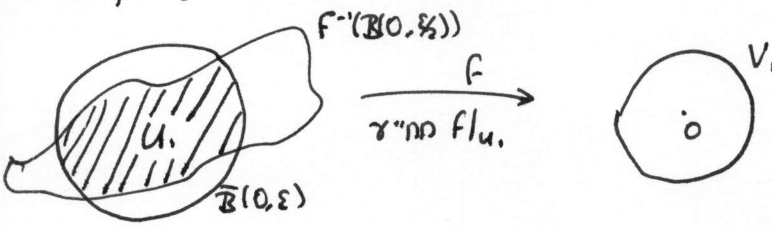
לכן, $f: \left(\begin{array}{c}\text{חלק של המקור של } B(0,\varepsilon/2) \\ \text{שבתוך } \bar{B}(0,\varepsilon)\end{array}\right) \to B(0,\frac{\varepsilon}{2})$ חח"ע ועל

נסמן ב- $U_1$ (לא צריך להיות פתוחה)

$\underbrace{\bar{B}(0,\varepsilon)}_{\text{סגורה}} \cap \underbrace{f^{-1}(B(0,\varepsilon/2))}_{\text{פתוחה}}$ "

(מקור תחת פונק' רציפה של קבוצה פתוחה)

נסמן ב- $V_1$ (פתוחה)




## ⑤ רציפה $q = f^{-1}: V_1 \to U_1$

($f: U_1 \to V_1$ חח"ע ועל ⇐ קיימת הפוכה, $f^{-1}: V_1 \to U_1$)

ב3 ⇐ $\|(x - f(x)) - (z - f(z))\| \le \frac{1}{2}\|x - z\|$ לכל $x,z \in \bar{B}(0,\varepsilon)$

לכן $\|(x - z) - (f(x) - f(z))\| \le \frac{1}{2}\|x - z\|$ לכל $x,z \in U_1$

אי שוויון המשולש

$\big|\, \|x - z\| - \|f(x) - f(z)\| \,\big|$

לכן $\|x - z\| - \|f(x) - f(z)\| \le \frac{1}{2}\|x - z\|$ לכל $x,z \in U_1$

לכן $\|f(x) - f(z)\| \ge \frac{1}{2}\|x - z\|$ לכל $x,z \in U_1$

לכן $\|y - y'\| \ge \frac{1}{2}\|q(y) - q(y')\|$ לכל $y,y' \in V_1$

אזי $2\|y - y'\| \ge \|q(y) - q(y')\|$ לכל $y,y' \in V_1$

## ⑥ הגדרות של U ו- V פתוחות

$U \equiv f^{-1}(B(0,\varepsilon/2)) \cap B(0,\varepsilon) \subset U_1$ ⇐ U פתוחה

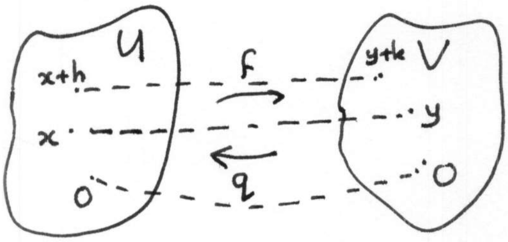
$V \equiv q^{-1}(U)$ $\overset{\text{q רציפה}}{\Leftarrow}$ V פתוחה, $f(U) = V$ (כי $f: U_1 \to V_1$ חח"ע ועל גם הפיכה q)

$f: U_1 \to V_1$ חח"ע ⇐ $f: U \to V$ חח"ע

⑦ q גזירה ו- $D_q(y)=(D_f(x))^{-1}$ כאשר $y\in V$ , $x=q(y)$

צ"ל ש- $q(y+k)-q(y)-(D_f(x))^{-1}k = o(k)$

נסמן את $q(y+k)$ ב- $(x+h)$




לכן: $\begin{cases} h = q(y+k)-q(y) \\ k = f(x+k)-f(x) \end{cases}$

⑤ $\Leftarrow$ $2\|k\| \geq \|h\|$

f גזירה $\Leftarrow$ $r(h) \equiv f(x+h)-f(x)-D_f(x)h = o(h)$

$$\frac{\|q(y+k)-q(y)-(D_f(x))^{-1}k\|}{\|k\|} = \frac{\|h-(D_f(x))^{-1}(f(x+h)-f(x))\|}{\|k\|}$$

$$= \frac{\|h-(D_f(x))^{-1}(D_f(x)h+r(h))\|}{\|h\|}\cdot\frac{\|h\|}{\|k\|}$$

$$= \frac{\|(D_f(x))^{-1}r(h)\|}{\|h\|}\cdot\frac{\|h\|}{\|k\|}$$

$$\leq \underbrace{\|D_f(x)^{-1}\|}_{\text{קבוע}}\cdot\underbrace{\frac{\|r(h)\|}{\|h\|}}_{\to 0}\cdot\underbrace{\frac{\|h\|}{\|k\|}}_{\leq 2}$$

נורמה של העתקה ליניארית

כי $r(h) = o(\|h\|)$

$\longrightarrow 0$ כאשר $k\to 0$ (ו- $h\to 0$)

⑧ q גזירה ברציפות

⑦ $\Leftarrow$ $D_q(y) = (D_f(q(y)))^{-1}$

f גזירה ברציפות $\Leftarrow$ $D_f$ רציפה

⑤ $\Leftarrow$ q רציפה

$\Leftarrow$ $D_f\circ q$ רציפה

$\|D_f(x)-I\|<\frac{1}{2}$ $\Leftarrow$ $D_f(x)$ מפיכה לכל x ב $\bar{B}(0,\varepsilon)$

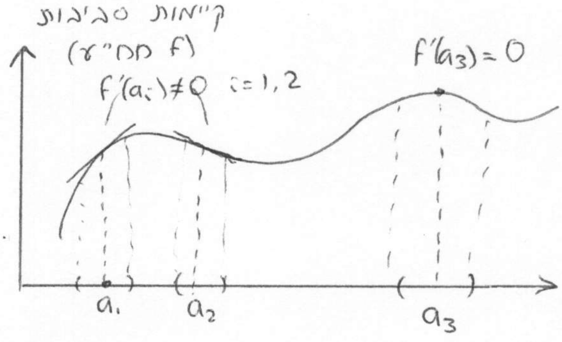
$\Leftarrow$ $D_f(x)$ מפיכה לכל x ב U ($U\subset\bar{B}(0,\varepsilon)$)

לכן $(D_f(q(y)))^{-1}$ פונקציה רציפה של y.

□

# דוגמאות של משפט הפונקציה ההפוכה

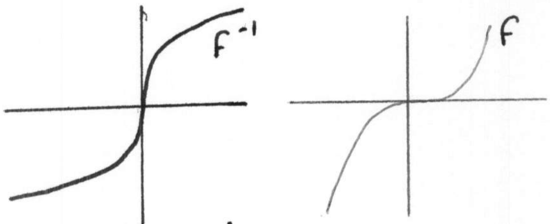
① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$




② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \to x^3$

f מח"ע אבל $f'(0)=0$.




לא גזירה ב-0

③ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y \\ x+2y^2 \end{pmatrix}$$

$$D_f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

מטריצה של $D_f$ $= \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 4y \end{pmatrix}$

יעקוביאן של $f$ $= \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 4y \end{vmatrix}$

$= -1+8xy$

לכן בסביבה של כל נקודות כך ש- $xy \neq 1/8$, $f$ מח"ע.

$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D_f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$f(\underline{a}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$D_{f^{-1}}(f(\underline{a})) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

④ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix}$$

$$D_f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

מטריצה של $D_f$ $= \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}$

יעקוביאן של $f$ $= \begin{vmatrix} 3x^2 & 0 \\ 0 & 3y^2 \end{vmatrix}$

$= 9x^2y^2$

משפט הפונק' ההפוכה $\Leftarrow$ בסביבה של כל נקודות $(x,y)$ $(x,y \neq 0)$ $f$ מח"ע

__אבל__ $f$ מח"ע בכל $\mathbb{R}^2$ !

$f^{-1}$ איננה גזירה ברציפות

## מסקנה (משפט ההעתקה הפתוחה) OPEN MAPPING THEOREM

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות

$A \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה

$\operatorname{rank} D_f(x) = m$ לכל $x \in A$

$(\Rightarrow m \leq n)$

$\Leftarrow$ $f$(פתוחה) = פתוחה

[כלומר: $f(B)$ פתוחה לכל תת-קבוצה פתוחה $B \subset A$]

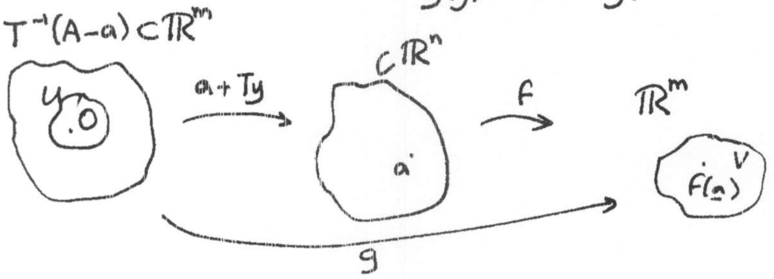
## הוכחה

נניח ש- $a \in B$

$\operatorname{rank} D_f(a) = m$ $\Leftarrow$ קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

כך ש- $D_f(a) \circ T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ הפיכה

נגדיר את $g: \underset{\mathbb{R}^m}{\underset{\cap}{T^{-1}(A-a)}} \to \mathbb{R}^m$ ע"י $g(y) = f(a+Ty)$

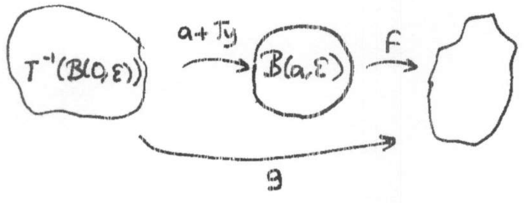



אז $g$ גזירה ברציפות

$D_g(0) = D_f(a) \circ T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$\Leftarrow$ $J_g(0) \neq 0$

$\Leftarrow$ (משפט הפונקציה ההפוכה) קיימות קבוצות פתוחות $0 \in U$, $f(a) \in V$ כך ש- [$g: U \to V$ חח"ע, $g^{-1}$ גזירה ברציפות]




$\varepsilon > 0$ מספיק קטן $\Leftarrow$ $T^{-1}(B(0,\varepsilon)) \subset U$

$\Leftarrow$ ($g^{-1}$ רציפה) $g(T^{-1}(B(0,\varepsilon)))$ פתוחה

$\Leftarrow$ $f(B(a,\varepsilon))$ פתוחה

לכן $f(B)$ פתוחה

$$f(B) = \bigcup_{a \in B} f(\underbrace{B(a,\varepsilon_a)}_{\text{כדור} \subset B})$$

$\square$

**הערה** אם $\left.\begin{array}{l} A \subset \mathbb{R}^n \text{ פתוחה} \\ f: A \to \mathbb{R}^n \text{ גזירה ברציפות} \\ a \in A \text{ כך ש- } J_f(a) \neq 0 \end{array}\right\}$

לכן קיימת סביבה $U \overset{\text{פתוחה}}{\subset} A$ של $a$

כך ש- $f: U \to f(U)$ פתוחה

(כי $\underset{\text{גזירה ברציפות}}{\overset{\Uparrow}{}}$ $f^{-1}: \underset{f(U)}{V} \to U$ רציפה ממשפט הפונק' ההפיכה)

**הגדרה** $X$ ו-$Y$ מרחבים מטריים

$f: X \to Y$ יקראת פונקציה פתוחה

אם"ם $f(A)$ פתוחה לכל $A \subset X$

פתוחה.

## משפט ההעתקה הפתוחה

$$\left[\begin{array}{l} f: A \to \mathbb{R}^m \\ A \subset \mathbb{R}^n \text{ פתוחה} \\ \text{rank } D_f(x) = m \text{ לכל } x \in A \\ \quad (\Rightarrow m \leq n) \end{array}\right. \Rightarrow f \text{ פונקציה פתוחה}$$

**הוכחה**

נניח ש- $B \subset A$ פתוחה.

צ"ל ש- $f(B) \subset \mathbb{R}^m$ פתוחה (כלומר שלכל $a \in B$, קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B(f(a), \varepsilon) \subset f(B)$)

① נגדיר פונקציה מתחום ב-$\mathbb{R}^m$ ל-$\mathbb{R}^m$ עם יעקוביאן $\neq 0$

$\text{rank } D_f(a) = m \Rightarrow$ ההעתקה $D_f(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ לינארית ועל

$\{\underline{e}_i\}_{i=1}^m$ בסיס ל-$\mathbb{R}^m$ $\Rightarrow$ קיימים $\underline{v}_i \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $(D_f(a))(\underline{v}_i) = \underline{e}_i$

נגדיר את ההעתקה $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ לינארית $\underline{e}_i \mapsto \underline{v}_i$ (לכן $\underset{\mathbb{R}^m \leftarrow \mathbb{R}^n \leftarrow \mathbb{R}^m}{I_m = D_f(a) \circ T}$ העתקת זהות על $\mathbb{R}^m$)

נגדיר את פונקציה $g$ ע"י $\underline{g(y) = f(a+Ty)}$.

$g$ מוגדרת בתחום

$\underbrace{T^{-1}(A-a)}_{\text{מקור תחת } T} \subset \mathbb{R}^m$ של $A-a = \{x-a \mid x \in A\}$

כלל השרשרת $\Rightarrow D_g(0) = D_f(a) \circ T = I_m \Rightarrow J_g(0) \neq 0$

$$\begin{tikzcd} T^{-1}(A-a) \arrow[r, "y \mapsto a+Ty"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & A \arrow[d, phantom, "\cap"] \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^m \\ \mathbb{R}^m \arrow[rr, dashed, "g"'] & \mathbb{R}^n & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

② משתמשים במשפט הפונקציה ההפיכה

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ גזירה ברציפות} \Rightarrow g \text{ גזירה ברציפות} \\ \left.\begin{array}{l} A \text{ פתוחה} \\ T \text{ רציפה} \end{array}\right\} \Rightarrow T^{-1}(A-a) \text{ פתוחה ב-} \mathbb{R}^m \\ a \in A \Rightarrow 0 \in T^{-1}(A-a) \\ J_g(0) \neq 0 \end{array}\right. \xLeftarrow{\text{משפט הפונק' ההפיכה}}$$

קיימת $U \subset T^{-1}(A-a)$ פתוחה ($0 \in U$)

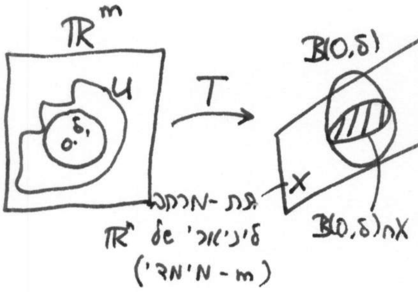
כך ש- $\left.\begin{array}{l} V = g(U) \text{ פתוחה (ב-} \mathbb{R}^m) \\ g: U \to V \text{ חח"ע} \\ g^{-1}: V \to U \text{ גזירה ברציפות} \end{array}\right]$

(ו- $g: U \to V$ **פתוחה**)

## ③ קיים $\delta>0$ כך ש- $U \supset T^{-1}(B(0,\delta))$

U פתוחה, $0 \in U$ ⇐ קיים $\delta_1>0$ כך ש- $U \supset B(0,\delta_1)$

$T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית חח"ע (כי $Dg(a) \circ T = I_m$)




⇐ $T: \mathbb{R}^m \to X$ חח"ע ועל, $X = \operatorname{Im} T$

⇐ קיימת העתקה ליניארית $S = T^{-1}: X \to \mathbb{R}^m$

$\delta = \delta_1 / \|S\|$ ⇐ $\underbrace{T^{-1}(B(0,\delta))}_{\text{מקור תחת } T} = \underbrace{S(B(0,\delta)\cap X)}_{\text{תמונה תחת } S}$

$\underbrace{\subset}_{\text{נורמה של העתקה}} B(0,\delta\cdot\|S\|) = B(0,\delta_1) \subset U$

## ④ קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $f(B) \supset B(f(a),\varepsilon)$

T רציפה ⇐ $T^{-1}(B(0,\varepsilon))$ פתוחה ומוכלת ב-$U$ לכל $\varepsilon \le \delta$ $(\varepsilon>0)$

$g: U \to V$ פתוחה ⇐ $g(T^{-1}(B(0,\varepsilon)))$ פתוחה לכל $\varepsilon \le \delta$ $(\varepsilon>0)$

$$g(T^{-1}(B(0,\varepsilon))) \overset{\text{הגדרה של } g}{\subset} f(a+B(0,\varepsilon)) = f(B(a,\varepsilon))$$

B פתוחה, $a \in B$ ⇐ קיים $\varepsilon_1>0$ כך ש- $B \supset B(a,\varepsilon_1)$

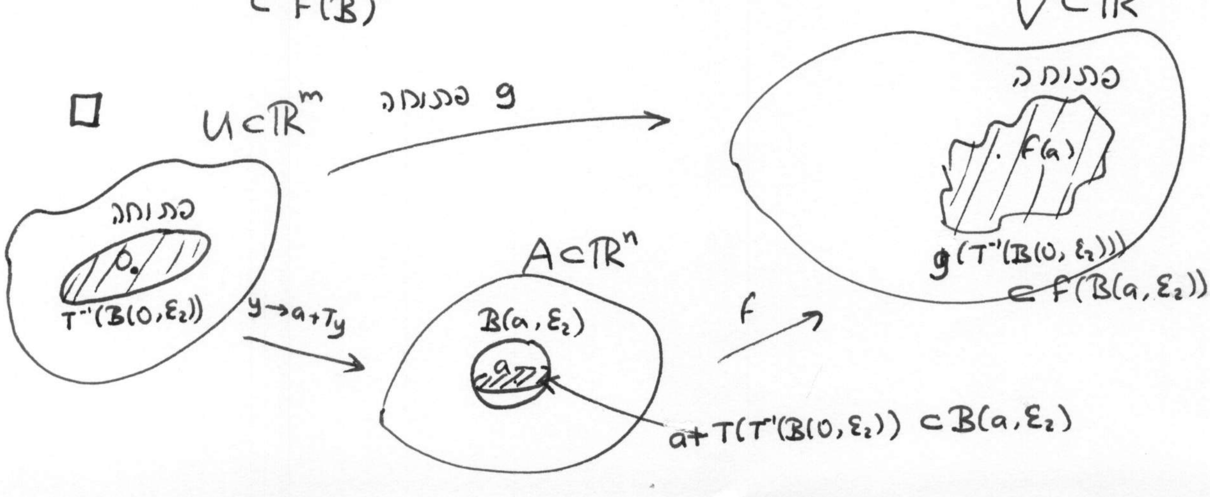
$\varepsilon_2 = \min(\varepsilon_1,\delta)$ $\overset{\varepsilon_2\le\delta}{\Rightarrow}$ $g(T^{-1}(B(0,\varepsilon_2)))$ פתוחה, $\ni g(0) = f(a)$

$$g(T^{-1}(B(0,\varepsilon_2))) \subset f(B(a,\varepsilon_2))$$

⇐ קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $B(f(a),\varepsilon) \subset g(T^{-1}(B(0,\varepsilon_2)))$

$$\subset f(B(a,\varepsilon_2)) \overset{\varepsilon_2\le\varepsilon_1}{\subset} f(B(a,\varepsilon_1)) \subset f(B)$$

□



# משפט הפונקציה הסתומות (IMPLICIT FUNCTION THEOREM)

$a \in$ פתוחה $A \subset \mathbb{R}^m$

$b \in$ פתוחה $B \subset \mathbb{R}^n$

גזירה ברציפות $F: B \times A \to \mathbb{R}^n$

$f(b,a)=0$

מטריצה הפיכה $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{n}\Big|_{(b,a)}$

$\Leftarrow$

קיימות פתוחות $W, U$ : $a \in W \subset \mathbb{R}^m$, $(b,a) \in U \subset \mathbb{R}^{n+m}$

גזירה ברציפות $g: W \to B$

כך ש- $\{(y,x)\in U \mid f(y,x)=0\} = \{(y,x)\in U \mid y=g(x)\}$

---

**דוגמא**

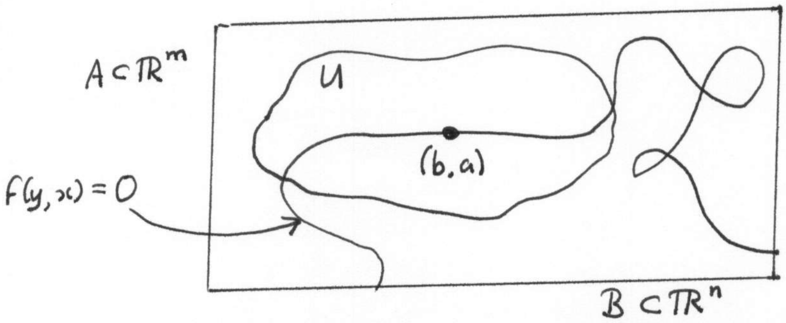
$x^2y+xy^3-2=0 \quad (*)$

האם בסביבה של $(1,1)$, קיימת פונקציה $g$ כך ש- $y=g(x)$ פתרון של $(*)$?

$F(y,x) = x^2y+xy^3-2$ , $(b,a)=(1,1)$

$\partial f/\partial y\big|_{(1,1)} = (x^2+3y^2)\big|_{(1,1)} = 4 \neq 0$

$\Leftarrow$ כן, קיימת פונקציה $g$!




