אנליזה למהנדסים - פתרון תרגיל 12

7 בינואר 2003

.1

(א)

$$\int_{\sqrt{e}-1}^{e^2-1}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{e}-1}^{e^2-1}\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{dx}=\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{\sqrt{e}-1}^{e^2-1}$$

והצבת הגבולות מסיימת.

(ב) נציב $u=e^{\ln^2 t}$, $\mathrm{du}=e^{\ln^2 t}\cdot\frac{2\ln t}{t}\mathrm{dt}$.

$$\int_{e^{-\sqrt{\ln 8}}}^{e^{\sqrt{\ln 24}}}e^{2\ln^2 t}\sqrt{e^{\ln^2 t}+1}\frac{\ln t}{t}\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int_8^{24}u\sqrt{u+1}\mathrm{du}=$$

נציב $v=\sqrt{u+1}$ ואז $u=v^2-1$ ולכן $\mathrm{du}=2v\mathrm{dv}$.

$$=\int_3^5(v^2-1)\cdot v^2\mathrm{dv}=\left[\frac{v^5}{5}-\frac{v^3}{3}\right]_3^5=543\frac{11}{15}$$

(ג) נסתכל על $f(x)=\ln^3\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

$$f(-x)=\ln^3\left(\frac{2+(-x)}{2-(-x)}\right)=\ln^3\left(\frac{2-x}{2+x}\right)=(\ln(2-x)-\ln(2+x))^3=$$

$$=((-1)(\ln(2+x)-\ln(2-x)))^3=-\ln^3\left(\frac{2+x}{2-x}\right)=-f(x)$$

לכן ל-f יש סימטריה אי-זוגית ולכן אם נסתכל על

$$\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{dx}=-\int_0^{-1}f(x)\mathrm{dx}$$

ונעשה שינוי משתנה $x=-t$, $\mathrm{dx}=-\mathrm{dt}$ אז

$$-\int_0^{-1}f(x)\mathrm{dx}=\int_0^1 f(-t)\mathrm{dt}=-\int_0^1 f(t)\mathrm{dt}$$

ולכן

$$\int_{-1}^{!}\ln^3\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\mathrm{dx}=\int_{-1}^{0}\ln^3\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\mathrm{dx}+\int_0^1\ln^3\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\mathrm{dx}=$$

$$=-\int_0^1\ln^3\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\mathrm{dx}+\int_0^1\ln^3\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\mathrm{dx}=0$$

2. נעשה אינטגרציה בחלקים

$$u = f(x), \mathrm{du} = f'(x)\mathrm{dx}, \mathrm{dv} = \cos(nx)dx, v = \frac{1}{n}\sin(nx)$$

$$\int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{dx} = \left[\frac{f(x)\cdot\sin(nx)}{n}\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)\mathrm{dx}$$

נראה ששני הביטויים שואפים לאפס כאשר n שואף לאינסוף

$$\left|\left[\frac{f(x)\cdot\sin(nx)}{n}\right]_a^b\right| = \left|\frac{f(b)\cdot\sin(nb) - f(a)\cdot\sin(na)}{n}\right| \leq$$

$$\left|\frac{f(b)\cdot\sin(nb)}{n}\right| + \left|\frac{f(a)\cdot\sin(na)}{n}\right| = \frac{|f(b)|\cdot|\sin(nb)|}{n} + \frac{|f(a)|\cdot|\sin(na)|}{n} \leq$$

$$\frac{|f(b)|}{n} + \frac{|f(a)|}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

עבור הביטוי השני, נזכור כי $|f'(x)|$ רציפה ב-$[a,b]$ ולכן יש לה חסם $M > 0$

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)\mathrm{dx}\right| \leq \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)|\cdot|\sin(nx)|\mathrm{dx} \leq \frac{M\cdot(b-a)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

3.

(א) השטח הוא

$$\int_1^3 3x^2\mathrm{dx} - \int_1^3 (-4x^3)\mathrm{dx} = \int_1^3 (3x^2 + 4x^3)\mathrm{dx} =$$

$$= \left[x^3 + x^4\right]_1^3 = 27 + 81 - 1 - 1 = 106$$

(ב) נמצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות, כלומר הנקודה שבה מתקיים $x + 2.5 = \frac{1}{2}x^2 + 1$ כלומר כאשר $x^2 - 2x - 3 = 0$ או בנקודות $x = 3, -1$. לכן השטח המבוקש הוא

$$\int_{-1}^3 (x + 2.5)\mathrm{dx} - \int_{-1}^3 (\frac{1}{2}x^2 + 1)\mathrm{dx} = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x - \frac{1}{6}x^3 - x\right]_{-1}^3 = \frac{16}{3}$$

4.

(א) כדור תלת-מימדי יתקבל על ידי סיבוב חצי מעגל הנתון על ידי הפונקציה $f : [-R, R] \to \mathbb{R}$ כאשר $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$V_f = \pi\int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2\mathrm{dx} = \pi\int_{-R}^R \left(R^2 - x^2\right)\mathrm{dx} = \pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-R}^R =$$

$$= \pi(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

(ב) הטורוס יתקבל על ידי סיבוב המעגל שמרכזו ב (0,) עם רדיוס r כלומר הנתון על ידי המשוואה $x^2 + (y-R)^2 = r^2$. לא נוכל להשתמש בנוסחה ישירות, אלא נחשב על ידי סיבוב חצי המעגל העליון והפחתת הנפח הנוצר על ידי סיבוב חצי המעגל התחתון.

$$V_f = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2} + R)^2 \mathrm{dx} - \pi \int_{-r}^{r} (-\sqrt{r^2 - x^2} + R)^2 \mathrm{dx} =$$

$$= \pi \left[\int_{-r}^{r} \left((r^2 - x^2) + 2R\sqrt{r^2 - x^2} + R^2 \right) \mathrm{dx} - \int_{-r}^{r} \left((r^2 - x^2) - 2R\sqrt{r^2 - x^2} + R^2 \right) \mathrm{dx} \right] =$$

$$= 4\pi R \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \mathrm{dx}$$

ואת האינטגרל הנ"ל עשינו בכיתה.