אנליזה 1 - פתרון תרגיל 10

5 בינואר 2003

.1

(א)

$$\int \sqrt[5]{x^6}\mathrm{dx} = \int x^{\frac{6}{5}}\mathrm{dx} = \frac{5}{11}x^{\frac{11}{5}} + C$$

(ב)

$$\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{dx} = \int \frac{x^4-x^2-2}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{dx} = \int \left(x^{\frac{10}{3}} - x^{\frac{4}{3}} - 2x^{\frac{-2}{3}}\right)\mathrm{dx}$$

$$= \frac{3}{13}x^{\frac{13}{3}} - \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + C$$

(ג)

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt[4]{x}} = \int x^{-\frac{1}{4}}\mathrm{dx} = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$$

(ד)

$$\int \frac{dx}{x^2+7} = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{7}}}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}\mathrm{dx} = \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right) + C$$

(ה)

$$\int \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3\mathrm{dx} = \int \left(a^2 - 3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2\right)\mathrm{dx} =$$

$$a^2x-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{9}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}x^3+C$$

(ו)

$$\int \tan x\text{dx}=\int \frac{\sin x}{\cos x}=-\int \frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C$$

(ז)

$$\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\text{dx}=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)\text{dx}=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C$$

(ח)

$$\int \tan^2 x\text{dx}=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\text{dx}=\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\text{dx}=$$
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}-\int \text{dx}=\tan x-x+C$$

.2

(א)

$$u=x,\text{du}=1,\text{dv}=\sin x,v=-\cos x$$

$$\int x\sin x\text{dx}=-x\cos x+\int \cos x\text{dx}=-x\cos x+\sin x+C$$

(ב)

$$u=\cos x,\text{du}=-\sin x,\text{dv}=x\sin x,v=-x\cos x+\sin x$$

$$\int x\sin x\cos x\text{dx}=-x\cos^2 x+\cos x\sin x-\int x\cos x\sin x\text{dx}+\int \sin^2 x\text{dx}$$

מכך נובע כי

$$2\int x\sin x\cos x\text{dx}=-x\cos^2 x+\cos x\sin x+\frac{x-\sin x\cos x}{2}$$

ולכן

$$\int x\sin x\cos x\mathrm{dx}=\frac{-x\cos^2 x+\cos x\sin x}{2}+\frac{x-\sin x\cos x}{4}+C$$

ג)

$$u=\ln x,\mathrm{du}=\frac{1}{x},\mathrm{dv}=1,v=x$$

$$\int\ln x\mathrm{dx}=x\ln x-\int\mathrm{dx}=x\ln x-x+C$$

ד)

$$u=\arctan x,\mathrm{du}=\frac{1}{1+x^2},\mathrm{dv}=1,v=x$$

$$\int\arctan x\mathrm{dx}=x\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{dx}=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

ה)

$$u=x,\mathrm{du}=1,\mathrm{dv}=\frac{1}{\sin^2 x},v=-\cot x$$

$$\int\frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{dx}=-x\cot x+\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{dx}=-x\cot x+\ln|\sin x|+C$$

ו)

$$u=x^2,\mathrm{du}=2x,\mathrm{dv}=e^{3x},v=\frac{1}{3}e^{3x}$$

$$\int x^2e^{3x}\mathrm{dx}=\frac{x^2e^{3x}}{3}-\frac{2}{3}\int xe^{3x}\mathrm{dx}=$$

נעשה שוב אינטגרציה בחלקים על האינטגרל החדש

$$u=x,\mathrm{du}=1,\mathrm{dv}=e^{3x},v=\frac{1}{3}e^{3x}$$

$$=\frac{x^2e^{3x}}{3}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{9}\int e^{3x}\mathrm{dx}=\frac{x^2e^{3x}}{3}-\frac{2}{9}xe^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+C$$

(ז)

$$u = \ln^2 x, \mathrm{du} = \frac{2\ln x}{x}, dv = 1, v = x$$

$$\int \ln^2 x \mathrm{dx} = x\ln^2 x - 2\ln x \mathrm{dx} = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

(ח)

$$u = \cos x, \mathrm{du} = -\sin x, \mathrm{dv} = e^x, v = e^x$$

$$\int \cos x \ e^x \mathrm{dx} = \cos x \ e^x + \int \sin \ x e^x \mathrm{dx} =$$