---

**הוכחה** נגדיר את $F$ ע"י

$F: B\times A \to \mathbb{R}^{n+m}$

$(y,x) \longmapsto (f(y,x),x)$

$\Leftarrow$ $F(b,a)=(0,a)$ , $D_F = \begin{pmatrix} D_f \\ \hline \begin{array}{c|c} \underline{0} & \underline{I}_m \end{array} \end{pmatrix}$

מטריצת יחידה $m\times m$

$\Leftarrow$ $J_F(b,a) = \det D_F = \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)_{i,j=1}^{n}\Big|_{(b,a)} \neq 0$

יעקוביאן של $F$

משפט הפונקציה ההפוכה $\Leftarrow$ קיימת $U \subseteq B\times A$ קבוצה פתוחה $\ni (b,a)$

תמונה של $F$ (פתוחה) $\ni (0,a)$

כך ש- מחח"ע $F: U \to V$

גזירה ברציפות $G=F^{-1}: V \to U$

$\Leftarrow$ $G: V\to U$ בצורה $(z,x)\mapsto(h(z,x),x)$

כאשר $h: V\to B$ גזירה ברציפות

נגדיר את $W,g$ ע"י

$W=\{x\in\mathbb{R}^m \mid (0,x)\in V\}$

$g: W \to B$

$x \longmapsto h(0,x)$

$V$ פתוחה, $\ni(0,a)$ $\Leftarrow$ $W$ פתוחה, $\ni a$

$h$ גזירה ברציפות $\Leftarrow$ $g$ גזירה ברציפות

$f(y,x)=0,\ (y,x)\in U \overset{\text{הגדרה של } F}{\Longleftrightarrow} F(y,x)=(0,x)$ ו- $(y,x)\in U$

$\overset{G=F^{-1}}{\Longleftrightarrow} G(0,x)=(y,x)$ ו- $(0,x)\in V$

$\overset{\text{הגדרות של } W,h}{\Longleftrightarrow} h(0,x)=y$ ו- $x\in W$

$\overset{\text{הגדרה של } g}{\Longleftrightarrow} g(x)=y$ ו- $x\in W$ ■

# דוגמא של משפט הפונקציה הסתומות

**שאלה** (א) האם בסביבה של $x=y=z=t=1$ קיימת פונקציה $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ כך שכל הפתרונות ל-

$$\left.\begin{aligned} x^3yt^3+ytz+3y^2-5&=0\\ z^3+xt^2-2&=0\end{aligned}\right\}\circledast$$

באותה סביבה, הם בצורה: $g\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\\t\end{pmatrix}$ ?

(ב) אם כן מהוי הנגזרת של $g$ ב- $x=y=1$ ?

(א)

נגדיר $f:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}x^3yt^3+ytz+3y^2-5\\ z^3+xt^2-2\end{pmatrix}$$

לכן המשוואות שלנו אומרים ש- $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=0$

במשפט הפונקציה הסתומות:

$a=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $m=2$

$b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\underline{y}=\begin{pmatrix}z\\t\end{pmatrix}$, $n=2$

$$\to\left\|\begin{pmatrix}\partial f_1/\partial y_1 & \partial f_1/\partial y_2\\ \partial f_2/\partial y_1 & \partial f_2/\partial y_2\end{pmatrix}\right\|_{x=y=z=t=1}=\left\|\begin{pmatrix}yt & 3x^3yt^2+yz\\ 3z^2 & 2xt\end{pmatrix}\right\|_{x=y=z=t=1}$$

$(y_1\equiv z,\ y_2\equiv t)$

$$=\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}$$

מטריצה הפיכה $\xRightarrow{\text{משפט הפונק' הסתומות}}$ תשובה: **כן!**

---

(ב) אנו רוצים לחשב את $D_g\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ כאשר $f\begin{pmatrix}x\\y\\g\binom{x}{y}\end{pmatrix}=0$

נקודה, פונקציה

גם כותבים משתנים בעמודה גם בשורה

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\g\binom{x}{y}\end{pmatrix}=(f\circ h)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

כאשר $h\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\g_1(x,y)\\g_2(x,y)\end{pmatrix}$

גזר לפי $\binom{x}{y}$ (כלל השרשרת)

$$D_f\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\ \hline \multicolumn{2}{c}{D_g\binom{1}{1}}\end{pmatrix}}_{D_h\binom{1}{1}}=0$$

מכפלה של מטריצות

$$\begin{array}{cccc} & & & \\ \end{array}\begin{pmatrix}3&8&1&4\\1&0&3&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}I_2\\ \hline D_g\binom{1}{1}\end{pmatrix}=0$$

$\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$, $\partial/\partial t$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}3&8\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}D_g(1)=\underline{0}$$

$$\Rightarrow D_g\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1&4\\3&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3&8\\1&0\end{pmatrix}$$

$$=\tfrac{1}{10}\begin{pmatrix}2&-4\\-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&8\\1&0\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}.2&1.6\\-.8&-2.4\end{pmatrix}}}$$

30ב

## דרך אחרת (ב)

בסביבה של $x=y=z=t=1$ ,

$$\Leftarrow \begin{cases} x = 1+\delta x \\ y = 1+\delta y \\ z = 1+\delta z \\ t = 1+\delta t \end{cases}$$

$f_1$

$$\begin{aligned} & x^3yt^3+ytz+3y^2-5 \\ &= (1+\delta x)^3(1+\delta y)(1+\delta t)^3 \\ &\quad +(1+\delta y)(1+\delta t)(1+\delta z) \\ &\quad +3(1+\delta y)^2-5 \\ &= (1+3\delta x+\delta y+3\delta t) \\ &\quad +(1+\delta y+\delta t+\delta z) \\ &\quad +3(1+2\delta y)-5+o(*^2) \\ &= \underset{\partial f_1/\partial x}{3\,\delta x}+\underset{\partial f_1/\partial y}{8\,\delta y}+\underset{\partial f_1/\partial z}{\delta z}+\underset{\partial f_1/\partial t}{4\,\delta t}+o(*^2) \end{aligned}$$

$f_2$

$$\begin{aligned} & z^3+xt^2-2 \\ &= (1+\delta z)^3+(1+\delta x)(1+\delta t)^2-2 \\ &= (1+3\delta z)+(1+\delta x+2\delta t)-2+o(*^2) \\ &= \underset{\partial f_2/\partial x}{\delta x}+\underset{\partial f_2/\partial y = 0}{\phantom{0}}\underset{\partial f_2/\partial z}{3\delta z}+\underset{\partial f_2/\partial t}{2\delta t}+o(*^2) \end{aligned}$$

$$\circledast \ \xRightarrow[\text{מאזון}]{\text{לסדר}} \ \left.\begin{aligned} 3\delta x+8\delta y+\delta z+4\delta t &= 0 \\ \delta x \qquad\quad +3\delta z+2\delta t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \delta z+4\delta t &= -3\delta x-8\delta y \\ 3\delta z+2\delta t &= -\delta x \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \delta z &= \tfrac{1}{5}(\delta x+8\delta y) \\ \delta t &= \tfrac{1}{5}(-4\delta x-12\delta y) \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}\delta z\\ \delta t\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0.2 & 1.6\\ -0.8 & -2.4\end{pmatrix}}_{D_g\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\end{pmatrix}$$

משמעות של נגזרת
יחס בין שנוי
במשתנים ושנוי
בפונקציה

אנחנו
בסביבה של $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

# כופלי לגרנג' [LAGRANGE MULTIPLIERS]

$B \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה

$f, g_1, \dots, g_k : B \to \mathbb{R}$ פונקציות גזירות ברציפות

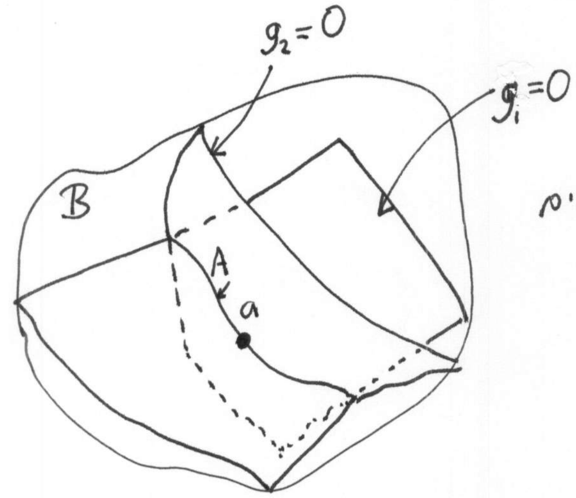
$a \in A = \{x \in B \mid g_1 = \dots = g_k = 0\}$

$\{\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_k(a)\}$ וקטורים בלתי תלויים ליניארית ב- $\mathbb{R}^n$

$f|_A$ מקבלת מכסימום או מינימום לוקלי ב- $a$ (יחסית לערכי $f$ ב- $A$)

$\Leftarrow$ קיימת $\overbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_k}^{\text{כופלי Lagrange}}$ מספרים

כך ש- $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla g_i(a)$




**הוכחה** נניח ש- $a$ מכסימום ו- $\lambda_i$ לא קיימים

$\Leftarrow$ $\{\nabla f(a), \nabla g_1(a) \dots \nabla g_k(a)\}$ וקטורים בלתי תלויים ליניארית

$a$ מכסימום לוקלי $\Leftarrow$ קיימת קבוצה פתוחה $a \in A \cap U$ ($U \subset B$ פתוחה)

כך ש- $f(a) = \max_{x \in A \cap U} f(x)$

נגדיר את $F$ ע"י

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}, \quad x \longmapsto \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad D_F(a) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(a) \\ \vdots \\ \nabla g_k(a) \\ \nabla f(a) \end{pmatrix} \quad \Leftarrow \quad \operatorname{rank} D_F(a) = k+1, \quad F(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(a) \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ $\operatorname{rank} D_F(x) = k+1$ לכל $x \in B(a,\varepsilon)$ ($\varepsilon$ מספיק קטן)

משפט ההעתקה הפתוחה $\Leftarrow$ $F(B(a,\varepsilon)) =$ פתוחה $\ni F(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(a) \end{pmatrix}$ ($\varepsilon$ מספיק קטן)

$t > f(a)$ מספיק קרוב ל- $f(a)$ $\Leftarrow$ $F(B(a,\varepsilon)) \ni \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = F(b)$ כאשר $b \in U$ ($b \in B(a,\varepsilon) \subset U$)

$g_i = 0$ $\Leftarrow$ $b \in A$

$\Leftarrow$ $b \in A \cap U$ אבל $f(b) = t > f(a)$

⨳

## דוגמא של משפט הפונקציה הסתומות

$$\begin{cases} x^3yt^3+ytz+3y^2-5=0 \\ z^3+xt^2-2=0 \end{cases}$$
⟵ האם קיימת פונקציה $g$ כך ש- $(z,t)=g(x,y)$ בסביבה של $x=y=z=t=1$ ?

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^3yt^3+ytz+3y^2-5 \\ z^3+xt^2-2 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial z & \partial f_1/\partial t \\ \partial f_2/\partial z & \partial f_2/\partial t \end{pmatrix}\Bigg|_{(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

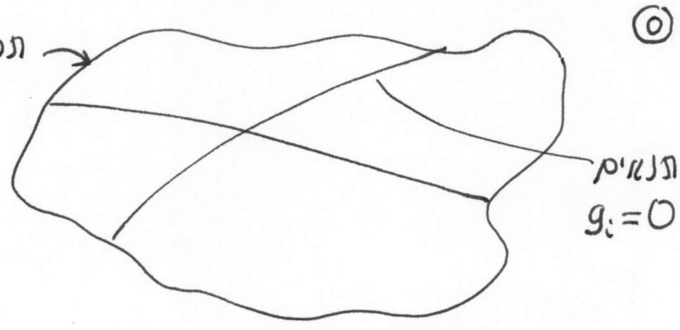
$a=\binom{1}{1}$, $b=\binom{1}{1}$

הפוכה ⇐ $g$ קיימת (גזירה ברציפות)

---

## דוגמאות של כפלי לגרנז'

(0) למצוא את המקסימום של $f$ בקבוצה $A$, עם תנאים $g_i=0$ :
$i=1,2,\dots k$




(א) תפתור את המשוואות:
$$\left.\begin{aligned} \nabla f &= \sum \lambda_i \nabla g_i \\ g_1 &= \cdots = g_k = 0 \end{aligned}\right\}$$
בפנים של $A$

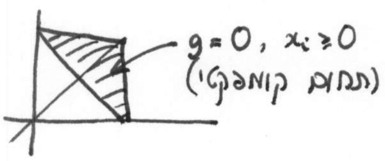
(ב) תמצוא את ערכים של $f$ בנקודות מ-(א)

(ג) תמצוא את המקסימום של $f$ בקבוצה $\partial A \cap \{g_i=0\}$
שפה של $A$

(ד) $\max((ב),(ג)) = \max\limits_A f\big|_{g_i=0}$

---

(1) תמצוא את המקסימום של $f(x_1,\dots,x_n)=x_1\cdots x_n$ כאשר $x_i$ לא שליליים וסכום $=n$.




$g(\underline{x})=\sum_{i=1}^n x_i - n \Rightarrow \nabla g = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$f(\underline{x})=\prod_{i=1}^n x_i \Rightarrow \nabla f = \begin{pmatrix} x_2\cdots x_n \\ \vdots \\ x_1\cdots x_{n-1} \end{pmatrix}$

$\nabla f = \lambda \nabla g \overset{x_i>0}{\Rightarrow} \left(\prod_{j=1}^n x_j\right)/x_i = \lambda$ לכל $i$

$\Rightarrow x_i = \frac{\prod_{j=1}^n x_j}{\lambda}$ לכל $i$

$g=0 \Rightarrow x_i=1$ לכל $i$ $\Rightarrow f=1$

בשפה של $A$, $f=0$ ⇐ מקסימום של $f = 1$

לכן $x_1\cdots x_n \leq 1$ לכל $x_i$ חיובי כך ש- $\sum_{i=1}^n x_i = n$.

⇐ לכל $y_i\geq 0$, $\frac{\left(\prod_{i=1}^n y_i\right)}{\left[\frac{1}{n}\sum y_j\right]^n} \leq 1 \Rightarrow \boxed{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n y_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i}$

$x_i = ny_i / \sum_{j=1}^n y_j$

② $\begin{cases} f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \\ g(x,y,z) = xyz-1 \end{cases}$ $\{g=0\}$ לא קומפקטי

$\nabla f = \begin{pmatrix}2x\\2y\\2z\end{pmatrix}$, $\nabla g = \begin{pmatrix} yz\\ xz\\ xy\end{pmatrix}$ $\xLeftarrow{\nabla f=\lambda\nabla g}$ $\begin{cases} 2x = \lambda yz \\ 2y = \lambda zx \\ 2z = \lambda xy \\ xyz = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = \frac{\lambda}{2} yz \\ 2y = \frac{\lambda^2}{2} yz^2 \\ 2z = \frac{\lambda^2}{2} y^2 z \\ x,y,z \neq 0 \end{cases}$

$\Leftarrow$ $x = \frac{\lambda}{2} yz = \pm\frac{2}{\lambda}$ , $y = \pm 2/\lambda$ , $z = \pm 2/\lambda$

$\xLeftarrow{xyz=1}$ $\lambda = \pm 2$

$\Leftarrow$ $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ , $f=3$ (מינימום)

($\sup f$ מקסימום $=\infty$)

---

③ $\underline{A}$ מטריצה ממשית , $A^T = A$

$\begin{cases} f(\underline{x}) = \underline{x}^T \underline{A}\underline{x} \\ g_0(\underline{x}) = \underline{x}^T\underline{x} - 1 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} \nabla f = 2\underline{A}\underline{x} \\ \nabla g_0 = 2\underline{x} \end{cases}$ $\xLeftarrow{\nabla f = \lambda \nabla g_0}$ $\underline{A}\underline{x} = \lambda \underline{x}$ (ערך עצמי) $\Leftarrow$ $f(\underline{x}) = \underline{x}^T\underline{A}\underline{x} = \lambda \underline{x}^T\underline{x} = \lambda$

$\{g_0 = 0\}$ קבוצה קומפקטית $\Leftarrow$ $\boxed{\max\left(\text{ערכים עצמיים של } A\right) = \max_{\|\underline{x}\|=1} (f(\underline{x}))}$

בנקודה $\underline{x}$ = וקטור עצמי

נסמן ב-$\lambda_1$ את הערך העצמי הגדול של $\underline{A}$.

נבחר את וקטור עצמי $\underline{x}_1$ עם ערך עצמי $=\lambda_1$, כך ש- $\|\underline{x}_1\|=1$

$\begin{cases} f(\underline{x}) = \underline{x}^T\underline{A}\underline{x} \\ g_0(\underline{x}) = \underline{x}^T\underline{x} - 1 \\ g_1(\underline{x}) = \underline{x}_1^T\underline{x} \end{cases}$ $\Leftarrow$ $\begin{cases} \nabla f = 2\underline{A}\underline{x} \\ \nabla g_0 = 2\underline{x} \\ \nabla g_1 = \underline{x}_1 \end{cases}$ $\xLeftarrow{\nabla f = \lambda\nabla g_0 + \mu \nabla g_1}$ $2\underline{A}\underline{x} = 2\lambda\underline{x} + \mu\underline{x}_1$

$\Leftarrow$ $\underbrace{2\underline{x}_1^T\underline{A}\underline{x}}_{=(\underline{x}_1\underline{A})^T\underline{x} = (\lambda_1\underline{x}_1)^T\underline{x} = 0} = 2\lambda\underbrace{\underline{x}_1^T\underline{x}}_{0} + \mu\underbrace{\underline{x}_1^T\underline{x}_1}_{1}$

$\Leftarrow$ $\mu = 0$

$\Leftarrow$ $\underline{A}\underline{x} = \lambda\underline{x}$ , $f = \lambda$

$\{g_0 = g_1 = 0\}$ קבוצה קומפקטית $\Leftarrow$ $\boxed{\max\left\{\lambda \,\middle|\, \begin{matrix}\text{קיים וקטור עצמי} \\ \underline{x} \perp \underline{x}_1 \text{ עם ערך עצמי } \lambda\end{matrix}\right\} = \max_{\substack{\|\underline{x}\|=1 \\ \underline{x}_1^T\underline{x}=0}} (f(\underline{x}))}$

יכול לבנות שקיים בסיס אורתוגונלי של וקטורים עצמיים של $\underline{A}$.
(ל- $\mathbb{R}^n$)

# פונקציות ממשיות בעלות השתנות חסומה

**הגדרה**

f פונקציה $[a,b]\to\mathbb{R}$, $T=\{t_i\}_{i=0}^{n}$ חלוקה, $a=t_0<t_1<\dots<t_n=b$ ⇐ $V_f(T)=\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|$

ההשתנות של f על החלוקה T (variation of f)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ⇐ $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup\{V_f(T) \mid T \text{ חלוקה של } [a,b]\}$

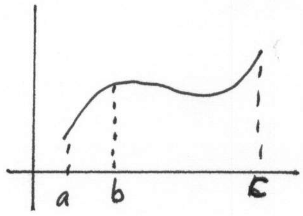
ההשתנות של f ב-$[a,b]$

$\overset{b}{\underset{a}{V}} f<\infty$ ⇔ f בעלת השתנות חסומה ב-$[a,b]$ (bounded variation)

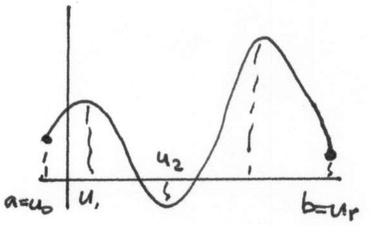
---

**דוגמאות**

(1) פונקציה מונוטונית ⇐ $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = V_f(T)=|f(b)-f(a)|$ לכל T

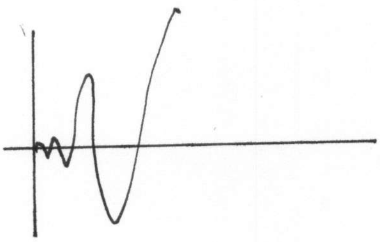



(2)




קיימים $\{u_i\}$ כך ש-f עולה בקטע $[u_{2i},u_{2i+1}]$
יורדת " $[u_{2i-1},u_{2i}]$
⇐ $\overset{b}{\underset{a}{V}} f=\sum_{i=1}^{r}|f(u_i)-f(u_{i-1})|$

(3)



$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{\pi}{2x} & 0<x\le 1\\ 0 & x=0\end{cases}$ ⇐ f לא בעלת השתנות חסומה ב-$[0,1]$

(4) f גזירה ברציפות ⇐ $\overset{b}{\underset{a}{V}} f=\int_a^b|f'(x)|\,dx$

# פונקציות ממשיות בעלות השתנות חסומה

**הגדרה** $f$ פונקציה $[a,b]\to\mathbb{R}$, $T=\{t_i\}_{i=0}^{n}$ חלוקה של $[a,b]$

$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$

$\Leftarrow\quad V_f(T)\equiv\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|$

ההשתנות של $f$ על $T$ (variation)

**הגדרה** $f$ פונקציה $[a,b]\to\mathbb{R}$ $\Leftarrow\quad \overset{b}{\underset{a}{V}} f\equiv\sup\{V_f(T)\mid T \text{ חלוקה של } [a,b]\}$

ההשתנות של $f$ ב-$[a,b]$

**הגדרה** $f$ נקראת פונקציה בעלת השתנות חסומה (Function of bounded variation) אמ"מ $\overset{b}{\underset{a}{V}} f<\infty$

---

**למה** $V_f(T\cup\{u\})\geq V_f(T)$ לכל $u\notin T$

**הוכחה** נניח ש- $t_{j-1}<u<t_j$

$$V_f(T\cup\{u\})=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|+|f(t_j)-f(u)|+|f(u)-f(t_{j-1})|$$

$$\geq\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|+|f(t_j)-f(t_{j-1})|$$

$$=V_f(T)$$

□

**מסקנה** $V_f(T')\geq V_f(T)$ לכל $T\subset T'$

**למה** $V_{\gimel\cdot f}(T)=|\gimel|\cdot V_f(T)$ לכל $\gimel\in\mathbb{R}$

פונקציה $(\gimel\cdot f)(x)=\gimel\cdot f(x)$, $\gimel$ קבוע

**למה** $V_{f+g}(T)\leq V_f(T)+V_g(T)$

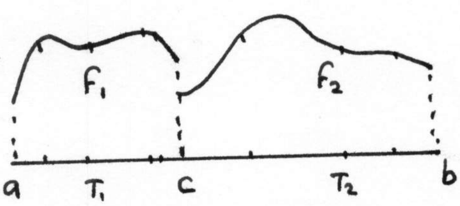
$f,g$ פונקציות $[a,b]\to\mathbb{R}$

**למה** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה, $a<c<b$

נסמן את $f|_{[a,c]}$ ו- $f|_{[c,b]}$ ב- $f_1$ ו- $f_2$.

