אנליזה 1 - פתרון תרגיל 11

5 בינואר 2003

1. שאלה 3 מהתרגיל הקודם:

(א)

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{x+1} - \int \frac{\mathrm{dx}}{x+2} = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

(ב)

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{2x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x)^2+1}\mathrm{dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x) + C$$

(ג)

$$\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+4}{x^2-4x+5}\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}\mathrm{dx} + 4 \int \frac{\mathrm{dx}}{(x-2)^2+1} = \frac{3}{2} \ln|x^2-4x+5| + 4\arctan(x-2) + C$$

(ד)

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

הכפלה ופתרון המשוואות נותן לנו

$$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{dx}}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+1}\mathrm{dx} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{dx} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{dx}}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\arctan x + C$$

(ה)

$$\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+1}$$

הכפלה ופתרון המשוואות נותן לנו

$$A = 1, B = -1, C = -1$$

ולכן

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{x(x+1)^2} = \int \frac{\mathrm{dx}}{x} - \int \frac{\mathrm{dx}}{x+1} - \int \frac{\mathrm{dx}}{(x+1)^2} =$$

$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

(ו)

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

הכפלה ופתרון המשוואות נותן לנו

$$A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{1}{2}$$

ולכן

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{dx}}{x+1} - \int \frac{\mathrm{dx}}{x+2} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{dx}}{x+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \ln|x+2| + \frac{1}{2}\ln|x+3| + C$$

2. שאלה 5 מהתרגיל הקודם:

א) נציב $x = y^6$ ואז $\mathrm{dx} = 6y^5\mathrm{dy}$.

$$\frac{6y^5}{y^3+y^2}\mathrm{dy} = 6\int y^3 y + 1\mathrm{dy} = 6\int (y^2 - y + 1 - \frac{1}{y+1})\mathrm{dy} =$$

$$= 2y^3 - 3y^2 + 6y - 6\ln|y+1| + C$$

ב)

$$x - x^2 = \frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}[1 - (2x-1)^2]$$

ולכן

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x - x^2}} = \int \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\mathrm{dx} = \arcsin(2x-1) + C$$

ג) נשלים לריבוע

$$2 + 3x - 2x^2 = \frac{25}{8}[1 - (\frac{4}{5}(x - \frac{3}{4}))^2]$$

ואז:

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{1-(\frac{4}{5}(x-\frac{3}{4}))^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1-(\frac{4}{5}(x-\frac{3}{4}))^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\frac{4}{5}(x-\frac{3}{4})) + C$$

ד) נציב $x = y^6$ ואז $\mathrm{dx} = 6y^5\mathrm{dy}$.

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\mathrm{dx} = 6\int \frac{y^8 - y^5}{y^2+1}\mathrm{dy} = 6\int [y^6 - y^4 - y^3 + y^2 + y - 1 - \frac{y-1}{y^2+1}]\mathrm{dy} =$$

$$= \frac{6}{7}y^7 - \frac{6}{5}y^5 - \frac{3}{2}y^4 + 2y^3 + 3y^2 - 6y - 3\ln|y^2+1| + 6\arctan y + C$$

.3

(א)

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n})\left(a+(i+1)\frac{b-a}{n}-(a+i\frac{b-a}{n}\right) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} e^{a+i\frac{b-a}{n}}\left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1} e^{a}\cdot e^{i\frac{b-a}{n}}\right) = \frac{b-a}{n}e^{a}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{i}\right) =$$

$$\frac{b-a}{n}e^{a}\left(\frac{\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)^{n}-1}{\left(e^{\frac{b-a}{n}}\right)-1}\right) = \frac{b-a}{n}e^{a}\left(\frac{e^{b-a}-1}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}\right) =$$

$$(e^{b-a}-1)e^{a}\left(\frac{\frac{b-a}{n}}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}\right) = (e^{b}-e^{a})\left(\frac{\frac{b-a}{n}}{e^{\frac{b-a}{n}}-1}\right)$$

כעת נחשב את הגבול כאשר $n \to \infty$. שימו לב כי אם נראה שלביטוי $\frac{\frac{b-a}{x}}{e^{\frac{b-a}{x}}-1}$ יש גבול כאשר $x \to \infty$ ונחשב אותו, אז סיימנו, מיחידות הגבול. הביטוי מקיים את תנאי לופיטל "$\frac{0}{0}$" ולכן

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{b-a}{x}}{e^{\frac{b-a}{x}}-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a-b}{x^2}}{\frac{a-b}{x^2}e^{\frac{b-a}{x}}} = 1$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1}-x_i) = e^{b}-e^{a}$$

(ב) טעות בתרגיל - $f(x)=x^m$.

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{i}\right)\left(a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{i+1}-a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{i}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a^{m}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{im}{n}}\left(a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{i+1}-a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{i}\right) = a^{m+1}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{im+i+1}{n}}-\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{im+i}{n}}\right) =$$

$$= a^{m+1}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{im+i}{n}} = a^{m+1}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)\sum_{i=0}^{n-1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}\right)^{i} =$$

$$= a^{m+1}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)\left[\frac{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}\right)^{n}-1}{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}\right)-1}\right] = a^{m+1}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1\right)\left[\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{m+1}-1}{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}\right)-1}\right] =$$

$$= (b^{m+1}-a^{m+1})\frac{\sqrt[n]{\frac{b}{a}}-1}{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}\right)-1}$$

כעת נחשב את הגבול כאשר $n \to \infty$. שימו לב כי אם נראה שלביטוי $\frac{\sqrt[x]{\frac{b}{a}}-1}{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{x}}\right)-1}$ יש גבול כאשר $x \to \infty$ ונחשב אותו, אז סיימנו, מיחידות הגבול. הביטוי מקיים את תנאי לופיטל "$\frac{0}{0}$" ולכן אם נגזור נקבל כי

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[x]{\frac{b}{a}}-1}{\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{x}}\right)-1} = \frac{1}{m+1}$$

ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1}-x_i) = \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}$$

4. נחלק את המונה והמכנה של

$$\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$$

ב-n^2 ונקבל כי

$$\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right)\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

כאשר $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,$x_i = \frac{i}{n}$,$c_i = x_i$.

זהו סכום רימן עבור הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, הפונקציה רציפה ולכן קיים לה אינטגרל, ובגבול מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{dx} = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

5. **טענה:** $\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = (b-a)\max_{x\in[a,b]} f(x)$ **אםם** $f(x)$ קבועה.

הוכחה:

אם f קבועה, הטענה ברורה.

נסמן $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. נניח כי $\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = (b-a)\max_{x\in[a,b]} f(x)$, ונניח בשלילה כי f לא קבועה. תהי $c \in [a,b]$ כך ש-$f(c) < M$. מרציפות קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $d \in [c-\delta, c+\delta]$,$f(d) < M$.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{dx} = \int_a^{c-\delta} f(x)\mathrm{dx} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\mathrm{dx} + \int_{c+\delta}^{b} f(x)\mathrm{dx} \leq$$

$$\leq M(c-\delta-a) + M(b-c+\delta) + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\mathrm{dx} < M(b-a)$$

וזו סתירה.