נעשה שוב אינטגרציה בחלקים על האינטגרל החדש

$$u = \sin x, \mathrm{du} = \cos x, \mathrm{dv} = e^x, v = e^x$$

$$= \cos x \ e^x + \sin x e^x - \int \cos x \ e^x \mathrm{dx}$$

ולכן

$$\int \cos x \ e^x \mathrm{dx} = e^x \frac{\cos x + \sin x}{2} + C$$

(ט)

$$u = \sin x, \mathrm{du} = \cos x, \mathrm{dv} = e^x, v = e^x$$

$$\int \sin x \ e^x \mathrm{dx} = \sin x \ e^x - \int \cos x \ e^x \mathrm{dx} =$$

נעשה שוב אינטגרציה בחלקים על האינטגרל החדש

$$u = \cos x, \mathrm{du} = -\sin x, \mathrm{dv} = e^x, v = e^x$$

$$\sin x \ e^x - \cos x \ e^x - \int \sin x \ e^x \mathrm{dx}$$

ולכן

$$\int \sin x \ e^x \mathrm{dx} = e^x \frac{\sin x - \cos x}{2} + C$$

(י)

$$u = \sin\ln x, \mathrm{du} = \frac{\cos\ln x}{x}, \mathrm{dv} = 1, v = x$$

$$\int \sin\ln x = x\sin\ln x - \int \cos\ln x \mathrm{dx} =$$

נעשה שוב אינטגרציה בחלקים על האינטגרל החדש

$$u = \cos\ln x, \mathrm{du} = \frac{-\sin\ln x}{x}, \mathrm{dv} = 1, v = x$$

$$= x\sin\ln x - x\cos\ln x - \int \sin\ln x \mathrm{dx}$$

ולכן

$$\int \sin\ln x \mathrm{dx} = x\frac{\sin\ln x - \cos\ln x}{2} + C$$

3. פתרון שאלה שלוש יופיע בפתרון תרגיל 11.

4.

(א) נציב $y = 2x + 5$ ולכן $x = \frac{y-5}{2}, \mathrm{dx} = \frac{1}{2}\mathrm{dy}$.

$$\int x(2x+5)^10\mathrm{dx} = \int \frac{y-5}{2}y^{10}\frac{\mathrm{dy}}{2} = \frac{1}{4}\int (y^{11} - 5y^{10})\mathrm{dy} =$$

$$= \frac{1}{48}y^{12} - \frac{5}{44}y^{11} + C$$

כאשר $y = 2x + 5$.

(ב) נציב $y = e^x + 1$, ואז $e^x = y - 1$, $\mathrm{dx} = \frac{\mathrm{dy}}{e^x} = \frac{\mathrm{dy}}{y-1}$.

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\mathrm{dx} = \int \frac{(y-1)^2\frac{\mathrm{dy}}{y-1}}{\sqrt{y}} = \int y - 1\sqrt{y}\mathrm{dy} = \int y^{\frac{1}{2}}\mathrm{dy} - \int y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{dy} =$$

$$= \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - 2y^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{2}} - 2(e^x+1)^{\frac{1}{2}} + C$$

ג) נציב $y=\cos x$, ולכן $\mathrm{dy}=-\sin x\mathrm{dx}$.

$$\frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{dx}=-\int\frac{1-\cos^2 x)(-\sin x\mathrm{dx})}{\cos^{\frac{1}{2}} x}=-\int\frac{1-y^2}{y^{\frac{1}{2}}}\mathrm{dy}=$$

$$=-\int y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{dy}+\int y^{\frac{3}{2}}\mathrm{dy}=-2y^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{2}y^{\frac{5}{2}}+C=-2\cos^{\frac{1}{2}} x+\frac{5}{2}\cos^{\frac{5}{2}} x+C$$

ד) נציב $y=\arcsin x$, אז $\mathrm{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\int\frac{\arcsin^6 x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{dx}=\int y^6\mathrm{dy}=\frac{1}{7}y^7+C=\frac{1}{7}\arcsin^7 x+C$$

ה) נציב $y=\sqrt{1+x^2}$,ולכן $y^2=1+x^2$ ואז $y\mathrm{dy}=x\mathrm{dx}$ ומכך נובע כי $\mathrm{dx}=\frac{y\mathrm{dy}}{\sqrt{y^2-1}}$.

$$\int\frac{\mathrm{dx}}{x\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\mathrm{dy}}{y^2-1}=\frac{1}{2}\left[\int\frac{\mathrm{dy}}{y-1}-\int\frac{\mathrm{dy}}{y+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}\right|+C$$