אזי $V_{f_1}(T_1)+V_{f_2}(T_2)=V_f(T_1\cup T_2)$

כאשר $T_1,T_2$ חלוקות ב- $[a,c],[c,b]$




---

**משפט** $f,g$ פונקציות בעלות השתנות חסומה, $[a,b]\to\mathbb{R}$, $\gimel\in\mathbb{R}$

אזי $\gimel\cdot f$ ו- $f+g$ בעלות השתנות חסומה ו-

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}\gimel f=|\gimel|\cdot\overset{b}{\underset{a}{V}}f,\qquad \overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g)\leq\overset{b}{\underset{a}{V}}f+\overset{b}{\underset{a}{V}}g$$

$\gimel\cdot f(x)$ $\qquad f(x)+g(x)$

**משפט** $f$ פונקציה בעלת השתנות חסומה, $[a,b]\to\mathbb{R}$, $a<c<b$

אזי $f_1=f|_{[a,c]}$ ו- $f_2=f|_{[c,b]}$ פונקציות

בעלות השתנות חסומה ו-

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}f=\overset{c}{\underset{a}{V}}f_1+\overset{b}{\underset{c}{V}}f_2$$

**הוכחה**

($\geq$) לכל חלוקות $T_1,T_2$ של $[a,c],[c,b]$,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}f\geq V_f(T_1\cup T_2)=V_{f_1}(T_1)+V_{f_2}(T_2)$$

לכן $\overset{b}{\underset{a}{V}}f\geq\sup_{T_1,T_2}\left(V_{f_1}(T_1)+V_{f_2}(T_2)\right)=\overset{c}{\underset{a}{V}}f_1+\overset{b}{\underset{c}{V}}f_2$

($\leq$) לכל חלוקה $T$ של $[a,b]$, קיימות חלוקות $T_1,T_2$ של $[a,c],[c,b]$ כך ש- $T\cup\{c\}=T_1\cup T_2$

$$V_f(T)\leq V_f(T\cup\{c\})=V_{f_1}(T_1)+V_{f_2}(T_2)\leq\overset{c}{\underset{a}{V}}f_1+\overset{b}{\underset{c}{V}}f_2$$

לכן $\overset{b}{\underset{a}{V}}f=\sup_T V_f(T)\leq\overset{c}{\underset{a}{V}}f_1+\overset{b}{\underset{c}{V}}f_2$

□

# דוגמאות

(א) f פונקציה מונוטונית

$\Leftarrow \quad V_f(T) = |f(b)-f(a)|$

לכל חלוקה $T$

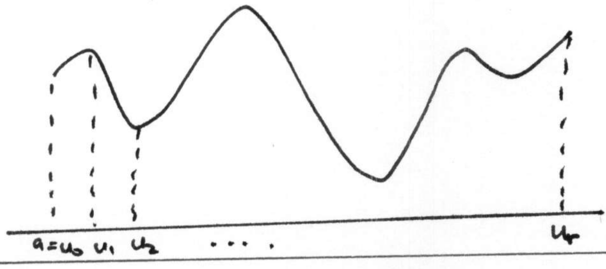
לכן $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = |f(b)-f(a)|$

(ב) $a=u_0<u_1<\cdots<u_r=b$

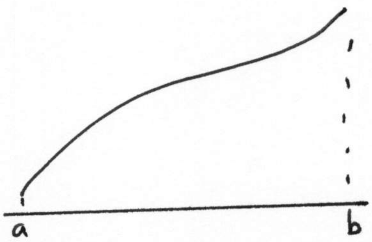
$f$ פונקציה $[a,b]\to\mathbb{R}$ כך ש-

$f|_{[u_{i-1},u_i]}$ פונק' מונוטונית, לכל $i=1,2,\dots r$

$$\Leftarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sum_{i=1}^{r} \overset{u_i}{\underset{u_{i-1}}{V}} f|_{[u_{i-1},u_i]} = \sum_{i=1}^{r} |f(u_i)-f(u_{i-1})|$$

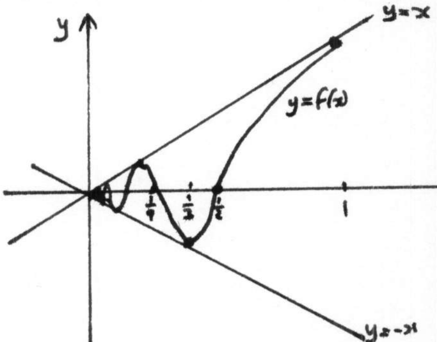



(ג)




(ד)

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{\pi}{2x} & 0<x\le 1 \\ 0 & x=0\end{cases}$$




$f'(x)=\sin\frac{\pi}{2x}-\frac{\pi}{2x}\cos\frac{\pi}{2x} \quad 0<x\le 1$

$\Leftarrow$ $f$ גזירה ברציפות ב- $(0,1]$

אבל $f$ לא גזירה ב- $x=0$

$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{\pi}{2h} \text{ לא קיים}\right)$$

| $r$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(\frac{1}{r})$ | 1 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $\frac{1}{5}$ |

$T=\{0,\frac{1}{n},\frac{1}{n-1},\cdots,\frac{1}{2},1\}$

$$V_f(T)=|f(\tfrac{1}{n})-f(0)|+\sum_{r=1}^{n-1}|f(\tfrac{1}{r})-f(\tfrac{1}{r+1})|$$

$$=|\tfrac{1}{n}\sin\tfrac{\pi n}{2}|+\sum_{r=1}^{n-1}|\tfrac{1}{r}\sin\tfrac{\pi r}{2}-\tfrac{1}{(r+1)}\sin\tfrac{\pi(r+1)}{2}|$$

$$=\frac{1}{n}\delta_{n\text{ odd}}+\underbrace{(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{5}+\cdots)}_{(n-1)\text{ איברים}}$$

$$=1+\sum_{r=1}^{[\frac{n-1}{2}]}\frac{2}{2r+1}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty}\infty$$

לכן $f$ אינה בעלת השתנות חסומה

**משפט** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות. אזי $f$ בעלת השתנות חסומה ו- $\overset{b}{\underset{a}{V}} f=\int_a^b|f'(x)|dx$

**הוכחה** לכל חלוקה $T$ של $[a,b]$. ($\ge$) $T=\{t_i\}_{i=0}^n$

$$V_f(T)=\sum_{i=1}^n|f(t_i)-f(t_{i-1})|$$

$$=\sum_{i=1}^n|f'(\xi_i)|\cdot(t_i-t_{i-1})$$

קיים $\xi_i\in(t_{i-1},t_i)$ כך ש- $f'(\xi_i)=\frac{f(t_i)-f(t_{i-1})}{t_i-t_{i-1}}$

$$\xrightarrow[\max|t_i-t_{i-1}|\to 0]{n\to\infty}\int_a^b|f'(u)|du \quad (*)$$

לכן $\overset{b}{\underset{a}{V}} f=\sup_T V_f(T)\ge\int_a^b|f'(x)|dx$

($\le$) אבל, לכל $T$, קיימות סדרה של חלוקות יותר עדינות מ- $T$

$T\subset T_1\subset T_2\subset\cdots$

כך ש- $n_k\to 0$, $\max_i|t_i^{(k)}-t_{i-1}^{(k)}|\to 0$

$$(*)\Leftarrow V_f(T)\underset{T\subset T_k}{\le}V_f(T_k)\xrightarrow{k\to\infty}\int_a^b|f'(u)|du$$

$\Leftarrow V_f(T)\le\int_a^b|f'(u)|du$ לכל $T$

$\Leftarrow \overset{b}{\underset{a}{V}} f=\sup_T V_f(T)\le\int_a^b|f'(u)|du$

□

## הגדרות  $X$ מרחב מטרי.

$f:[a,b]\to X$ פונקציה רציפה נקראת **מסילה**   curve

אם גם $f$ חח״ע , $f$ נקראת **מסילה פשוטה**   simple curve

$f(a)=f(b)$ ו- $f$ חח״ע על $[a,b)$, $f$ נקראת **מסילה סגורה פשוטה**   simple closed curve

אם $f(a)=f(b)$ , $f$ נקראת **מסילה סגורה**   closed curve

$X=\mathbb{R}^n$:

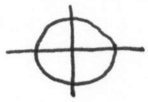
אם $f$ גזירה (ברציפות) , $f$ נקראת **מסילה גזירה (ברציפות)**   (continuously) differentiable curve

אם $f$ גזירה ברציפות ו- $f'(t)\neq 0$ לכל $t$, $f$ נקראת **מסילה חלקה**   smooth curve

---

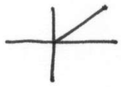
**דוגמאות**

① $f=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$, $t\in[0,2\pi]$



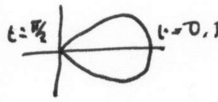
מסילה סגורה פשוטה

② $f=\begin{pmatrix}t\\ t\end{pmatrix}$, $t\in[0,1]$



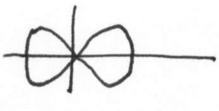
מסילה פשוטה , גזירה ברציפות , חלקה

③ $f=\begin{pmatrix}\cos^2 t\\ \sin t\cos^2 t\end{pmatrix}$, $t\in[0,\pi]$



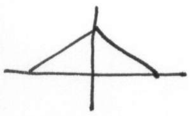

מסילה סגורה פשוטה
גזירה ברציפות
אינה חלקה.

④ $f=\begin{pmatrix}\sin t\\ \sin 2t\end{pmatrix}$, $t\in[0,2\pi]$



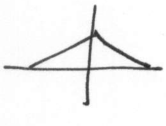
מסילה סגורה (לא פשוטה)
גזירה ברציפות , חלקה

⑤ $f=\begin{pmatrix}t\\ 1+t\end{pmatrix}$, $-1\le t\le 0$ ; $\begin{pmatrix}t\\ 1-t\end{pmatrix}$, $0\le t\le 1$



מסילה פשוטה
לא גזירה

⑥ $f=\begin{pmatrix}-t^2\\ 1-t^2\end{pmatrix}$, $-1\le t\le 0$ ; $\begin{pmatrix}t^2\\ 1-t^2\end{pmatrix}$, $0\le t\le 1$



מסילה פשוטה
גזירה ברציפות , לא חלקה

---

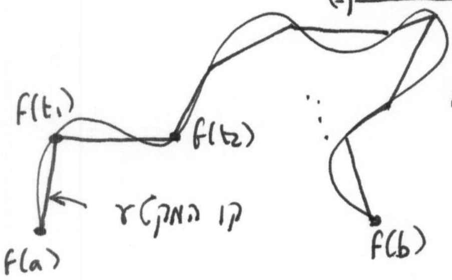
**הגדרה**  $\begin{cases} f:[a,b]\to X \\ g:[c,d]\to X\end{cases}$ נקראות **שקולות** אם קיימת $\phi:[a,b]\to[c,d]$ פונקציה רציפה מונוטונית עולה כך ש- $g(\phi(t))=f(t)$ לכל $t\in[a,b]$ .

(שינוי פרמטר)

**הגדרה** $f:[a,b]\to X$ מסילה.

$\sup\left\{\sum_{i=1}^{N} d(f(t_i),f(t_{i-1})) \,\middle|\, a=t_0<t_1<\dots<t_N=b\right\}$ נקרא **אורך המסילה** $f$, מסומן ב- $L(f)$.

($L(f)$ סופי $\Leftarrow$ $f$ **בעלת אורך**.)




**למה** $f$ גזירה ברציפה $\Leftarrow$ $L(f)=\int_a^b\|f'(t)\|dt$.

**הוכחה** $f'$ רציפה במ"ש. לכל $\varepsilon$ קיים $\delta>0$ כך ש- $\|f'(s)-f'(t)\|<\varepsilon$ לכל $|s-t|<\delta$.

$\Leftarrow$ $\left|\frac{f_j(s)-f_j(t)}{s-t}-f_j'(s)\right|<\varepsilon$ לכל $|s-t|<\delta$

$\Leftarrow$ $\left|\frac{\|f(s)-f(t)\|}{s-t}-\|f'(s)\|\right|<\varepsilon\sqrt{n}$ לכל $|s-t|<\delta$

$$\varepsilon\sqrt{n}(b-a)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon\sqrt{n}(t_i-t_{i-1})\geqslant\sum_{i=1}^{N}\begin{pmatrix}d(f(t_i),f(t_{i-1}))\\-(t_i-t_{i-1})\|f'(t_i)\|\end{pmatrix}\geqslant\left|\sum_{i=1}^{N}d(f(t_i),f(t_{i-1}))-\sum_{i=1}^{b}(t_i-t_{i-1})\|f'(t_i)\|\right| \Leftarrow$$

לכל $t_i$ כך ש- $\sup|t_i-t_{i-1}|<\delta$

$$L(f)=\lim_{\max|t_i-t_{i-1}|\to 0}\sum_{i=1}^{N}(t_i-t_{i-1})\|f'(t_i)\|=\int_a^b\|f'(t)\|dt \Leftarrow$$

□

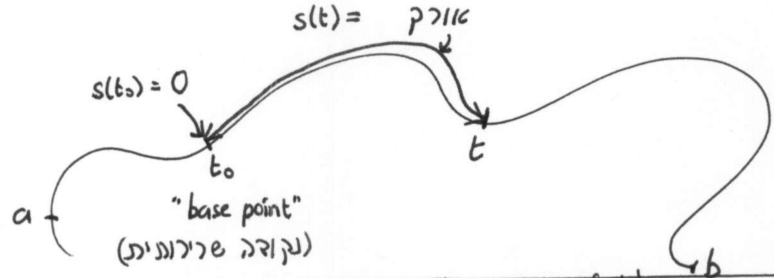
---

**הגדרה** פרמטר האורך הוא $s=\int_{t_0}^{t}\|f'(t)\|dt$ (פונקציה מונוטונית עולה ורציפה)

**הערה**: $\frac{ds}{dt}=\|f'(t)\|$ , $\left\|\frac{df}{ds}\right\|=1$.

**דוגמא** $f(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $f'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $\|f'(t)\|=1$ ו- $s=t$ (+קבוע)

**דוגמא** $f(t)=\begin{pmatrix}t\\ t^2\\ \frac{2}{3}t^3\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $f'(t)=\begin{pmatrix}1\\ 2t\\ 2t^2\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $\|f'(t)\|=1+2t^2$ $\Leftarrow$ $s=\int_0^t(1+2t^2)dt$
$=t+\frac{2}{3}t^3$.




---

**הגדרה** $A\subset\mathbb{R}^n$. פונקציה $f:A\to\mathbb{R}^n$ היא נקראת **שדה וקטורי** (vector field)

**האינטגרל של $f$ על מסילה** (line integral) $\gamma:[a,b]\to A$ הוא

מכפלה פנימית

$$\boxed{\int_\gamma \underline{f}\cdot d\underline{s}\equiv\int_a^b \underline{f}\,\underline{\gamma}'\,dt \ \ (\text{יש סימון } \int_\gamma\sum f_j dx_j) \equiv \int_a^b \underline{f}(\underline{\gamma}(t))\cdot\underline{\gamma}'(t)dt}$$

**דוגמא** $\gamma(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ , $f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+y^2\\ x\end{pmatrix}$
$0\le t\le 2\pi$

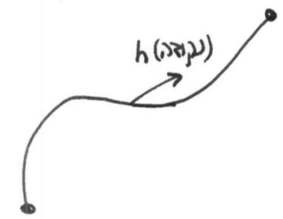
$\Leftarrow$ $\gamma'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$ , $f(\gamma(t))=\begin{pmatrix}1+\sin^2 t\\ \cos t\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $\int_\gamma f_1dx+f_2dy=\int_0^{2\pi}(1+\sin^2 t)(-\sin t)+(\cos t)(\cos t)\,dt$

$=\int_0^{2\pi}-2\sin t+\sin t\cos^2 t+\cos^2 t\,dt=\underline{\pi}$

**הערה** אם $\left.\begin{array}{l} h: A \to \mathbb{R}^n \text{ שדה וקטורי (פונקי' ממשונות עולה)} \\ g(t) = f(\alpha(t)) \end{array}\right\}$ כאשר $\alpha: [a,b] \to [c,d]$ ($f,\alpha$ גזירות ברציפות)

אז

$$\int_a^b h(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = \int_g \underline{h} \cdot d\underline{s}$$

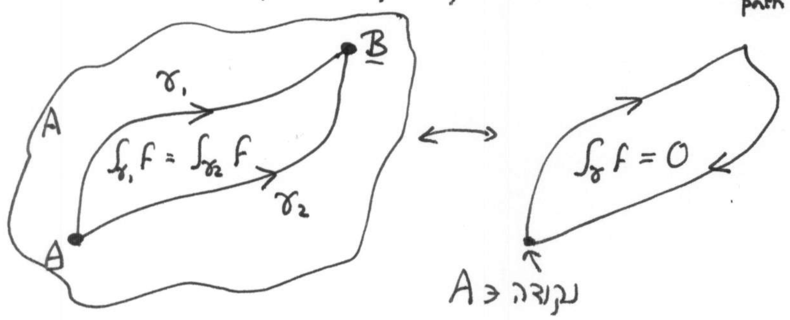



$$\int_a^b h(f(\alpha(t))) \cdot f'(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt \overset{\text{כלל}}{\underset{\text{שרשרת}}{=}}$$

$$\int_f h = \int_c^d h(f(u)) \cdot f'(u)\,du \overset{u=\alpha(t)}{=}$$

---

**הגדרה** שדה וקטורי רציף $f: A \to \mathbb{R}^n$ (פתוחה; $A$ – קבוצה קשירה מסילתית, path connected set) נקרא <u>שדה משמר</u> (conservative field) אם"ם $\int_\gamma f$ תלוי רק בנקודות קצות $\gamma(a), \gamma(b)$.



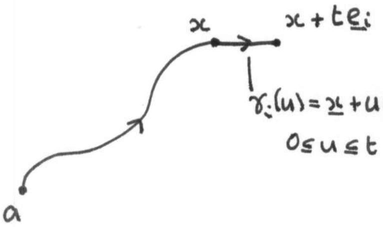

אם"ם $\int_\gamma f = 0$ לכל מסילה $\gamma$ בעלת אורך.

$f$ שדה משמר $\Leftarrow$ נגדיר את $\phi: A \to \mathbb{R}$ ע"י

נבחור נקודה $a \in A$

<u>פונקצית פוטנציאל</u> (potential function) $\to \phi(x) = \int_\gamma f$ ($\gamma$ – מסילה מ-$a$ ל-$x$)

**למה** $\boxed{\nabla \phi = f}$ (grad $\phi$)




**הוכחה**

$$\begin{aligned} \partial\phi/\partial x_i &= \lim_{t\to 0} \frac{\phi(\underline{x}+t\underline{e}_i) - \phi(\underline{x})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_{\gamma_i} \underline{f} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t \underline{f}(\underline{x}+u\underline{e}_i) \cdot \underline{e}_i\,du \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_0^t f_i(\underline{x}+u\underline{e}_i)\,du \\ &= f_i(\underline{x}) \end{aligned}$$

(רציפות $f_i$)

□

---

$\left\{\begin{array}{l} f: A \to \mathbb{R}^n \text{ שדה וקטורי} \\ \text{פתוחה, קשירה מסילתית} \\ g: A \to \mathbb{R} \text{ גזירה} \end{array}\right.$ $\Leftarrow$ $g$ נקראת <u>פונקצית פוטנציאל</u> אם"ם $\nabla g = f$.

$f$ שדה משמר $\overset{\text{קיימת } g}{\Updownarrow}$ ; $\Downarrow$ $\not\Uparrow$ $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$

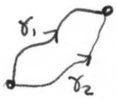
**דוגמא** $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y/(x^2+y^2) \\ x/(x^2+y^2) \end{pmatrix} \Leftarrow \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = \dfrac{\partial f_1}{\partial y}$

אבל $\int_\gamma f = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \neq 0 \Rightarrow f$ אינו משמר.

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$, $f(\gamma(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

קבוצה פתוחה וקשירה מסילתית $A\subset\mathbb{R}^n$

שדה וקטורי $f: A\to\mathbb{R}^n$



$\int_\gamma \underline{f}\cdot d\underline{s}$ תלוי רק בנקודות קצה של $\gamma$

($\gamma$ מסילה ב-$A$) [הגדרה]

$\Updownarrow$

$\int_\gamma \underline{f}\cdot d\underline{s}=0$ ($\gamma$ מסילה סגורה ב-$A$)

$\Updownarrow$

קיימת פונקציה פוטנציאל $\phi$

$f_i=\partial\phi/\partial x_i$ לכל $i$

$\boxed{\underline{f} \text{ שדה וקטורי משמר}}$ (גלובלית)

$$\int_{\gamma^0}\underline{f}\cdot d\underline{s}=\int_{\gamma^1}\underline{f}\cdot d\underline{s}$$

($\gamma^0,\gamma^1$ מסילות סגורות ושקולות הומוטופיה)

$\Updownarrow$

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ לכל $i,j$

[הגדרה]

$\boxed{\underline{f} \text{ שדה וקטורי משמר לוקלית}}$

$\Leftarrow$

$\not\Rightarrow$

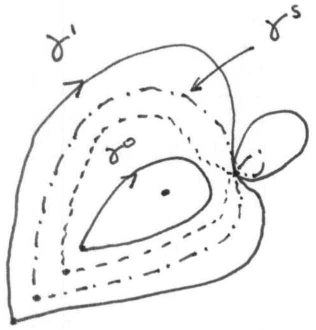
---

$(t\ ,\ s)\mapsto H(t,s)$

תהי $H$ פונקציה $H:[a,b]\times[0,1]\to A$ כך ש- $H(a,s)=H(b,s)$ לכל $s$

גזירה פעמיים ברציפות

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial s}=\frac{\partial^2 H}{\partial s\partial t}$$



אז לכל $s\in[0,1]$, אנו יכולים להגדיר מסילה $\gamma^s:[a,b]\to A$

$t\longmapsto H(t,s)$

$\Leftarrow$ $\gamma^s$ מסילה סגורה וגזירה ברציפות

$H$ נקראת <u>הומוטופיה</u> מ-$\gamma^0$ ל-$\gamma^1$

---

**<u>משפט</u>**

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ לכל $i,j$

$H:[a,b]\times[0,1]\to A$ הומוטופיה מ-$\gamma^0$ ל-$\gamma^1$

$$\Rightarrow\ \int_{\gamma^0}\underline{f}\cdot d\underline{s}=\int_{\gamma^1}\underline{f}\cdot d\underline{s}$$

<u>הוכחה</u>

$$\frac{d}{ds}\left(\int_{\gamma^s}\underline{f}\cdot d\underline{s}\right)=\frac{d}{ds}\left(\int_a^b \underline{f}(H(t,s))\underbrace{\cdot}_{\text{מכפלה פנימית}}\frac{\partial H}{\partial t}\,dt\right)$$ (הגדרה של $\int_{\gamma^s}$)

$$=\int_a^b\frac{\partial}{\partial s}\left(\underline{f}(H(t,s))\cdot\frac{\partial H}{\partial t}\right)dt$$ ($\underline{f}(H(t,s))\cdot\frac{\partial H}{\partial t}$ גזירה ברציפות)

$$=\int_a^b\frac{\partial}{\partial s}\left(\underline{f}(H(t,s))\right)\cdot\frac{\partial H}{\partial t}+\underline{f}(H(t,s))\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial s\partial t}\,dt$$

$$=\int_a^b\left(D_f(H(t,s))\cdot\frac{\partial H}{\partial s}\right)^T\underbrace{\ }_{\text{מכפלה מטריצה}}\frac{\partial H}{\partial t}+f(H(t,s))\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial s\partial t}\,dt$$ (כלל השרשרת)

$$=\int_a^b\left(\frac{\partial H}{\partial s}\right)^T\cdot\left(D_f(H(t,s))\cdot\frac{\partial H}{\partial t}\right)+f(H(t,s))\cdot\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial s}\,dt$$

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ לכל $i,j$ $\Downarrow$ $D_f(\underline{x})$ מטריצה סימטרית

$$=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial H}{\partial s}\cdot f(H(t,s))\right)dt$$ (כלל השרשרת)

$$=\left[\frac{\partial H}{\partial s}\cdot f(H(t,s))\right]_{t=a}^{t=b}$$

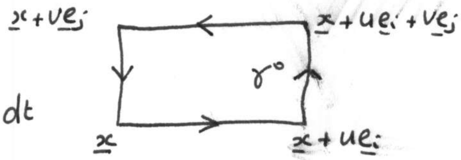
$$=\frac{d}{ds}(H(b,s))\cdot f(H(b,s))-\frac{d}{ds}(H(a,s))\cdot f(H(a,s))=0$$ ($H(a,s)=H(b,s)$)

לכל $s$: $\int_{\gamma^s}\underline{f}\cdot d\underline{s}$ לא תלוי ב-$s$ $\Leftarrow$ $\int_{\gamma^0}\underline{f}\cdot d\underline{s}=\int_{\gamma^1}\underline{f}\cdot d\underline{s}$ □

**משפט** $\int_{\gamma^0} \underline{f}\cdot d\underline{s} = \int_{\gamma^1} \underline{f}\cdot d\underline{s}$ לכל הומוטופיה מ-$\gamma^0$ ל-$\gamma^1$ ולכל מסילות סגורות $\gamma^0, \gamma^1$ $\Leftarrow$ $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ לכל $i,j$

**הוכחה** תהי $\underline{x}$ נקודה ב-$A$. קיים $0<r$ כך ש- $A \supseteq \{\underline{y} \mid \max|y_k - x_k| < r\}$ (A פתוחה)

$$0 = \int_{\gamma^1} \underline{f}\cdot d\underline{s} = \int_{\gamma^0} \underline{f}\cdot d\underline{s} = \int_0^u f_i(\underline{x}+t\underline{e}_i)\,dt + \int_0^v f_j(\underline{x}+u\underline{e}_i+t\underline{e}_j)\,dt - \int_0^u f_i(\underline{x}+v\underline{e}_j+t\underline{e}_i)\,dt - \int_0^v f_j(\underline{x}+t\underline{e}_j)\,dt$$




מסילה קבועה=$\gamma^1$

$$\int_0^v \left(f_j(\underline{x}+u\underline{e}_i+t\underline{e}_j) - f_j(\underline{x}+t\underline{e}_j)\right)dt = \int_0^u f_i(\underline{x}+v\underline{e}_j+t\underline{e}_i) - f_i(\underline{x}+t\underline{e}_i)\,dt$$

$$\frac{1}{v}\int_0^v \underbrace{\frac{f_j(\underline{x}+u\underline{e}_i+t\underline{e}_j) - f_j(\underline{x}+t\underline{e}_j)}{u}}_{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\underline{x}+\xi\underline{e}_i+t\underline{e}_j)}dt = \frac{1}{u}\int_0^u \underbrace{\frac{f_i(\underline{x}+v\underline{e}_j+t\underline{e}_i) - f_i(\underline{x}+t\underline{e}_i)}{v}}_{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{x}+\eta\underline{e}_j+t\underline{e}_i)}dt \quad \Leftarrow \quad \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \text{ רציפה}$$

כאשר $0<\xi<u$ (תלוי ב-$t$)   כאשר $0<\eta<v$ (תלוי ב-$t$)

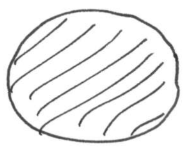
$$\partial f_j/\partial x_i\,(\underline{x}) = \partial f_i/\partial x_j\,(\underline{x}) \quad \xleftarrow[u,v\to 0]{\text{כאשר}}$$

$\square$

---

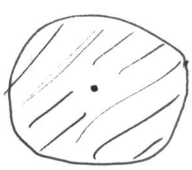
**מסקנה** אם לכל מסילה סגורה ב-$A$, קיימת הומוטופיה למסילה קבועה (אומרים ש-$A$ simply connected)
אזי כל שדה וקטורי משמר לוקלי על $A$, גם הוא שדה וקטורי משמר (גלובלי)

**דוגמאות**



דיסק $\subset \mathbb{R}^2$

כן



דיסק - נקודה $\subset \mathbb{R}^2$

לא

$\underline{f} = \begin{pmatrix} -y/(x^2+y^2) \\ x/(x^2+y^2) \end{pmatrix}$

$\int_{\gamma^0} \underline{f}\cdot d\underline{s} = 2\pi$

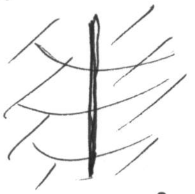
כדור - נקודה $\subset \mathbb{R}^3$

כן

$\underline{f} = \begin{pmatrix} x/(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \\ y/(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \\ z/(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \end{pmatrix}$

$\underline{f} = \operatorname{grad}\phi$

$\phi = -1/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$



$\mathbb{R}^3 \supseteq \mathbb{R}^3 -$ (קו ישר)

לא

$\underline{f} = \begin{pmatrix} -y/(x^2+y^2) \\ x/(x^2+y^2) \\ 1 \end{pmatrix}$

$\int_{\gamma^1} \underline{f}\cdot d\underline{s} = 2\pi$

---

ב-$\mathbb{R}^2$, $\underline{f}\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} -y/(x^2+y^2) \\ x/(x^2+y^2) \end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ $\Leftarrow$ $\underline{f}$ שדה וקטורי משמר לוקלי

**משפט** תהי $\gamma$ מסילה ב-$\mathbb{R}^2\setminus\{\underline{0}\}$. אזי קיימות פונקציות רציפות $r(t)$ ו-$\theta(t)$ כך ש-
$\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2\setminus\{\underline{0}\}$

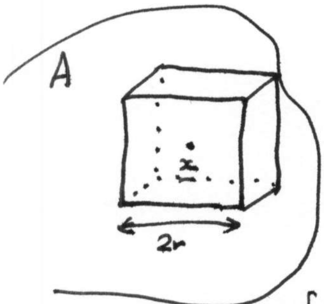
$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\theta(t) \\ r(t)\sin\theta(t) \end{pmatrix} \quad \text{לכל } a\le t\le b$$

וגם

$$\theta(b) - \theta(a) = \int_\gamma \underline{f}\cdot d\underline{s}$$

משפט $\underline{f}:A\to\mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות, $A$ קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^n$

לכל $\int_{\gamma_0}\underline{f}\cdot d\underline{s}=\int_{\gamma_1}\underline{f}\cdot d\underline{s}$ מסילות סגורות $\gamma_0$ ו- $\gamma_1$ שקולות תחת הומוטופיה $\Leftarrow$ $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ לכל $i,j$ ב- $\{1,2,\dots,n\}$ (ובכל נקודה ב- $A$)



הוכחה תהי $\underline{x}\in A$.

$A$ פתוחה $\Leftarrow$ קיים $r>0$ כך ש- $A\supseteq B_\infty(\underline{x},r)$ לפי נורמה $\|\cdot\|_\infty$

$$B_\infty(\underline{x},r)=\{\underline{u}\in\mathbb{R}^n \mid |u_i-x_i|<r,\ \text{לכל } i\}$$

נניח ש- $i\neq j$ ו- $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$.

לכל $u,v\in\mathbb{R}$, $|u|,|v|<r$, אנו יכולים להגדיר מסילה $\gamma$ ע"י:

$$\gamma:[0,4]\longrightarrow A$$

$$\gamma(t)=\begin{cases}\underline{x}+tu\underline{e}_i & 0\le t<1\\ \underline{x}+u\underline{e}_i+(t-1)v\underline{e}_j & 1\le t<2\\ \underline{x}+(3-t)u\underline{e}_i+v\underline{e}_j & 2\le t<3\\ \underline{x}+(4-t)v\underline{e}_j & 3\le t<4\end{cases}$$

* $\gamma$ מסילה סגורה (כי $\underset{\text{סגורה}}{\gamma(0)=\gamma(4)}$, $\underbrace{\gamma(1)=\gamma(1-),\ \gamma(2)=\gamma(2-),\ \gamma(3)=\gamma(3-)}_{\text{רציפות}}$)

* קיימת הומוטופיה ב- $A$ מ- $\underset{\text{קבועה ב-}\underline{x}}{\gamma_0}$ ל- $\gamma_1=\gamma$ כאשר

$$H(t,s)=\underline{x}+s(\gamma(t)-\underline{x})\in A$$

$s=0\Rightarrow H(t,0)=\underline{x}$

$s=1\Rightarrow H(t,s)=\gamma(t)$

$$H:[0,4]\times[0,1]\longrightarrow A$$

$\overset{\text{תנאים}}{\Leftarrow}$ במשפט
$$\int_{\gamma_0}\underline{f}\cdot d\underline{s}=\int_{\gamma_1}\underline{f}\cdot d\underline{s}$$

$\int_{\gamma_0}\underline{f}\cdot d\underline{s}=0$ (כי $\gamma_0$ מסילה קבועה)

$$\int_{\gamma_1}\underline{f}\cdot d\underline{s}=\begin{pmatrix}\int_0^1\underline{f}(\underline{x}+tu\underline{e}_i)\cdot u\underline{e}_i\,dt\\ +\int_1^2\underline{f}(\underline{x}+u\underline{e}_i+(t-1)v\underline{e}_j)\cdot v\underline{e}_j\,dt\\ +\int_2^3\underline{f}(\underline{x}+(3-t)u\underline{e}_i+v\underline{e}_j)\cdot(-u\underline{e}_i)\,dt\\ +\int_3^4\underline{f}(\underline{x}+(4-t)v\underline{e}_j)\cdot(-v\underline{e}_j)\,dt\end{pmatrix}\ \begin{matrix}\\ \xrightarrow{t\leftarrow t-1}\\ \xrightarrow{t\leftarrow 3-t}\\ \xrightarrow{t\leftarrow 4-t}\end{matrix}\ \begin{pmatrix}u\int_0^1 f_i(\underline{x}+tu\underline{e}_i)\,dt\\ +v\int_0^1 f_j(\underline{x}+u\underline{e}_i+tv\underline{e}_j)\,dt\\ -u\int_0^1 f_i(\underline{x}+tu\underline{e}_i+v\underline{e}_j)\,dt\\ -v\int_0^1 f_j(\underline{x}+tv\underline{e}_j)\,dt\end{pmatrix}$$

לכן, לכל $u,v$ $(|u|,|v|<r)$: $\times\frac{1}{uv}$

$$\underbrace{\int_0^1\frac{f_j(\underline{x}+u\underline{e}_i+tv\underline{e}_j)-f_j(\underline{x}+tv\underline{e}_j)}{u}\,dt}=\underbrace{\int_0^1\frac{f_i(\underline{x}+tu\underline{e}_i+v\underline{e}_j)-f_i(\underline{x}+tu\underline{e}_i)}{v}\,dt}$$

משפט הערך הממוצע $\Rightarrow$ $= \partial f_j/\partial x_i(\underline{x}+\eta u\underline{e}_i+tv\underline{e}_j)$ ; $= \partial f_i/\partial x_j(\underline{x}+tu\underline{e}_i+\xi v\underline{e}_j)$

כאשר $\eta\in(0,1)$ נתלוי ב- $t,u,v$ ; כאשר $\xi\in(0,1)$ נתלוי ב- $t,u,v$

רציפות של $\partial f_j/\partial x_i$ בנקודה $\underline{x}$ ; רציפות של $\partial f_i/\partial x_j$ בנקודה $\underline{x}$

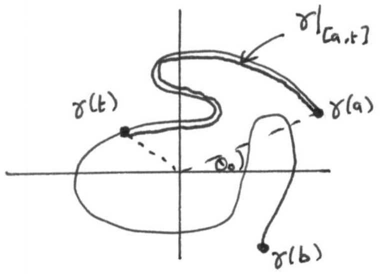
כאשר $u,v\to 0$,
$$\partial f_j/\partial x_i(\underline{x})=\partial f_i/\partial x_j(\underline{x})$$

$\square$

<u>הוכחה</u> נגדיר את $r(t)$ ע"י $r(t)=\|\gamma(t)\| \Leftarrow r:[a,b]\to\mathbb{R}^+$ פונקציה רציפה

נבחור את $\theta_0$ כך ש- $\gamma(a)=\begin{pmatrix} r(a)\cos\theta_0 \\ r(a)\sin\theta_0\end{pmatrix}$

נגדיר את $\theta(t)$ ע"י $\theta(t)=\theta_0+\int_{\gamma|_{[a,t]}} \underline{f}\cdot d\underline{s}$




$\gamma(t)=\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$

$\bullet \equiv d/dt$

אזי $\theta(t)=\theta_0+\int_a^t \frac{-y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}}{x^2+y^2}dt \Rightarrow \dot\theta(t)=\frac{-y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}}{x^2+y^2}$

$r(t)^2=x(t)^2+y(t)^2 \xRightarrow{d/dt} r\dot r = x\dot x+y\dot y$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{\dot x r - x\left(\frac{x\dot x+y\dot y}{r}\right)}{r^2}=\frac{\dot x r^2-x^2\dot x-xy\dot y}{r^3}=\frac{y}{r}\cdot\frac{y\dot x-x\dot y}{r^2}=-\frac{y}{r}\dot\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{r}\right)=\frac{\dot y r - y\left(\frac{x\dot x+y\dot y}{r}\right)}{r^2}=\frac{\dot y r^2-xy\dot x-y^2\dot y}{r^3}=\frac{x}{r}\cdot\frac{x\dot y-y\dot x}{r^2}=\frac{x}{r}\dot\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{x}{r}-\cos\theta\right)^2+\left(\frac{y}{r}-\sin\theta\right)^2\right)=2\left(\frac{x}{r}-\cos\theta\right)\left(-\frac{y}{r}\dot\theta+\dot\theta\sin\theta\right)+2\left(\frac{y}{r}-\sin\theta\right)\left(\frac{x}{r}\dot\theta-\dot\theta\cos\theta\right)=0 \Leftarrow$$

$$\begin{cases}\frac{x}{r}=\cos\theta\\ \frac{y}{r}=\sin\theta\end{cases} \Leftarrow \left(\frac{x}{r}-\cos\theta\right)^2+\left(\frac{y}{r}-\sin\theta\right)^2 = \underset{\text{(לא תלוי ב-t)}}{\text{קבוע}} \underset{\substack{t=a\\ \theta=\theta_0}}{=} 0 \quad \Leftarrow$$

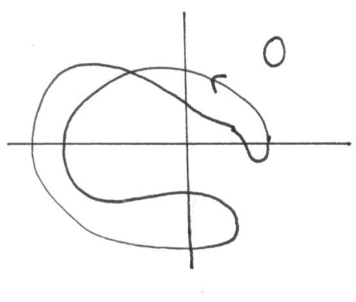
□

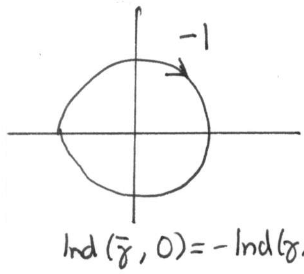
<u>מסקנה</u>: תהי $\gamma$ מסילה סגורה ב-$\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

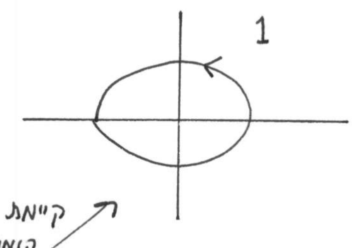
אזי $\underset{\text{מספר שלם}}{\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \underline{f}\cdot d\underline{s} \in \mathbb{Z}}$ נסמן ב- $\boxed{\mathrm{Ind}(\gamma,0)}$ אינדקס, winding number, מספר סיבובים

<u>הוכחה</u> $\begin{cases}\gamma(a)=\gamma(b)\\ \gamma(t)=\begin{pmatrix} r(t)\cos\theta(t)\\ r(t)\sin\theta(t)\end{pmatrix}\end{cases} \Rightarrow \theta(b)-\theta(a) = 2\pi\cdot$ מספר שלם $\Rightarrow \frac{1}{2\pi}\int \underline{f}\cdot d\underline{s} = \theta(b)-\theta(a)$ = מספר שלם

□



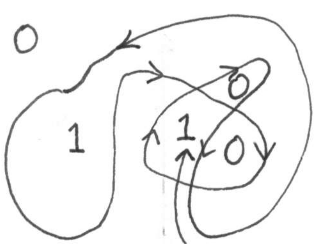



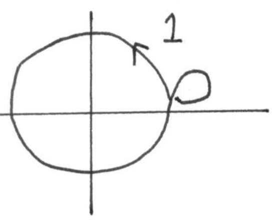



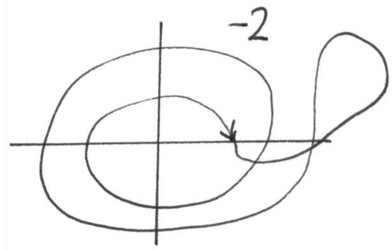

$\mathrm{Ind}(\tilde\gamma,0)=-\mathrm{Ind}(\gamma,0)$

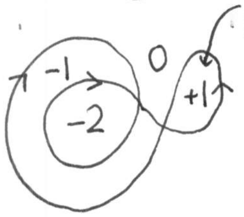
($\tilde\gamma = \gamma$ בכיוון הפוך)

קיימת הומוטופיה




<u>מסקנה</u>: אם $\gamma_1,\gamma_2$ מסילות סגורות ב-$\mathbb{R}^2\setminus\{\underline{0}\}$, שקולות תחת הומוטופיה

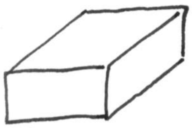
אזי $\mathrm{Ind}(\gamma_1,0)=\mathrm{Ind}(\gamma_2,0)$.

# אינטגרציה של פונקציות על $\mathbb{R}^n$

<u>תיבה סגורה</u> ב-$\mathbb{R}^n$: $S=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]=\{\underline{x}=(x_1,\dots,x_n) \mid a_i\le x_i\le b_i, \text{ לכל } i\}$

<u>תיבה פתוחה</u> ב-$\mathbb{R}^n$: $S=(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_n,b_n)=\{\underline{x}=(x_1,\dots,x_n) \mid a_i< x_i< b_i, \text{ לכל } i\}$

<u>הנפח</u> (volume) <u>של תיבה</u> מוגדר ע"י: $v(S)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$

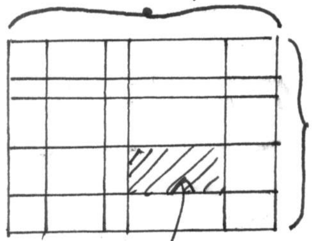


<u>חלוקה של הקטע</u> $[a,b]$: $(a=t_0<t_1<\cdots<t_N=b)$ $\quad P=(t_0,\dots,t_N)$

<u>חלוקה</u> (partition) <u>של התיבה</u> $A=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$: $P=P_1\times\cdots\times P_n$ ($P_i=$ חלוקה של $[a_i,b_i]$)

<u>הפירוק</u> (decomposition) של $A$ מוגדר ע"י החלוקה $P$:

חלוקה של $[a_1,b_1]$



חלוקה של $[a_2,b_2]$

תת-תיבה

$$\text{תת-תיבה}=[t^{(1)}_{\alpha_1-1},t^{(1)}_{\alpha_1}]\times[t^{(2)}_{\alpha_2-1},t^{(2)}_{\alpha_2}]\times\cdots\times[t^{(n)}_{\alpha_n-1},t^{(n)}_{\alpha_n}]$$

כאשר $1\le\alpha_i\le N^{(i)}$ לכל $i$

ו- $P_i=(a_i=t_0^{(i)}<t_1^{(i)}\cdots<t^{(i)}_{N^{(i)}}=b_i)$

נסמן ב-$\mathcal{S}_P$ את הקבוצה של תת-תיבות הנ"ל.

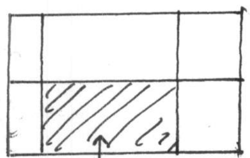
$f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה

<u>הסכום התחתון</u> (lower sum) של $f$ ביחס ל-$P$: $L(f,P)=\sum_{S\in\mathcal{S}_P}\left(\inf_{x\in S}f(x)\right)\cdot v(S)$

<u>הסכום העליון</u> (upper sum) של $f$ ביחס ל-$P$: $U(f,P)=\sum_{S\in\mathcal{S}_P}\left(\sup_{x\in S}f(x)\right)\cdot v(S)$

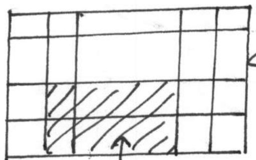
<u>העדנה</u> (refinement) <u>של חלוקה</u> $P$: היא חלוקה $P'$ כך שלכל $S\in\mathcal{S}_P$, $\quad S=\bigcup_{S_i'\in\underbrace{\mathcal{S}^{(S)}_{P'}}_{\text{תת-קבוצה של } \mathcal{S}_{P'}}}S_i'$ (או $S=S_1'\cup\cdots\cup S_j'$)

$P$



$S\in\mathcal{S}_P$

$P'$



איחוד של כמה איברים של $\mathcal{S}_{P'}$

<u>למה</u> $P'$ העדנה של חלוקה $P$ $\Leftarrow$ $\begin{cases}L(f,P)\le L(f,P')\\ U(f,P)\ge U(f,P')\end{cases}$

<u>הוכחה</u> $S\in\mathcal{S}_P$ $\Leftarrow$ $S=S_1'\cup\cdots\cup S_j'$ כאשר $S_i'\in\mathcal{S}_{P'}$

$$\Leftarrow\begin{cases}v(S)=\sum_{i=1}^{j}v(S_i')\\ \inf_S f(x)\le\inf_{S_i'}f(x)\\ \sup_S f(x)\ge\sup_{S_i'}f(x)\end{cases}\xRightarrow{\sum}\begin{cases}\left(\inf_S f(x)\right)v(S)\le\sum_{i=1}^{j}\left(\inf_{S_i'}f(x)\right)v(S_i')\\ \left(\sup_S f(x)\right)v(S)\ge\sum_{i=1}^{j}\left(\sup_{S_i'}f(x)\right)v(S_i')\end{cases}\xRightarrow{\sum}\begin{cases}L(f,P)\le L(f,P')\\ U(f,P)\ge U(f,P')\end{cases}$$

$\square$

<u>מסקנה</u> $P,P'$ חלוקות של $A$ $\Leftarrow$ $L(f,P)\le U(f,P')$

<u>הוכחה</u> תהי $P''=$ העדנה משותפת של $P$ ו- $P'$

אז $\quad L(f,P)\underset{\text{למה}}{\le}L(f,P'')\le U(f,P'')\underset{\text{למה}}{\le}U(f,P')$

$\square$

**הגדרה** תהי $f: A \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. (תיבה ב-$\mathbb{R}^n$)

$\sup_{P} L(f,P) \equiv \underline{\int}_A f =$ האינטגרל התחתון של $f$ על $A$ (חלוקות $P$)

$\inf_{P} U(f,P) \equiv \overline{\int}_A f =$ האינטגרל העליון של $f$ על $A$ (חלוקות $P$)

$f$ נקראת אינטגרבילית לפי Riemann על $A$, אם"ם $\underline{\int}_A f = \overline{\int}_A f$

**הערה**

$$\overline{\int}_A f - \underline{\int}_A f = \inf_P U(f,P) - \sup_{P'} L(f,P')$$
$$= \inf_{P,P'} \left(U(f,P) - L(f,P')\right) \overset{\text{מסקנה}}{=} \inf_{P''} \left(U(f,P'') - L(f,P'')\right)$$

לכן $\boxed{f \text{ אינטגרבילית אם"ם } \inf_P (U(f,P)-L(f,P))=0}$

**דוגמאות** ① $f$ פונקציה קבועה על $A$ $\Leftarrow$ $f$ אינטגרבילית

② $A=[0,1]\times[0,1]$, $f: A \to \mathbb{R}$
$$f(x,y)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$
$\Leftarrow$ $\left.\begin{array}{l}L(f,P)=0\\ U(f,P)=1\end{array}\right\}$ $\Leftarrow$ $\left.\begin{array}{l}\underline{\int}_A f = 0\\ \overline{\int}_A f = 1\end{array}\right\}$

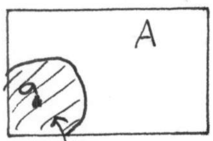
$f$ לא אינטגרבילית

---

**הגדרה** תהי $f: A \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה, $a\in A$.

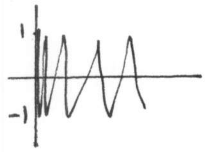
התנודה (oscillation) של $f$ בנקודה $a$, היא $o(f,a) = \lim_{\delta\to 0} \underbrace{(\sup - \inf)_{A\cap B(a,\delta)} f(x)}$

"התנודה" של $f$ ב- $A\cap B(a,\delta)$

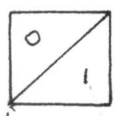



**דוגמאות** ① $f$ רציפה ב- $a$ אם"ם $o(f,a)=0$

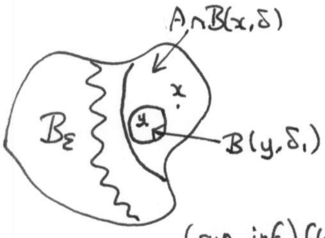
② $f: [0,1] \to \mathbb{R}$
$$x \longmapsto \begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x>0\\ 0 & x=0\end{cases}$$
$\Leftarrow$ $o(f,a) = \begin{cases}0 & a>0\\ 2 & a=0\end{cases}$




③ $f: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases}0 & x<y\\ 1 & x\geq y\end{cases}$$
$\Leftarrow$ $o(f,\underline{a}) = \begin{cases}0 & a_1\neq a_2\\ 1 & a_1 = a_2\end{cases}$




**למה** $\left\{\begin{array}{l}A\subset\mathbb{R}^n \text{ סגורה}\\ f: A\to\mathbb{R} \text{ חסומה}\\ \varepsilon>0\end{array}\right.$ $\Leftarrow$ $B_\varepsilon = \{x\in A \mid o(f,x)\geq\varepsilon\}$ סגורה




**הוכחה** אם $x \in A\setminus B_\varepsilon$ $\Leftarrow$ $o(f,x)<\varepsilon$ $\Leftarrow$ קיים איזשהו $\delta$ כך ש- $(\sup-\inf)_{y\in A\cap B(x,\delta)} f(y) < \varepsilon$

לכן, לכל $y$ ב- $A\cap B(x,\delta)$, $B(y,\delta_1)\subset B(x,\delta)$ $\Leftarrow$ $o(f,y) \leq (\sup-\inf)_{y\in A\cap B(y,\delta_1)} f(y) < \varepsilon$

$(\delta_1 = \delta - d(x,y) > 0)$

$\Leftarrow$ $A\cap B(x,\delta) \subset A\setminus B_\varepsilon$

# קבוצות בעלות מידה אפס

**הגדרה** $A\subset\mathbb{R}^n$ **בעלת מידה אפס** (measure zero) אם לכל $\varepsilon>0$, קיים כיסוי $\{U_i\}$ (תיבה סגורה) של $A$ ו- $\sum_i v(U_i)<\varepsilon$

**הגדרה** $A\subset\mathbb{R}^n$ **בעלת תכולה אפס** (content zero) אם לכל $\varepsilon>0$, קיים כיסוי סופי $\{U_i\}$ (תיבה סגורה) של $A$ ו- $\sum_i v(U_i)<\varepsilon$

* "תיבה סגורה" ← "תיבה פתוחה" (בהגדרה)
אז אותה קבוצות בעלת {מידה / תכולה} אפס!

* בעלת תכולה אפס ⇐ בעלת מידה אפס

* קבוצה בת-מניה $\{a_1,a_2,\dots\}$ ⇐ בעלת מידה אפס

$a_i\in U_i$, $v(U_i)=\varepsilon/2^{i+1}$

$\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon/2^{i+1}=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

**דוגמאות**

① $A=\mathbb{Q}\cap[0,1]\subset\mathbb{R}$ $\overset{\text{בת מניה}}{\Leftarrow}$ $A$ בעלת מידה אפס

אם $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}U_i$ (סגורה) $\Leftarrow$ $[0,1]=\bar{A}\subset\bigcup_{i=1}^{n}\bar{U_i}=\bigcup_{i=1}^{n}U_i$

$\Leftarrow$ $1\le v\left(\bigcup_{i=1}^{n}U_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}v(U_i)$

$\Leftarrow$ $A$ לא בעלת תכולה אפס.

② $A$ קבוצה קומפקטית, $A$ בעלת מידה אפס $\Leftarrow$ $A$ בעלת תכולה אפס

**הוכחה** $\varepsilon>0$ $\overset{\text{בעלת מידה 0}}{\Leftarrow}$ קיים כיסוי $\{U_i\}$ (תיבה פתוחה) של $A$ כך ש- $\sum_i v(U_i)<\varepsilon$

$\overset{\text{קומפקטית}}{\Leftarrow}$ קיים תת-כיסוי סופי $\{V_j\}$

$\Leftarrow$ $\sum_j v(V_j)\le\sum_i v(U_i)<\varepsilon$ ∎

③ $A$ בעלת מידה אפס, $B\subset A$ $\Leftarrow$ $B$ בעלת מידה אפס

④ $A$ בעלת תכולה אפס, $B\subset A$ $\Leftarrow$ $B$ בעלת תכולה אפס

⑤ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצות בעלות מידה אפס $\Leftarrow$ $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ בעלת מידה אפס

**הוכחה** לכל $\varepsilon>0$, קיים כיסוי $\{U_i^{(n)}\}_i$ (תיבה סגורה) של $A_n$ כך ש- $\sum_i v(U_i^{(n)})<\frac{\varepsilon}{2^n}$

$\Leftarrow$ $\{U_i^{(n)}\}_{i,n}$ כיסוי של $\bigcup_n A_n$ כך ש- $\sum_{i,n}v(U_i^{(n)})<\varepsilon$ ∎

# משפט לבג על אינטגרביליות

**למה**

$f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה

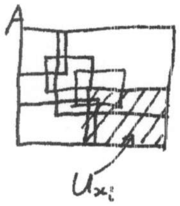
$A$ תיבה סגורה ב- $\mathbb{R}^n$

$o(f,x)<\varepsilon$ לכל $x\in A$

$\Leftarrow$ קיימת חלוקה $P$ של $A$ כך ש- $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon\cdot v(A)$

**הוכחה**


לכל $x\in A$, קיימת תיבה $U_x$ כך ש- $(\sup-\inf)_{U_x} f<\varepsilon$ ו- $x\in U_x$




$\{U_x\}$ כיסוי של $A$ $\xLeftarrow[\text{קומפקטית}]{A}$ קיים תת-כיסוי סופי $\{U_{x_1},\dots,U_{x_r}\}$

$\Leftarrow$ נבחור חלוקה $P$ כך שכל תת-תיבה בפירוק $S_P$ מוכל באחד מה- $U_{x_i}$-ים.

$\Leftarrow$ לכל $S\in S_P$: $(\sup-\inf)_S f\leq(\sup-\inf)_{U_{x_j}} f<\varepsilon$

$j$ כך ש- $S\subseteq U_{x_j}$

$\Leftarrow$ $U(f,P)-L(f,P)=\sum_{S\in S_P}(\sup-\inf)_S f\cdot v(S)<\sum_{S\in S_P}\varepsilon\cdot v(S)=\varepsilon\cdot v(A)$

■

---

**משפט לבג**

$f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה

$A$ תיבה סגורה ב- $\mathbb{R}^n$

$\{x\in A\mid o(f,x)>0\}=B$ ($f$ לא רציפה ב- $x$)

$\Leftarrow$ ($f$ אינטגרבילית (לפי רימן) אמ"מ $B$ קבוצה בעלת מידה אפס)

**הוכחה**

$(\Leftarrow)$ תהי $f$ אינטגרבילית, $\varepsilon>0$

$\Leftarrow$ קיימת $P_n$ חלוקה כך ש- $U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon/n$

נגדיר: $S'_n=\{S\in S_{P_n}\mid S\cap B_{1/n}\neq\emptyset\}$

$S\in S'_n \Rightarrow (\sup-\inf)_S f\geq\frac{1}{n}$

$\Leftarrow$ $\sum_{S\in S'_n}(\sup-\inf)_S f\cdot v(S)\geq\frac{1}{n}\sum_{S\in S'_n}v(S)$

$\leq \sum_{S\in S_{P_n}}(\sup-\inf)_S f\cdot v(S)$

$= U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon/n$

$\Leftarrow$ $\sum_{S\in S'_n}v(S)<\varepsilon$ (כיסוי של $B_{1/n}$)

$\Leftarrow$ $B_{1/n}$ בעלת מידה אפס

$\Leftarrow$ $B=\bigcup_n B_{1/n}$ בעלת מידה אפס

■

$(\Rightarrow)$ תהי $B$ בעלת מידה אפס, $\varepsilon>0$

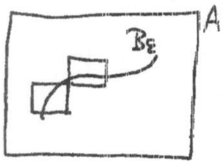
$\Leftarrow$ $B_\varepsilon\subseteq B$ בעלת מידה אפס

$B_\varepsilon=\{x\in A\mid o(f,x)\geq\varepsilon\}$ סגורה, חסומה $\Leftarrow$ קומפקטית

$\Leftarrow$ $B_\varepsilon$ בעלת תכולה אפס

$\Leftarrow$ קיים כיסוי של $B_\varepsilon$, $B_\varepsilon\subset U_1\cup\dots\cup U_M$, $\sum_{i=1}^{M}v(U_i)<\varepsilon$ (תיבה פתוחה)

נבחור את חלוקה $P$ כך ש- $U_i=\bigcup_{S\in\text{תת-קבוצה של } S_P} S$




נגדיר: $T_P=\{S\in S_P\mid S\cap B_\varepsilon=\emptyset\}$

$\mathcal{U}_P=S_P\setminus T_P$

$S\in T_P \Rightarrow$ לכל $x\in S$, $o(f,x)<\varepsilon$

$\xRightarrow{\text{למה}}$ קיימת חלוקה $P'_S$ של $S$ כך ש- $(U(f,P'_S)-L(f,P'_S)<\varepsilon\cdot v(S))$

$S\in\mathcal{U}_P \Rightarrow$ (קיים את $i$ כך ש- $S\subset U_i$)

נבחור את העדנה $Q$ של $P$ (לפי כל ה- $P'_S$-ים, $S\in T_P$)

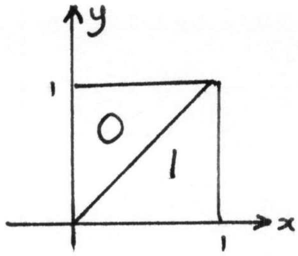
$$\Leftarrow\quad U(f,Q)-L(f,Q)\leq\sum_{S\in T_P}(U(f,P'_S)-L(f,P'_S))+\sum_{S\in\mathcal{U}_P}(U(f,S)-L(f,S))$$

$$<\varepsilon\cdot v(A)+2M\cdot\varepsilon \qquad \{M=\sup_A|f|\}$$

$\Leftarrow$ $f$ אינטגרבילית

■

$\boxed{44\text{א}}$




$A$

תיבה סגורה ב-$\mathbb{R}^2$:

<u>דוגמא</u> $\quad f: [0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x \ge y \\ 0 & x < y \end{cases}$$

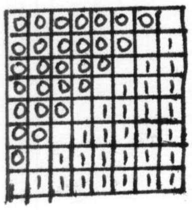
חלוקות של $A$
$$\begin{cases} P_n = \left(0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1\right)\times\left(0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1\right) \\ Q_n = \left(0<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^{n-1}}<\cdots<\frac{1}{2}<1\right)\times\left(0<\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^{n-1}}<\cdots<\frac{1}{2}<1\right) \end{cases}$$

---

ב- $S_{P_n}$ יש $n^2$ תת-תיבות: $S_{r,s}=\left[\frac{r-1}{n},\frac{r}{n}\right]\times\left[\frac{s-1}{n},\frac{s}{n}\right]\subset A$ כאשר $1\le r,s\le n$

$$v(S_{r,s})=\frac{1}{n^2},\quad \sup_{x\in S_{r,s}} f(x)=\begin{cases}1 & r\ge s\\ 0 & r<s\end{cases}\qquad \inf_{x\in S_{r,s}} f(x)=\begin{cases}1 & r>s\\ 0 & r\le s\end{cases}$$

אם X תנאי:
$\delta_X = \begin{cases} 1 & \text{אם X קיים} \\ 0 & \text{אם לא} \end{cases}$




$$U(f,P_n)=\sum_{r,s=1}^{n}\frac{1}{n^2}\delta_{r\ge s} = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{2}n(n+1)}_{1+2+\cdots+n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$$

$$L(f,P_n)=\sum_{r,s=1}^{n}\frac{1}{n^2}\delta_{r>s} = \sum_{r=2}^{n}\sum_{s=1}^{r-1}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{2}n(n-1)}_{1+2+\cdots+(n-1)} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

לכן $\quad \sup_n L(f,P_n)=\frac{1}{2}\quad,\quad \inf_n U(f,P_n)=\frac{1}{2}$

לכן $f$ אינטגרבילית ו- $\int_A f=\frac{1}{2}$

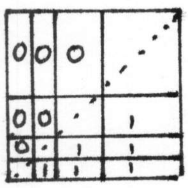
---

ב- $S_{Q_n}$ יש $(n+1)^2$ תת תיבות: $S=[t_{r-1},t_r]\times[t_{s-1},t_s]\subset A$ כאשר $1\le r,s\le n+1$

$t_0=0,\quad t_i=1/2^{n+1-i}\quad (i=1,2,\cdots n+1)$

$$v(S_{r,s})=(t_r-t_{r-1})\cdot(t_s-t_{s-1}),\quad \sup_{x\in S_{r,s}} f(x)=\begin{cases}1 & r\ge s\\ 0 & r<s\end{cases}\qquad \inf_{x\in S_{r,s}} f(x)=\begin{cases}1 & r>s\\ 0 & r\le s\end{cases}$$

$$U(f,Q_n)=\sum_{r,s=1}^{n+1}v(S_{r,s})\delta_{r\ge s}\qquad L(f,Q_n)=\sum_{r,s=1}^{n+1}v(S_{r,s})\delta_{r>s}$$




$$U(f,Q_n)-L(f,Q_n)=\sum_{r=1}^{n+1}v(S_{r,r})=\sum_{r=1}^{n+1}(t_r-t_{r-1})^2$$
$$=\underbrace{1/2^{2n}}_{r=1}+\sum_{r=2}^{n+1}\left(1/2^{n+1-r}-1/2^{n+2-r}\right)^2$$
$$=1/2^{2n}+\sum_{i=1}^{n}1/2^{2i}\qquad (i=n+2-r)$$
$$\xrightarrow{n\to\infty}1/3$$

<u>תרגיל</u>: $\quad U(f,Q_n)=2/3+1/3\cdot4^n \xrightarrow{n\to\infty} 2/3\quad,\quad L(f,Q_n)=1/3-1/3\cdot4^n \xrightarrow{n\to\infty} 1/3$

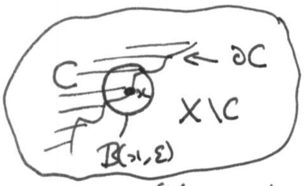
# נפח של קבוצה

**הגדרה** תהי $C$ תת-קבוצה של $\mathbb{R}^n$. **הפונקציה המציינת** של $C$ היא $\chi_C$:

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & x\in C \\ 0 & x\notin C \end{cases}$$

**למה**

$$o(\chi_C, x) = \begin{cases} 1 & \text{אם } x\in\partial C \\ 0 & \text{אם } x\notin\partial C \end{cases}$$




**הוכחה** $\partial C = \bar{C}\cap\overline{(X\setminus C)}$ ⇐ לכל $x\in\partial C$, $\varepsilon>0$,

$$o(\chi_C,x)=1 \Leftarrow \begin{cases} \sup\limits_{B(x,\varepsilon)} \chi_C = 1 \\ \inf\limits_{B(x,\varepsilon)} \chi_C = 0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} B(x,\varepsilon)\cap C\neq\emptyset & (\Leftarrow \bar{C}\ni x) \\ B(x,\varepsilon)\cap(X\setminus C)\neq\emptyset & (\Leftarrow \overline{X\setminus C}\ni x) \end{cases}$$

לכל $x\notin\partial C$,

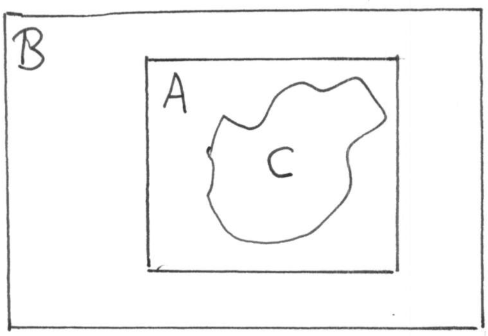
$$o(\chi_C,x)=0 \Leftarrow \begin{cases} \chi_C|_{B(x,\varepsilon)}=0 \Leftarrow B(x,\varepsilon)\cap C=\emptyset \text{ -כך ש } \varepsilon>0 \text{ קיים} \Leftarrow x\notin\bar{C} \text{ או} \\ \chi_C|_{B(x,\varepsilon)}=1 \Leftarrow B(x,\varepsilon)\cap(X\setminus C)=\emptyset \text{ -כך ש } \varepsilon>0 \text{ קיים} \Leftarrow x\notin\overline{(X\setminus C)} \text{ או} \end{cases}$$

■


**מסקנה** $C$ תת-קבוצה חסומה של $A$, $A$ תיבה שמכילה את $C$ ⇐ ( $\int_A \chi_C(x)dx$ קיים אם"ם $\partial C$ בעלת מידה אפס )

**הגדרה** $C$ תת קבוצה חסומה של $\mathbb{R}^n$, $\partial C$ בעלת מידה אפס ⇐ <u>נפח</u> של $C$ $=\int_A \chi_C$ ($C\subseteq A$ תיבה)

**הגדרה** $C$ תת קבוצה חסומה של $\mathbb{R}^n$, $\partial C$ בעלת מידה אפס, $f:C\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה ⇐ $\int_C f = \int_A f(x)\cdot\chi_C(x)dx$ ($C\subseteq A$ תיבה)

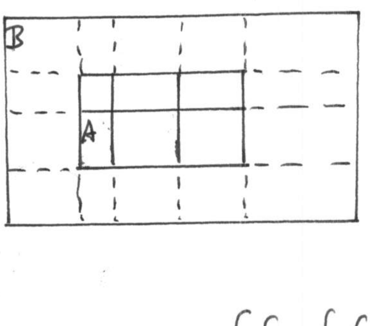



**למה** $A\subseteq B$ (תיבה, תיבה) ב- $\mathbb{R}^n$, $f|_A$ פונקציה אינטגרבילית על $A$, $f|_{B-A}=0$ ⇐ $f$ אינטגרבילית על $B$ ו- $\int_A f=\int_B f$

**הוכחה** תהי $P$ חלוקה של $A$.

קיימת חלוקה $Q$ של $B$ כך ש- $P=Q|_A$.

לכן $L(f,Q)=L(f|_A,P)$, $U(f,Q)=U(f|_A,P)$




$$\underline{\int_B} f = \sup_{\substack{R\\ \text{חלוקה של } B}} L(f,R) \geq \sup_Q L(f,Q) = \sup_P L(f|_A,P) = \underline{\int_A} f$$

$$\overline{\int_B} f = \inf_{\substack{R\\ \text{חלוקה של } B}} U(f,R) \leq \inf_Q U(f,Q) = \inf_P U(f|_A,P) = \overline{\int_A} f$$

$f$ אינטגרבילית על $A$ ⇐ $\underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f$ ⇐ $\underline{\int_B} f = \overline{\int_B} f$ ו- $\int_A f = \int_B f$

■

**למה** $f:A\to\mathbb{R}$, $g:A\to\mathbb{R}$ פונקציות, רציפות ב-$x\in A$ $\Leftarrow$ $f\cdot g$ רציפה ב-$x$

**הוכחה** $f$ רציפה ב-$x$ $\Leftarrow$ $f$ מסומה בסביבה של $x$
$g$ רציפה ב-$x$ $\Leftarrow$ $g$ מסומה בסביבה של $x$
$\Leftarrow$ קיים $0<\delta$, $M$ כך ש- $|f(y)|, |g(y)|<M$ לכל $y\in B(x,\delta)$

לכל $\varepsilon>0$, קיימים $0<\delta_1,\delta_2$ כך ש-

$|f(y)-f(x)|<\varepsilon/2M$ כאשר $y\in B(x,\delta_1)$

$|g(y)-g(x)|<\varepsilon/2M$ כאשר $y\in B(x,\delta_2)$

$\Leftarrow$ $|(f\cdot g)(y)-(f\cdot g)(x)| = |f(y)g(y)-f(x)g(x)|$ לכל $y\in B(x,\delta')$ $(\delta'=\min(\delta,\delta_1,\delta_2))$

$$= |f(y)(g(y)-g(x))+(f(y)-f(x))g(x)|$$
$$\le |f(y)|\cdot|g(y)-g(x)|+|f(y)-f(x)|\cdot|g(x)|$$
$$< M\cdot \varepsilon/2M + \varepsilon/2M\cdot M=\varepsilon$$

□

---

(1א) תהי' $f,g$ פונקציות אינטגרביליות $A\to\mathbb{R}$. אזי $f+g$, $\lambda\cdot f$, $fg$ אינטגרביליות ו-

$$\int_A f+g=\int_A f+\int_A g,\quad \int_A \lambda\cdot f=\lambda\int_A f \quad (\lambda\in\mathbb{R} \text{ קבוע})$$

**הוכחה** $f,g$ אינטגרביליות $\Leftarrow$ קיימת חלוקה $P$ כך ש- $\varepsilon>0$

$L(f,P)>\int_A f-\varepsilon,\ U(f,P)<\int_A f+\varepsilon$

$L(g,P)>\int_A g-\varepsilon,\ U(g,P)<\int_A g+\varepsilon$

($f+g$) לכל $S\in P$, $\sup_S(f+g)\le\sup_S f+\sup_S g$, $\inf_S(f+g)\ge\inf_S f+\inf_S g$

$L(f+g,P)\ge L(f,P)+L(g,P)$, $U(f+g,P)\le U(f,P)+U(g,P)$

$>\int_A f+\int_A g-2\varepsilon$ $\qquad$ $<\int_A f+\int_A g+2\varepsilon$

$\Leftarrow$ $f+g$ אינטגרבילית ו- $\int_A f+g=\int_A f+\int_A g$

($\lambda\cdot f$) $\lambda>0$ $\Leftarrow$ $\sup_S(\lambda f)=\lambda\sup_S f$ $\Leftarrow$ $U(\lambda f,P)=\lambda U(f,P)<\lambda\int_A f+\lambda\varepsilon$
$\inf_S(\lambda f)=\lambda\inf_S f$ $\Leftarrow$ $L(\lambda f,P)=\lambda L(f,P)>\lambda\int_A f-\lambda\varepsilon$
$\Leftarrow$ $\lambda\cdot f$ אינטגרבילית, $\int_A\lambda\cdot f=\lambda\int_A f$

$\lambda<0$ $\Leftarrow$ $\sup_S(\lambda f)=\lambda\inf_S f$ $\Leftarrow$ $U(\lambda f,P)=\lambda L(f,P)<\lambda\int_A f-\lambda\varepsilon$
$\inf_S(\lambda f)=\lambda\sup_S f$ $\Leftarrow$ $L(\lambda f,P)=\lambda U(f,P)>\lambda\int_A f+\lambda\varepsilon$
$\Leftarrow$ $\lambda\cdot f$ אינטגרבילית, $\int_A\lambda\cdot f=\lambda\int_A f$

($f\cdot g$) למה $\Leftarrow$ $\{x\in A\mid o(f\cdot g,x)>0\}\subseteq\{x\in A\mid o(f,x)>0\}\cup\{x\in A\mid o(g,x)>0\}$

קבוצות בעלות מידה אפס ($f$ ו-$g$ אינטגרביליות, משפט לבג)

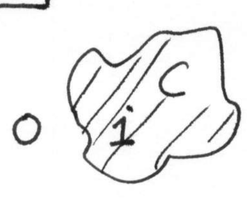
$\Leftarrow$ $\{x\in A\mid o(f\cdot g,x)>0\}$ בעלת מידה אפס $\Leftarrow$ $f\cdot g$ אינטגרבילית.

□

ב45

characteristic function

(ב) **הגדרה** $C\subset\mathbb{R}^n$ ⇐ <u>פונקציה אופיינית</u> של $C$ היא $\chi_C$:

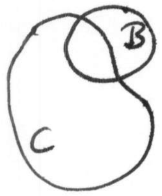



$$\chi_C : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & x\in C \\ 0 & x\notin C \end{cases}$$

---

**למה** $$o(\chi_C, x) = \begin{cases} 1 & x\in\partial C \\ 0 & x\notin\partial C \end{cases}$$

**הוכחה** לכל קבוצה $B$, $\sup\limits_B \chi_C = \begin{cases} 1 & B\cap C\neq\emptyset \\ 0 & B\cap C=\emptyset \end{cases}$ , $\inf\limits_B \chi_C = \begin{cases} 1 & B\cap C^c=\emptyset \\ 0 & B\cap C^c\neq\emptyset \end{cases}$




$$\Leftarrow \sup_B \chi_C - \inf_B \chi_C = \begin{cases} 1 & B\cap C\neq\emptyset, B\cap C^c\neq\emptyset \\ 0 & \text{אם לא} \end{cases}$$

לכן $$o(\chi_C, x) = \lim_{\delta\to 0} \underbrace{(\sup - \inf)_{B(x,\delta)}\chi_C}_{=1\text{ או }0} = (1 \text{ או } 0)$$

ו- $o(\chi_C, x) = 1$ אם"ם לכל $\delta$ $\begin{cases} B(x,\delta)\cap C\neq\emptyset \\ B(x,\delta)\cap C^c\neq\emptyset \end{cases}$ לכל $\delta$ מספיק קטן

$\to x\in\bar{C}$

$\to x\in\overline{(C^c)} = (\mathring{C})^c$

אם"ם $x\in\bar{C}\setminus\mathring{C} = \partial C$

□

---

**הגדרה** $C\subset A$ תיבה סגורה ב-$\mathbb{R}^n$ בעלת <u>נפח Jordan</u> אם $\chi_C$ אינטגרבילית על $C$

ו- $(C \text{ של Jordan נפח}) = v_J(C) \equiv \int_A \chi_C$

**מסקנה** קבוצה בעלת נפח Jordan אם"ם השפה שלה בעלת מידה אפס.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**למה** $C, D \subset A$ בעלות נפח Jordan ⇐ $C\cap D$, $C\cup D$ בעלות נפח Jordan

ו- $v_J(C\cup D) + v_J(C\cap D) = v_J(C) + v_J(D)$

**הוכחה** $C, D$ בעלות נפח Jordan

⇐ $\chi_C, \chi_D$ אינטגרביליות

⇐ $\underset{\chi_{C\cap D}}{\chi_C\cdot\chi_D}$ ו- $\underset{\chi_{C\cup D}}{\chi_C+\chi_D-\chi_C\cdot\chi_D}$ אינטגרביליות

ו- $$\underbrace{\int_A \chi_C+\chi_D-\chi_C\cdot\chi_D}_{v_J(C\cup D)} = \underbrace{\int_A\chi_C}_{v_J(C)} + \underbrace{\int_A\chi_D}_{v_J(D)} - \underbrace{\int_A \chi_C\cdot\chi_D}_{v_J(C\cap D)}$$

□

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

**דוגמא** (1) $C = \mathbb{Q}\cap[0,1]$ לא בעלת נפח Jordan כי $\partial C=[0,1]$ לא בעלת מידה 0.

(2) $C$ בעלת תכולה $0$ ⇐ $C$ בעלת נפח Jordan

**הוכחה** לכל $\varepsilon>0$, קיימות תיבות סגורות $S_1 \ldots S_r$, $C\subset\bigcup_{i=1}^r S_i$, $\sum_{i=1}^r v(S_i)<\varepsilon$

⇐ $\partial C = \bar{C}\setminus\mathring{C} \subset \bar{C} \subset \bigcup_{i=1}^r \bar{S_i} = \bigcup_{i=1}^r S_i$

⇐ $\partial C$ בעלת תכולה אפס ⇐ $C$ בעלת נפח Jordan

□

ג 45

**למה** $f,g : A\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות, $f\le g$ ב-$A$ $\Leftarrow$ $\int_A f \le \int_A g$

**הוכחה** לכל $S\subset A$, $\begin{cases}\sup_S f \le \sup_S g\\ \inf_S f \le \inf_S g\end{cases}$ $\Leftarrow$ $\begin{cases}U(f,P)\le U(g,P)\\ L(f,P)\le L(g,P)\end{cases}$ לכל חלוקה $P$

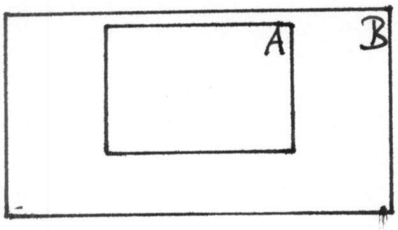
$\Leftarrow$ $\int_A f \le \int_A g$

□

---

**למה** $\begin{cases} f:B\to\mathbb{R} \text{ חסומה} \\ f|_{B-A}=0 \\ B\supset A \\ \text{תת תיבות סגורות של } \mathbb{R}^n \end{cases}$ $\Leftarrow$ $f|_B$ אינטגרבילית אמ"מ $f|_A$ אינטגרבילית

ו- $\int_A f = \int_B f$



**הוכחה** $f|_{B-A}=0$ $\Leftarrow$ $o(f,x)=0$

לכל $x\in B\setminus A$

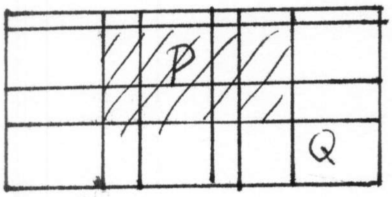
$\Leftarrow$ $\{x\in A \mid o(f,x)>0\} = \{x\in B \mid o(f,x)>0\}$

$\Leftarrow$ ($f|_B$ אינטגרבילית $\Leftrightarrow$ $f|_A$ אינטגרבילית)

- - - - - - - - - - - - - - - -

$f$ אינטגרבילית $\varepsilon>0$ $\Leftarrow$ קיימת חלוקה $P$ של $A$

כך ש- $U(f,P)<\int_A f+\varepsilon$, $L(f,P)>\int_A f-\varepsilon$



$Q$ הרחבה של $P$ ל-$B$ $\Leftarrow$ $S_Q = S_P \cup \{\text{תת תיבות של } B-A\}$

$\left(\begin{matrix} S \text{ תת תיבה של } B-A \\ \Leftarrow \sup_S f = \inf_S f = 0 \end{matrix}\right)$

לכן: $U(f,Q)=\sum_{S\in S_Q}(\sup_S f)v(S) = \sum_{S\in S_P}(\sup_S f)v(S)=U(f,P) < \int_A f+\varepsilon$

$L(f,Q)=\sum_{S\in S_Q}(\inf_S f)v(S) = \sum_{S\in S_P}(\inf_S f)v(S)=L(f,P) > \int_A f-\varepsilon$

$\Leftarrow$ $\int_B f = \int_A f$

□

---

**מסקנה** $B\supset A\supset C$ (תיבה, תיבה, בעלת נפח Jordan) $\Leftarrow$ $\int_A \chi_C = \int_B \chi_C$ (כי $\chi_C|_{B-A}=0$)

**מסקנה** $A_1, A_2 \supset C$ (תיבות, בעלת נפח Jordan) $\Leftarrow$ $\int_{A_1}\chi_C = \int_{A_2}\chi_C$ (כי $A_1\cap A_2 \supset C$ תיבה $\subset A_1, A_2$)

(לכן נפח Jordan תלוי רק ב- $C$, לא ב- $A$)

**מסקנה** $A$ תיבה ב-$\mathbb{R}^n$ $\Leftarrow$ (נפח Jordan של $A$) $= v(A)$

**הוכחה** $v_J(A)\equiv\int_A \chi_A$ ו- $L(\chi_A,P)=v(A)=U(\chi_A,P)$

לפי חלוקה עם תת תיבה אחת: $A$.

□

**דוגמא** $C$ תכולה מידה אפס (וחסומה) $\Leftarrow v_J(C)=0$

**הוכחה** לכל $\varepsilon>0$, קיימות תיבות סגורות $S_1,\dots,S_r$ כך ש- $C\subset\bigcup_{i=1}^{r}S_i$ ו- $\sum_{i=1}^{r}v(S_i)<\varepsilon$

$$\Leftarrow\quad 0\le\chi_C\le\sum_{i=1}^{r}\chi_{S_i}$$

$$\Leftarrow\quad 0\le\int_A\chi_C\le\sum_{i=1}^{r}\int_A\chi_{S_i}$$ ($A$ תיבה סגורה כך ש- $C\subset A$)

$$=\sum_{i=1}^{r}v(S_i)<\varepsilon$$

$$\Leftarrow\quad \int_A\chi_C=0$$ ו- $v_J(C)=0$

□

---

ג) **הגדרה**
$C\subset A$ — $C$ בעלת נפח Jordan, $A$ תיבה סגורה;
$f:A\to\mathbb{R}$ חסומה אינטגרבילית
$\Leftarrow\ \int_A\chi_C\cdot f\equiv\int_C f\equiv$ האינטגרל של $f$ על $C$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

[$\chi_C$ ו- $f$ אינטגרביליות $\Leftarrow$ $\chi_C\cdot f$ אינטגרבילית]

**הערה** אם $C\subset A\subset B$ ($A$ תיבה, $B$ תיבה), $f:B\to\mathbb{R}$ אינט' $\Leftarrow (\chi_C\cdot f)|_{B-A}=0 \Leftarrow \int_A\chi_C\cdot f=\int_B\chi_C\cdot f$

לכן לכל תיבות $C\subset A_1,A_2$ $\Leftarrow \int_{A_1}\chi_C\cdot f=\int_{A_2}\chi_C\cdot f$

וההגדרה של $\int_C f$ לא תלוי ב- $A$

---

**דוגמאות** ① $C,D$ בעלות נפח Jordan ו- $f$ אינטגרבילית

$$\Leftarrow\quad \int_{C\cap D}f+\int_{C\cup D}f=\int_C f+\int_D f$$

(לכן אם $C\cap D=\emptyset$, אזי $\int_{C\cup D}f=\int_C f+\int_D f$)

**הוכחה** $\chi_{C\cap D}+\chi_{C\cup D}=\chi_C+\chi_D$

$$\Leftarrow\quad \chi_{C\cap D}f+\chi_{C\cup D}f=\chi_C f+\chi_D f$$

$$\Leftarrow\quad \int_A\chi_{C\cap D}f+\int_A\chi_{C\cup D}f=\int_A\chi_C f+\int_A\chi_D f$$

□

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

② $f$ חסומה, $C\subset\mathbb{R}^n$ חסומה בעלת תכולה אפס $\Leftarrow \int_C f=0$

**הוכחה** קיים $M$ כך ש- $|f(x)|<M$

קיימת תיבה סגורה $A$ כך ש- $C\subset A$

$\varepsilon>0 \Leftarrow$ קיימות תיבות $S_1\cdots S_r$ כך ש- $C\subset\bigcup_{i=1}^{r}S_i$, $\sum_{i=1}^{r}v(S_i)<\varepsilon/M$

$$\Leftarrow\quad \chi_C\le\sum_{i=1}^{r}\chi_{S_i}$$

$$\Leftarrow\quad -M\sum_{i=1}^{r}\chi_{S_i}\le\chi_C\cdot f\le M\cdot\sum_{i=1}^{r}\chi_{S_i}$$

לכן: $\left|\int_C f\right|=\left|\int_A\chi_C\cdot f\right|\le\int_A M\cdot\sum_{i=1}^{r}\chi_{S_i}=\sum_{i=1}^{r}Mv(S_i)<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon \Leftarrow \int_C f=0$ □

## דוגמאות

① $\int_C a\cdot f(x)dx = a\int_C f,\quad \int_C (f+g) = \int_C f + \int_C g$

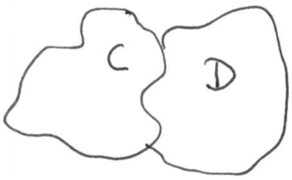
$f,g$ אינטגרביליות על $C$ ⇐ $f+g$ ו- $af$ אינטגרביליות

② במקרה כללי:

$$\overline{\int}_C (f+g) \le \overline{\int}_C f + \overline{\int}_C g\ ,\quad \underline{\int}_C (f+g) \ge \underline{\int}_C f + \underline{\int}_C g$$

$a>0$ קבוע ⇐ $\overline{\int}_C a\cdot f = a\cdot\overline{\int}_C f\ ,\quad \underline{\int}_C a\cdot f = a\cdot\underline{\int}_C f$

$a<0$ קבוע ⇐ $\overline{\int}_C a\cdot f = a\cdot\underline{\int}_C f\ ,\quad \underline{\int}_C a\cdot f = a\cdot\overline{\int}_C f$




③ $\int_{C\cup D} f = \int_C f + \int_D f$

אם $f$ אינטגרבילית על $C$ ו-על $D$

ו- $C\cap D = \emptyset$

④ $A = \mathbb{Q}\cap(0,1) = \{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

נבחר מספרים $a_n, b_n$ כך ש- $0<a_n<q_n<b_n<1$ ו- $b_n-a_n = 1/2^{n+1}$

נגדיר את קבוצה $C$ ע"י $C=\bigcup_n (a_n,b_n)$

⇐ $\mathring{C}=C,\ \bar{C}=[0,1]$ ⇐ $\partial C = [0,1]-C$

$\sum_n (b_n-a_n) = \frac{1}{2}$ ⇐ $\partial C$ לא בעלת מידה אפס (תרגיל!)

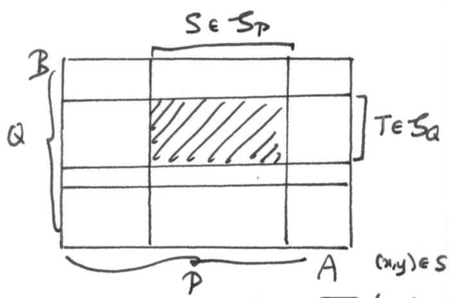
⇐ נפח של $C$ (לפי רימן) לא קיים!

---

## משפט Fubini

$$\left\{\begin{array}{l} A\subset\mathbb{R}^n,\ B\subset\mathbb{R}^m \text{ תיבות סגורות} \\ f:A\times B\to\mathbb{R} \text{ פונקציה אינטגרבילית} \\ \mathcal{L}(x)=\underline{\int}_B f(x,y)dy,\ \mathcal{U}(x)=\overline{\int}_B f(x,y)dy \end{array}\right.$$

⇐ $\mathcal{L},\mathcal{U}$ פונקציות אינטגרביליות על $A$ ו- $\int_{A\times B} f = \int_A \mathcal{L} = \int_A \mathcal{U}$




**הוכחה** תהי $P$ חלוקה של $A$, $Q$ חלוקה של $B$ ⇐ $P\times Q$ חלוקה של $A\times B$

$S\in S_P,\ T\in S_Q$ ⇐ $S\times T \in \underset{\text{בלוק נוצר ע"י } P\times Q}{S_{P\times Q}}$

$x\in S$ ⇐ $\inf_{(x,y)\in S\times T} f(x,y) \le \inf_{y\in T} f(x,y)$

לכן $\sum_{T\in S_Q}\left(\inf_{S\times T} f\right) v(T) \le \sum_{T\in S_Q}\left(\inf_{y\in T} f\right) v(T) \le \underline{\int}_B f(x,y)dy = \mathcal{L}(x)$ לכל $x\in S$

⇐ $L(f,S_{P\times Q}) = \sum_{S\in S_P}\sum_{T\in S_Q}\left(\inf_{S\times T} f\right) v(T)v(S) \le \sum_{S\in S_P}\left(\inf_S \mathcal{L}\right)v(S) = L(\mathcal{L},P)$

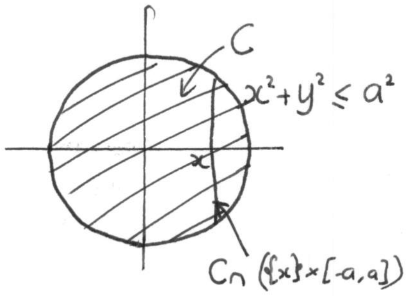
⇐ $\underline{\int}_{A\times B} f = \sup_{P,Q} L(f,S_{P,Q}) \le \sup_P L(\mathcal{L},P) = \underline{\int}_A \mathcal{L} \overset{\mathcal{L}\le\mathcal{U}}{\le} \underline{\int}_A \mathcal{U}$

$\qquad \|$

$\overline{\int}_{A\times B} f \qquad \ge \qquad \overline{\int}_A \mathcal{U} \overset{\mathcal{U}\ge\mathcal{L}}{\ge} \overline{\int}_A \mathcal{L}$

⇐ $\left\{\begin{array}{l} \underline{\int}_A \mathcal{L} = \overline{\int}_A \mathcal{L} \\ \underline{\int}_A \mathcal{U} = \overline{\int}_A \mathcal{U} \end{array}\right.$ ⇐ $\mathcal{L},\mathcal{U}$ אינטגרביליות על $A$, ו- $\int_{A\times B} f = \int_A \mathcal{U} = \int_A \mathcal{L}$

## דוגמאות




① $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le a^2\}$

$A=[-a,a]\times[-a,a]$

$\int_A \chi_C$ = שטח של C

$\int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a}\chi_C(x,y)\,dy\right)dx \underset{\text{Fubini}}{\overset{\text{משפט}}{=}}$

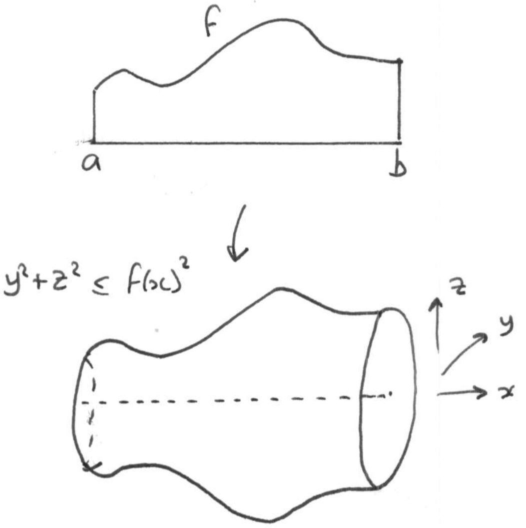
$\int_{-a}^{a} 2\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx =$ כי $\chi_C(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{אם } y \in [-\sqrt{(a^2-x^2)},\sqrt{(a^2-x^2)}] \\ 0 & \text{אם לא} \end{cases}$

$\left(\begin{array}{l} x=a\sin\theta \\ dx=a\cos\theta\,d\theta \end{array}\right)$ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2a^2\cos^2\theta\,d\theta =$

$\pi a^2 =$

solid of revolution

② גוף סיבוב.

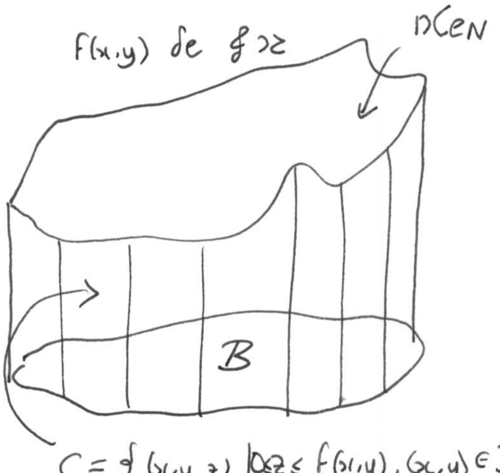



$C=\{(x,y,z) \mid a\le x\le b,\ y^2+z^2\le f(x)^2\}$

$\int \chi_C$ = נפח של C

$\int_a^b\left(\int\chi_C(x,y,z)\,dy\,dz\right)dx \underset{\text{Fubini}}{\overset{\text{משפט}}{=}}$

$\int_a^b \pi f(x)^2\,dx =$ שטח של דיסק




$C=\{(x,y,z) \mid 0\le z\le f(x,y),\ (x,y)\in B\}$

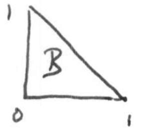
③ $\int_B f(x,y)\,dx\,dy =$ נפח

דוגמא: $C=\{(x,y,z) \mid x,y,z\ge 0,\ x+y+z\le 1\}$

$B=\{(x,y) \mid x,y\ge 0,\ x+y\le 1\}$

$f(x,y)=1-x-y$

⇐ נפח של C $=\int_B(1-x-y)\,dx\,dy$




$\int_0^1\left(\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy\right)dx =$

$\int_0^1 \frac{1}{2}(1-x)^2\,dx =$

$\frac{1}{6} =$

④ $f,g$ פונקציות אינטגרביליות על תיבה $A$

⇐ $B_f, B_g$ בעלות מידה אפס

⇐ $B_{f\cdot g}\subset B_f\cup B_g$ בעלת מידה אפס

⇐ $f\cdot g$ פונקציה אינטגרבילית

$B_f=\{x \mid o(f,x)>0\}$

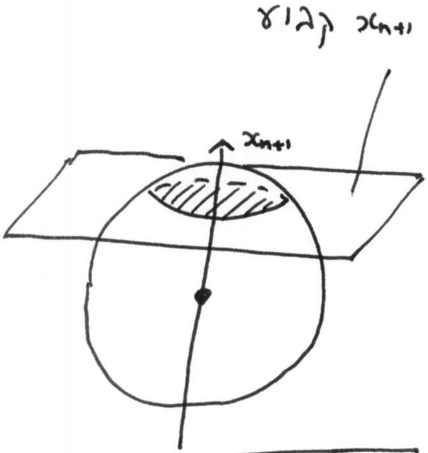
$B_g=\{x \mid o(g,x)>0\}$

$\left.\begin{array}{l} o(f,x)=0 \\ o(g,x)=0 \end{array}\right\}$ ⇒ $f,g$ רציפות ב-$x$ ⇒ $f\cdot g$ רציפה ב-$x$ ⇒ $x\notin B_{f\cdot g}$

# נפח של כדור

$V_n$ = (נפח של כדור יחידה ב-n-מימדי)

$\Leftarrow$ $V_n \cdot r^n$ = (נפח של כדור ברדיוס r ב-n-מימדי)




$$\chi_C(x_1 \cdots x_{n+1}) = 1$$
אם"ם $x_1^2+\dots+x_{n+1}^2 \le 1$

אם"ם $x_1^2+\dots+x_n^2 \le 1-x_{n+1}^2$

$V_{n+1}$ = נפח של $\underbrace{\{(x_1,\dots,x_{n+1}) \mid x_1^2+\dots+x_{n+1}^2 \le 1\}}_{C}$

הגדרה
$$= \int_{[-1,1]^{n+1}} \chi_C$$

$$= \int_{[-1,1]} \left( \int_{[-1,1]^n} \chi_C(x_1,\dots,x_{n+1})\, dx_1 \dots dx_n \right) dx_{n+1}$$
פוביני

$$= \int_{-1}^{1} \left( \int_{[-1,1]^n} \chi_D \, dx_1 \dots dx_n \right) dx_{n+1}$$

D: כדור ברדיוס $\sqrt{1-x_{n+1}^2}$ ב-$\mathbb{R}^n$

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{V_n \cdot (1-x_{n+1}^2)^{n/2}}\, dx_{n+1}$$

נפח של כדור ב-$\mathbb{R}^n$ ברדיוס $\sqrt{1-x_{n+1}^2}$

$$= V_n \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n/2}\, dx$$

לכן $\frac{V_{n+1}}{V_n} = P_{n+1}$ כאשר $P_{n+1} = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n/2}dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n+1}\theta\, d\theta = \int_0^\pi \sin^{n+1}\theta\, d\theta$

$\Downarrow$

$$P_{n+2} = \int_0^\pi \sin^{n+2}\theta\, d\theta$$
$$= P_n - \int_0^\pi (\sin^n\theta \cos\theta)\cos\theta\, d\theta$$
$$= P_n - \left[ \cos\theta \int \sin^n\theta\cos\theta\, d\theta - \int (-\sin\theta) \int \sin^n\theta \cos\theta\, d\theta\, d\theta \right]_0^\pi$$
$$= P_n - \left[ \cos\theta \cdot \frac{\sin^{n+1}\theta}{n+1} + \int \sin\theta \cdot \frac{\sin^{n+1}\theta}{n+1} d\theta \right]_0^\pi$$
$$= P_n - \frac{P_{n+2}}{n+1}$$

$\Rightarrow (2+n)P_{n+2} = (n+1)P_n \quad \Rightarrow \quad P_n = \frac{n-1}{n} P_{n-2}$

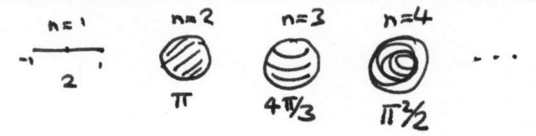
$P_0 = \pi \Rightarrow P_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \pi = \frac{2n-1}{2n} \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} P_0$

$P_1 = 2 \Rightarrow P_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \cdot 2 = \frac{2n}{2n+1} \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} P_1$

$\Rightarrow P_{2n}P_{2n+1} = \frac{2\pi}{2n+1}$

$$V_{2n+1} = V_1 \cdot P_2 P_3 \cdots P_{2n} P_{2n+1}$$
$$= V_1 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdots \frac{2\pi}{2n+1}$$
$$= 2 \cdot \frac{(2\pi)^n \cdot 2^n n!}{(2n+1)!}$$

$$V_{2n} = V_1 \cdot P_2 P_3 \cdots P_{2n}$$
$$= \frac{(2\pi)^n}{2^n n!}$$



## משפט Green

γ מסילה סגורה ופשוטה ב-$\mathbb{R}^2$

D = פנים של γ

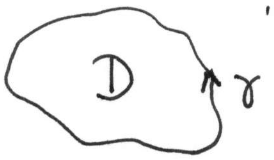
γ בכיוון חיובי

$P,Q : \bar{D} \to \mathbb{R}$ רציפות

$\frac{\partial P}{\partial y} , \frac{\partial Q}{\partial x}$ רציפות, חסומות ב-D

$$\Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_\gamma \underbrace{Pdx + Qdy}_{\binom{P}{Q}\cdot d\underline{s}}$$

שדה וקטורי



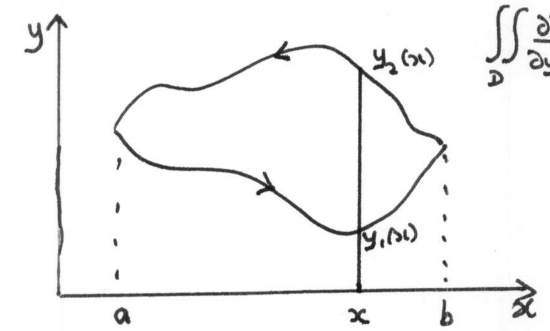

**למה** אם קיימות פונקציות $y_1(x), y_2(x)$, $a \le x \le b$

כך ש-

$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

(ו- $\gamma$, $D$, $P$ תחת תנאים במשפט הנ"ל)

$$\Rightarrow \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_\gamma Pdx$$




**הוכחה**

$\partial D = \left\{(x,y) \;\middle|\; \begin{matrix} a \le x \le b \\ y = y_1(x) \text{ או } y_2(x) \end{matrix}\right\}$

$-\int_\gamma Pdx = -\int_{\gamma_1} Pdx + \int_{\gamma_2} Pdx$

כאשר $\gamma_i : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$t \mapsto (t, y_i(t))$

$= -\int_a^b \binom{P(t,y_1(t))}{0} \cdot \binom{1}{y_1'(t)} dt + \int_a^b \binom{P(t,y_2(t))}{0} \cdot \binom{1}{y_2'(t)} dt$

$= -\int_a^b P(t,y_1(t))dt + \int_a^b P(t,y_2(t))dt$

$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$

$\overset{\text{הגדרה}}{=} \iint_{[a,b]\times[c,d]} \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \chi_D \, dxdy$

תיבה שמכילה את D

$\overset{\text{משפט פוביני}}{=} \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y} \chi_D \, dy\right) dx$

$D = \left\{(x,y) \;\middle|\; \begin{matrix} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \end{matrix}\right\}$

$= \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) dx$

$= \int_a^b P(x,y_2(x)) - P(x,y_1(x)) dx$

□

**מסקנה** אם קיימות פונקציות $y_1(x), y_2(x)$, $a \le x \le b$, $x_1(y), x_2(y)$, $c \le y \le d$

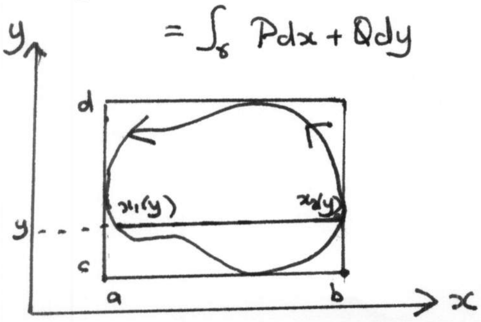
כך ש-

$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$

$= \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$

ו- $\gamma$, $D$, $P,Q$ תחת תנאים הנ"ל של המשפט

$$\Rightarrow \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_\gamma Pdx + Qdy$$




**הוכחה**

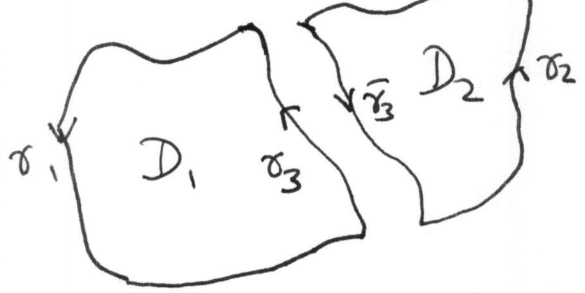
$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d Q(x_2(y),y) - Q(x_1(y),y) dy = \int_\gamma Qdy$

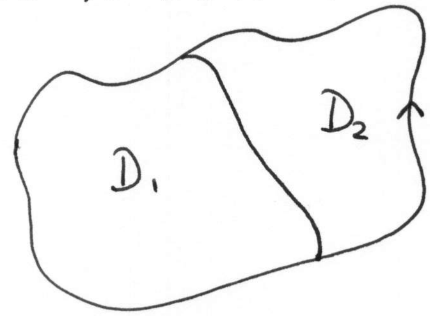
$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \overset{\text{למה}}{=} \int_\gamma Pdx$

□

# דוגמאות של משפט Green

(א) אם כבר יודעים את משפט Green לתחומים $D_1$ ו- $D_2$:

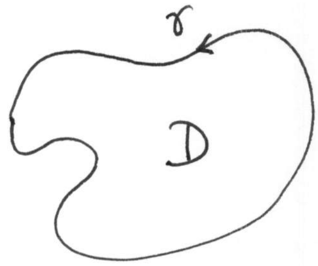



$$\left.\begin{aligned}\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy &= \int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_3}(Pdx+Qdy)\\ \iint_{D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy &= \int_{\gamma_2}-\int_{\gamma_3}(Pdx+Qdy)\end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \iint_{D_1\cup D_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\left(\int_{\gamma_1}+\int_{\gamma_2}\right)Pdx+Qdy.$$

(ב)

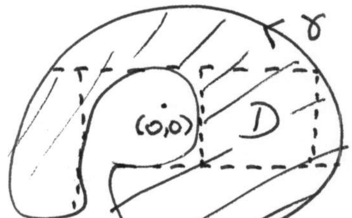



$$\frac{1}{2}\int_\gamma -ydx+xdy = \iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{2}\right)dxdy$$

$$=\iint_D 1\,dxdy = (D \text{ של שטח})$$

(ג)

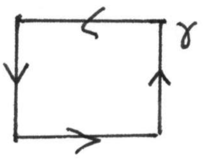
$$P=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad Q=\frac{x}{x^2+y^2},\quad (0,0)\notin D \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$




$$\int_\gamma Pdx+Qdy = \iint_D \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{=0}dxdy = 0$$

$$\Leftarrow \quad \underbrace{\int_\gamma \begin{pmatrix}-y/(x^2+y^2)\\ x/(x^2+y^2)\end{pmatrix}\cdot d\underline{s}}_{\overset{\text{הגדרה}}{=}\ 2\pi\cdot \operatorname{Ind}(\gamma,0)} = 0$$

(ד)




$\gamma =$ מ $(0,0)$ ל- $(1,0)$ ל- $(1,1)$ ל- $(0,1)$

$$\underline{f}=\begin{pmatrix}xy^2\\ \cos(x+y)\end{pmatrix}$$

$$\int_\gamma \underline{f}\cdot d\underline{s} \overset{\text{משפט Green}}{=} \iint_D \frac{\partial}{\partial x}(\cos(x+y))-\frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\,dxdy$$

$$\overset{\text{משפט Fubini}}{=} \int_0^1\int_0^1(-\sin(x+y)-2xy)\,dxdy$$

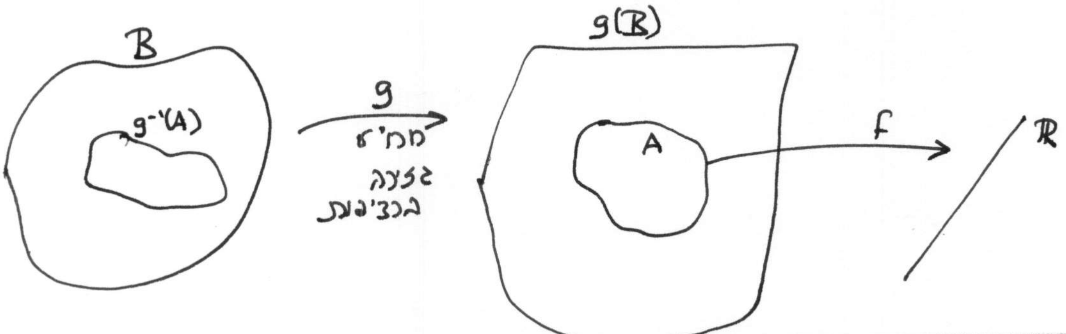
$$=\int_0^1\left[\cos(x+y)-x^2y\right]_{x=0}^{x=1}dy = \int_0^1 \cos(1+y)-y-\cos y\,dy$$

$$=\left[\sin(1+y)-\frac{y^2}{2}-\sin y\right]_0^1 = \left(\sin 2-\tfrac{1}{2}-\sin 1\right)-\sin 1$$

$\boxed{51}$

# משפט על חילוף משתנים (בלי הוכחה)

$$\left.\begin{array}{r} B\subset \mathbb{R}^n \text{ פתוחה} \\ g:B\to\mathbb{R}^n \text{ חח"ע, גזירה ברציפות} \\ J_g(x)\neq 0 \text{ לכל } x\in B \\ A\subset g(B) \text{ קומפקטית} \\ f:A\to\mathbb{R} \text{ רציפה} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_A f = \int_{g^{-1}(A)} (f\circ g)\cdot |J_g|$$

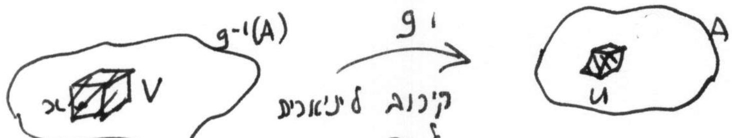



---

## סיבה למשפט

"חלק" של $\int_A f$ | "חלק" של $\int_{g^{-1}(A)} (f\circ g)\cdot|J_g|$

$f(\text{נקודה ב-}U)\, v(U)$ | $\overbrace{(f\circ g)\cdot|J_g|}^{\text{בנקודה ב-}V}\, v(V)$




קירוב ליניארי של g: העתקה ליניארית $\boxed{D_g(x)}$

$V =$ מקבילון

$U=g(V) \sim$ מקבילון

$v(U)\sim v(V)\cdot|J_g|$

---

## דוגמא

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \text{יעקוביאן} = r$$

$$\binom{x}{y}=g\binom{r}{\theta} \leftarrow \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{g^{-1}(A)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta$$

$D:\ 1\le x^2+y^2\le 4$

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_1^2\int_0^{2\pi} r^2\cdot r\,d\theta\,dr \overset{\text{משפט Fubini}}{=} \int_1^2\left(\int_0^{2\pi} r^3\,d\theta\right)dr = \int_1^2 2\pi r^3\,dr = \left[\frac{\pi r^4}{2}\right]_1^2 = \underline{\underline{\frac{15\pi}{2}}}$$

# מבחן לדוגמא: אינפי מימדים (1) 80315

## חלק א׳ יש לענות על 5 שאלות מתוך 7 ($5\times5=25$ נקודות)

① האם $\{(a_n) \mid \text{לכל } n\ |a_n|<\frac{1}{n^2}\}$ קבוצה פתוחה במרחב מטרי של סדרות ממשיות $(a_n)$ כך ש- $\sum|a_n|$ מתכנס, תחת נורמה $\|(a_n)\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ?

② האם כל קבוצה סגורה וחסומה של מרחב מטרי שלם צריכה להיות קומפקטית?

③ נגדיר מרחב נורמי $M_{2,3}$ ע"י $M_{2,3}=\{2\times3 \text{ מטריצות ממשיות}\}$ ו- $\|A\|=\sum|A_{ij}|$ . האם $\{A\in M_{2,3} \mid \|A\|\le1, rk\,A=1\}$ קומפקטית?

④ האם הסגור של כדור פתוח ברדיוס a , במרחב מטרי, צריך להיות כדור סגור ברדיוס a ?

⑤ האם התמונה רציפה של מרחב שלם גם כן שלם?

⑥ $B_n$ כדורים סגורים יורדים במרחב שלם [כלומר $B_n=\bar{B}(a_n,r_n)$ כאשר $B_{n+1}\subseteq B_n$ לכל n]. האם החיתוך $\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$ צריך להיות לא ריק?

⑦ $C[0,\frac12]$ סימן למרחב נורמי של פונקציות רציפות ממשיות ב- $[0,\frac12]$ עם נורמה $\|f\|_\infty=\sup_{0\le x\le 1/2}|f(x)|$ . נגדיר העתקה $T:C[0,\frac12]\to C[0,\frac12]$ ע"י

$$(Tf)(x)=\frac43\int_0^x f(y)dy+x$$

האם T העתקה מכווצת?

## חלק ב׳ יש לענות על 4 שאלות מתוך 6

① מצאו את הערכים מקסימומים ומינימומים מקומיים וגלובליים (אם קיימים) של

$$f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-4xyz$$

② נסח והוכח את משפט פוביני.

③ נסח והוכח את משפט ההעתקה הפתוחה.

④ יהי γ מעגל במישור: $\gamma(t)=\binom{\cos t}{\sin t}$ $(0\le t\le 2\pi)$ ו- P, Q פונקציות

$$P(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos 2xy,\quad Q(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

חשב את האינטגרל הקווי $\int_\gamma Pdx-Qdy$ .

⑤ נגדיר תחום D החסום ע"י $x-y=-1$ , $x-y=1$ , $x+y=1$ , $x+y=3$
חשב את $\int_D (x-y)^2e^{x+y}dxdy$ ע"י מעבר לקואורדינטות $u=x-y, v=x+y$ .

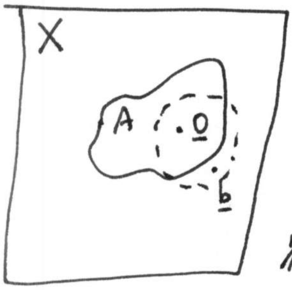
⑥ $$\left\{\begin{array}{l} x^2+xy+t^3-zx=2\\ x-y+t^2+z^2=2\end{array}\right\} (*)$$ בסביבה של $\binom{x}{y}=\binom11$

Ⓐ הוכח שקיימות שתי פונקציות גזירות ברציפות $f_1, f_2$ בסביבה של $\binom11$ כך ש- (*) מתקיים אמ"מ $\binom{z}{t}=f_1\binom{x}{y}$ או $\binom{z}{t}=f_2\binom{x}{y}$

Ⓑ מצא את $f_1\binom11$, $f_2\binom11$, $Df_1\binom11$, $Df_2\binom11$ .

# תשובות למבחן לדוגמא תשס"ב

## חלק א'




① לא. נסמן את $\{(a_n) \mid |a_n|<\frac{1}{n^2}$ לכל $n\}$ ב- $A$

ואת $\{(a_n) \mid \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס$\}$ ב- $X$

מתכנס בהחלט

אז $(0)\in A$ (סדרה קבועה). לכל $\varepsilon>0$, קיים $N$ כך ש- $\frac{1}{N^2}<\frac{\varepsilon}{2}$

לכן $b_n=\begin{cases}\varepsilon/2 & n=N\\ 0 & n\neq N\end{cases}$ סדרה ב- $X$ כך ש- $\left.\begin{array}{l}(b_n)\notin A\\ \|b_n\|<\varepsilon\end{array}\right\}$

---

② לא. $X=\ell_\infty=$ קבוצה של סדרות חסומות $=\{(a_n) \mid \sup_n|a_n|$ קיים$\}$, $\|\underline{a}\|_\infty=\sup_n|a_n|$

$A=[-1,1]^\infty=\{(a_n) \mid -1\le a_n\le 1$ לכל $n\}$

<u>A חסומה</u>: $\|\underline{a}\|\le 1$ לכל $\underline{a}\in A$

<u>A סגורה</u>: $\underline{a}^{(m)}\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}\underline{a}$, $\underline{a}^{(m)}\in A$ ⇐ לכל $\varepsilon>0$, קיים $N$ (תלוי ב- $\varepsilon$) כך ש-

$\|\underline{a}^{(m)}-\underline{a}\|<\varepsilon$ לכל $N<m$

⇐ $|a_n^{(m)}-a_n|<\varepsilon$ לכל $N<m$, לכל $n$

⇐ $a_n^{(m)}\in[-1,1]$ $\xLeftarrow{a_n^{(m)}\to a_n}$ $a_n\in[-1,1]$ ⇐ $\underline{a}\in A$

<u>X שלמה</u>: $(\underline{a}^{(m)})$ סדרת קושי ⇐ לכל $\varepsilon$, קיים $N$ כך ש-

$\|\underline{a}^{(m)}-\underline{a}^{(k)}\|<\varepsilon$ לכל $N<m,k$

⇐ $|a_n^{(m)}-a_n^{(k)}|<\varepsilon$ לכל $N<m,k$, לכל $n$ (*)

⇐ קיים $a_n$ כך ש- $a_n^{(m)}\xrightarrow{m\to\infty}a_n$

⇐ $-1\le a_n^{(m)}\le 1$ ⇐ $-1\le a_n\le 1$ ⇐ $(a_n)\in A$

(*) $\xRightarrow{k\to\infty}$ $|a_n^{(m)}-a_n|\le\varepsilon$ לכל $N<m$, לכל $n$

⇐ $\|\underline{a}^{(m)}-\underline{a}\|\le\varepsilon$ לכל $N<m$

⇐ $\underline{a}^{(m)}\longrightarrow\underline{a}$ □

---

③ לא. $M_{2,3}\cong\mathbb{R}^6$ כמרחב וקטורי וכל הנורמות על $\mathbb{R}^6$ שקולות.

תת קבוצה של $\mathbb{R}^6$ קומפקטית אם"ם היא סגורה וחסומה.

$\begin{pmatrix}\cdot&\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$

<u>חסומות</u>: $\|\underline{A}\|\le 1$

<u>סגורות</u>: אבל $A_n=\begin{pmatrix}1/n&1/n&1/n\\1/n&1/n&1/n\end{pmatrix}$ ⇐ $\|A_n\|=6/n$, $rk\,A_n=1$

לכן לכל $n\ge 6$, $A_n\in A$ אבל $A_n\to\underline{0}\notin A$

כאשר $A=\{\underline{A}\in M_{2,3} \mid \|\underline{A}\|\le 1, rk\,\underline{A}=1\}$

④ לא. במרחב דיסקרטי (קבוצה $X$ שרירותית, $d$ מוגדרת ע"י

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x=y \\ 1 & x\neq y \end{cases}$$ )

הכדורים הסגורים הם: $\bar{B}(x,r) = \begin{cases} \{x\} & r<1 \\ X & r\geq 1 \end{cases}$

הכדורים הפתוחים הם: $B(x,r) = \begin{cases} \{x\} & r\leq 1 \\ X & r>1 \end{cases}$

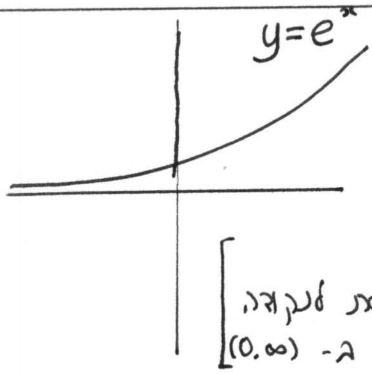
וכל קבוצה גם פתוחה וגם סגורה, לכן $\overline{B(x,r)} = B(x,r)$

ו- $\underset{X}{\bar{B}(x,1)} \neq \underset{\{x\}}{\overline{B(x,1)}}$ אם קיים יותר מאיבר אחד ב-$X$)

$X \neq \{x\}$

---

⑤ לא.




$f: X\to Y$ רציפה.

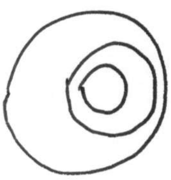
כאשר $X=\mathbb{R}$, $Y=\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$

$X$ שלם אבל $f(X) = (0,\infty)$ לא שלם

[$(\frac{1}{n})$ סדרת קושי
אבל היא לא מתכנסת לנקודה
ב- $(0,\infty)$]

---

⑥ כן. (למרחב נורמי)



$B_n = \bar{B}(a_n,r_n)$ כאשר $B_{n+1}\subset B_n \Leftarrow r_{n+1}\leq r_n$

$(r_n)$ סדרה של מספרים ממשיים חיוביים יורדים

(קיים) $r_n \to r \Leftarrow$ כאשר $n\to\infty$

**למה**
**הוכחה**

$\bar{B}(a,r) \subset \bar{B}(b,s)$ במרחב נורמי $\Leftarrow d(a,b)\leq s-r$

$e=\frac{a-b}{\|a-b\|} \Leftarrow a+re\in\bar{B}(a,r)$ כי $\|re\|=r$ $\Leftarrow a+re\in\bar{B}(b,s) \Leftarrow \|a+re-b\|\leq s$

$\|a+re-b\| = \|(r+\|a-b\|)e\| = r+\|a-b\|$

$\Rightarrow r+\|a-b\|\leq s \Rightarrow \|a-b\|\leq s-r$

□

$\underset{m\geq n}{\bar{B}(a_m,r_m)\subset\bar{B}(a_n,r_n)} \Leftarrow d(a_m,a_n) < r_n-r_m \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0 \Leftarrow \{a_m\}$ סדרת קושי

$\overset{\text{שלמות}}{\Leftarrow}$ קיימת נקודה $a$ כך ש- $a_m\to a$

אבל לכל $n\leq m$, $a_m\in\bar{B}(a_m,r_m)\subset\bar{B}(a_n,r_n) \underset{m\to\infty}{\Leftarrow} a\in\bar{B}(a_n,r_n)$

$\Leftarrow a\in\bigcap_n \bar{B}(a_n,r_n)$, לכן החיתוך לא ריק

---

⑦ כן.

$$\|Tf-Tg\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq \frac12} |(Tf)(x)-(Tg)(x)|$$

$$= \sup_{0\leq x\leq\frac12} \left|\left(\tfrac43\int_0^x f(y)dy + x\right) - \left(\tfrac43\int_0^x g(y)dy + x\right)\right|$$

$$= \sup_{0\leq x\leq\frac12} \underbrace{\left|\tfrac43\int_0^x (f(y)-g(y))\,dy\right|}_{\leq \frac43\int_0^x |f(y)-g(y)|dy \;\leq\; \frac43\int_0^x \|f-g\|_\infty dy}$$

$$= \tfrac43\, x\cdot\|f-g\|_\infty$$

$$\leq \tfrac43\cdot\tfrac12\,\|f-g\|_\infty$$

$$\leq \tfrac23\,\|f-g\|_\infty$$

## חלק ב'

(1) $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-4xyz \Rightarrow \nabla f=\begin{pmatrix}4x^3-4yz\\4y^3-4zx\\4z^3-4xy\end{pmatrix}$

$\nabla f=\underline{0} \Rightarrow \begin{cases}x^3=yz\\y^3=zx\\z^3=xy\end{cases} \Rightarrow x^3y^3z^3=x^2y^2z^2 \Rightarrow xyz=0,1$

אם $xyz=0$:

$x=y=z=0$

$(0,0,0)$

$f=0$

$xyz=1$:

$x^4=1 \Rightarrow x=\pm1$

$y^4=1 \Rightarrow y=\pm1$

$z=\pm1$

$(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$

$f=-1$

נגדיר תיבה $A=[-R,R]\times[-R,R]\times[-R,R]$ כאשר $R$ גדול.

$\left[\begin{array}{l}A \text{ קבוצה קומפקטית}\\ f \text{ רציפה}\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ קיימות נקודות $p,q\in A$ כך ש- $\left.\begin{array}{l}\inf_A f=f(p)\\ \sup_A f=f(q)\end{array}\right\}$

$f$ גזירה ברציפות $\Rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l}\text{או } p\in\partial A\\ \text{או } \nabla f(p)=\underline{0}\end{array}\right\}$ ו- $\left\{\begin{array}{l}\text{או } q\in\partial A\\ \text{או } \nabla f(q)=\underline{0}\end{array}\right\}$

אבל $\partial A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l}|x|=R \text{ או } |y|=R \text{ או } |z|=R\\ -R\le x,y,z\le R \text{ ו- }\end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ לכל $(x,y,z)\in\partial A$, $R^4-4R^3\le f(x,y,z)\le 3R^4+4R^3$

$\Rightarrow \inf_A f=\min\Big(\underbrace{\inf_{\partial A} f}_{\ge R^4-4R^3},\ \underbrace{\text{ערכים מינ' מקומי' של } f \text{ ב- } A}_{=-1}\Big)=\underline{\underline{-1}}$

$\sup_A f \xrightarrow{R\to\infty} \infty$

כי $f(R,R,R)\xrightarrow[R\to\infty]{} +\infty$

$\Rightarrow$ (ערך מינימום של $f$) $=-1$

ערך מקסימום של $f$ לא קיים.

# חלק ב׳

④

$$P(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos 2xy \qquad Q(x,y) = e^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

$$\left.\begin{aligned}\partial P/\partial y &= e^{x^2-y^2}(-2y\cos 2xy - 2x\sin 2xy)\\ \partial Q/\partial x &= e^{x^2-y^2}(2x\sin 2xy + 2y\cos 2xy)\end{aligned}\right\} \Leftarrow$$

<u>דרך א׳</u> משפט Green $\Leftarrow \int_\gamma P\,dx - Q\,dy = \iint_{\text{דיסק}} -\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = 0$

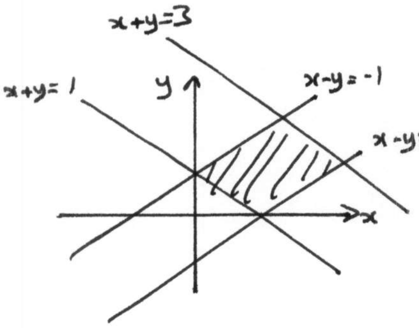
<u>דרך ב׳</u> $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \Leftarrow \binom{P}{Q}$ שדה וקטורי משמר מקומי

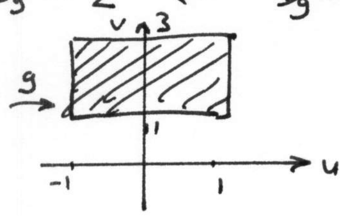
$\overset{\mathbb{R}^2 \text{ קשורה}}{\underset{\text{פשוטה}}{\Leftarrow}} \binom{P}{Q}$ שדה וקטורי משמר

$\Leftarrow \int_\gamma \binom{P}{Q}\cdot d\underline{s} = 0$ ($\gamma$ מסילה סגורה)

⑤

$$\begin{cases} u = x - y\\ v = x + y\\ \binom{u}{v} = g\binom{x}{y}\end{cases} \Rightarrow D_g = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow J_g = 2$$




g חח״ע, גזירה ברציפות, $J_g \neq 0$

$$\begin{cases} f\binom{u}{v} = u^2 e^v\\ A = [-1,1]\times[1,3]\end{cases} \Rightarrow \int_A f \overset{\text{משפט}}{\underset{\text{החלפת משתנים}}{=}} \int_{g^{-1}(A)} (f\circ g)\, J_g$$

$$\int_{[-1,1]\times[1,3]} u^2 e^v\,du\,dv \equiv \int_D (x-y)^2 e^{x+y}\cdot 2\,dx\,dy$$

$$\overset{\text{משפט פוביני}}{=} \int_{-1}^{1}\left(\int_1^3 u^2 e^v\,dv\right)du = \int_{-1}^{1}[u^2e^v]_{v=1}^{v=3}\,du = \int_{-1}^{1}(e^3-e)\,u^2\,du = (e^3-e)\cdot\tfrac{2}{3}$$

לכן $\underline{\underline{\int_D (x-y)^2 e^{x+y}\,dx\,dy = \tfrac{1}{3}(e^3-e)}}$

## חלק ב'

⑥ נגדיר $g$ ע"י

$$g\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^2+xy+t^3-zx-2\\ x-y+t^2+z^2-2\end{pmatrix}$$

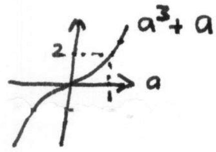
$$g:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$g$ רציפה ברציפות בכל $\mathbb{R}^4$. תנאים ⊛ אומר ש- $g\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\underline{0}$

כאשר $x=y=1$ , ⊛ $\overset{g=0}{\Leftarrow}$

$$\begin{matrix}1+1+t^3-z-2=0\\ 1-1+t^2+z^2-2=0\end{matrix} \Leftarrow \begin{matrix}t^3=z\\ t^2+z^2=2\end{matrix}$$

$$t^2+t^6=2 \Leftarrow$$

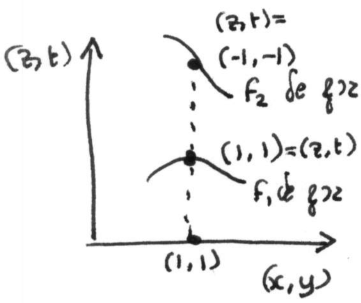



$$t^2=1 \Leftarrow$$

$$z=\pm1 \Leftarrow t=\pm1 \Leftarrow$$

$$\underline{\underline{\begin{pmatrix}z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}}} \Leftarrow$$

$$D_g = \begin{pmatrix}2x+y-z & x & -x & 3t^2\\ 1 & -1 & \underbrace{2z}_{} & \underbrace{2t}_{}\end{pmatrix}$$




$$\det = -2xt-6zt^2$$

$$= \begin{cases}-8 & \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\\ 8 & \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}\end{cases}$$

$(\neq 0)$

משפט הפונקציה הסתומה $\Leftarrow$ קיימות פונקציות $f_1$ ו- $f_2$ כך ש-

$$\begin{pmatrix}z\\t\end{pmatrix}=f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff g=0 \text{ בסביבה של } \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{f_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}z\\t\end{pmatrix}=f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff g=0 \text{ בסביבה של } \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{f_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}}$$

וגם $f_1, f_2$ רציפות ברציפות.

ל- $i=1,2$ אנו יודעים ש- $g\begin{pmatrix}x\\y\\ f_i\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{pmatrix}=0$ $\overset{\text{כלל}}{\underset{\text{השרשרת}}{\Leftarrow}}$ $D_g \circ \begin{pmatrix}I\\ D_{f_i}\end{pmatrix}=0$

$$\begin{pmatrix}2&1&-1&3\\1&-1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\ D_{f_1}\end{pmatrix}=0 \quad f_1$$

$$\Leftarrow \begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&3\\2&2\end{pmatrix}D_{f_1}=0 \Leftarrow$$

$$D_{f_1}=-\begin{pmatrix}-1&3\\2&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}=\frac{-1}{8}\begin{pmatrix}-2&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-1&-5\\5&1\end{pmatrix}}}$$

$$\begin{pmatrix}4&1&-1&3\\1&-1&-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\ D_{f_2}\end{pmatrix}=0 \quad f_2$$

$$\begin{pmatrix}4&1\\1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&3\\-2&-2\end{pmatrix}D_{f_2}=0 \Leftarrow$$

$$D_{f_2}=-\begin{pmatrix}-1&3\\-2&-2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}4&1\\1&-1\end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2&-3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-11&1\\7&3\end{pmatrix}}}$$

# חומר של אינפי מתקדם (1) תשס"ב

## A: מרחבים מטריים

### מרחבים מטריים ונורמיים

הגדרות, קבוצות פתוחות/סגורות, פנים/סגור/שפה, כדורים IV.1

דוגמאות: $\|\cdot\|_p$, $\|\cdot\|_\infty$, $C[a,b]$, שקילות Lipschitz IV.2

### קומפקטיות

הגדרה לפי סדרות, קומפ' $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ חסומה וסגורה, קומפ' ב-$\mathbb{R}^n$ IV.3

קומפ' לפי כיסוי פתוח

### פונקציות רציפות

הגדרה לפי סדרות, מקור של קבוצות פתוחות IV.4

תמונה של קבוצה קומפקטית תחת פונקציה רציפה

מקסימום ומינימום של פונקציה (קומפ' $\to \mathbb{R}$)

### שלמות

סדרות קושי, כדורים סגורים יורדים XI.1

עקרון ההעתקה מכווצת (כווץ $\Rightarrow$ נקודת שבת יחידה) XI.2

דוגמאות

---

## B: חשבון דיפרנציאלי $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

נורמה במרחב של העתקות ליניאריות

גבולות של פונקציות בכמה משתנים X.1

גזירות (הגדרה), נגזרת (העתקה), נגזרות חלקיות

גזירה $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ נגזרות חלקיות קיימות

כלל השרשרת, טור Taylor בכמה משתנים

$\sup\|D_g\| \le M \Rightarrow \|g(x)-g(y)\| \le M\|x-y\|$

משפט הפונקציה ההפוכה (הוכחה ע"י עקרון ההעתקה מכווצת)

משפט ההעתקה הפתוחה

משפט הפונקציה הסתומה X.2

כופלי לגרנג', ערכים מינימום ומקסימום בתחום

---

## C: אינטגרציה על מסילות ושל פונקציות בכמה משתנים

### מסילות

מסילות ב-$\mathbb{R}^n$ בעלות אורך, פרמטר האורך V.1

אינטגרציה על מסילות $\int_\gamma f\,ds$, $\int_\gamma f\cdot ds$ IX.1

שדה משמר מקומי, שדה משמר גלובלי IX.2

### אינטגרציה של פונקציות חסומות בכמה משתנים

הגדרה (ע"י חלוקות, סכום עליון ותחתון, אינטגרל עליון ותחתון)

קבוצות ב-$\mathbb{R}^n$ בעלות מידה אפס V.3

משפט לבג, נפח (מידה של Jordan) XII.1

משפט פוביני, דוגמאות (נפח תחת גרף, גוף סיבוב) XII.2, XII.3

משפט Green (הוכחה בתחום קמור), חילוף משתנים באינטגרל <u>בלי הוכחה</u> XIII.1

# מבחן דוגמא: אינפי מתקדם (1) 80315

**חלק א'** יש לענות על 5 שאלות מתוך 7 ($5\times 5 = 25$ נקודות)

① האם $\{(a_n) \mid \text{לכל } n\ |a_n|<\frac{1}{n^2}\}$ קבוצה פתוחה במרחב מטרי של סדרות ממשיות $(a_n)$ כך ש- $\sum|a_n|$ מתכנס, תחת נורמה $\|(a_n)\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ ?

② האם כל קבוצה סגורה וחסומה של מרחב מטרי שלם צריכה להיות קומפקטית?

③ נגדיר מרחב נורמי $M_{2,3}$ ע"י $M_{2,3} = \{2\times 3$ מטריצות ממשיות$\}$ ו- $\|A\| = \sum|A_{ij}|$. האם $\{A \in M_{2,3} \mid \|A\|\leq 1, \operatorname{rk} A = 1\}$ קומפקטית?

④ האם הסגור של כדור פתוח ברדיוס $a$, במרחב מטרי, צריך להיות כדור סגור ברדיוס $a$?

⑤ האם התמונה רציפה של מרחב שלם גם כן שלם?

⑥ $B_n$ כדורים סגורים יורדים במרחב שלם [כלומר $B_n = \bar{B}(a_n, r_n)$ כאשר $B_{n+1}\subseteq B_n$ לכל $n$]. האם החיתוך $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ צריך להיות לא ריק?

⑦ $C[0,\frac{1}{2}]$ סימן למרחב נורמי של פונקציות רציפות ממשיות ב- $[0,\frac{1}{2}]$ עם נורמה $\|f\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq \frac{1}{2}}|f(x)|$. נגדיר העתקה $T: C[0,\frac{1}{2}]\to C[0,\frac{1}{2}]$ ע"י

$$(Tf)(x) = \frac{4}{3}\int_0^x f(y)dy + x$$

האם $T$ העתקה מכווצת?

**חלק ב'** יש לענות על 4 שאלות מתוך 6

① מצאו את הערכים מקסימומים ומינימומים מקומיים וגלובליים (אם קיימים) של

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$$

② נסח והוכח את משפט פוביני.

③ נסח והוכח את משפט ההעתקה הפתוחה.

④ יהי $\gamma$ מעגל במישור: $\gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ $(0\leq t\leq 2\pi)$ ו- $P, Q$ פונקציות

$$P(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos 2xy, \quad Q(x,y) = e^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

חשב את האינטגרל הקווי $\int_\gamma Pdx - Qdy$.

⑤ נגדיר תחום $D$ החסום ע"י $x-y=-1$, $x-y=1$, $x+y=1$, $x+y=3$. חשב את $\iint_D (x-y)^2 e^{x+y}dxdy$ ע"י מעבר לקואורדינטות $u=x-y,\ v=x+y$.

⑥ $(*)\ \begin{cases} x^2+xy+t^3-zx=2 \\ x-y+t^2+z^2=2\end{cases}$ בסביבה של $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

א) הוכח שקיימות שתי פונקציות גזירות ברציפות $f_1 , f_2$ בסביבה של $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

כך ש- (*) מתקיים אמ"מ $\begin{pmatrix}z\\t\end{pmatrix} = f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ או $\begin{pmatrix}z\\t\end{pmatrix} = f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ב) מצאו את $f_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $f_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $Df_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $Df_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.