אנליזה למהנדסים - פתרון תרגיל 9

29 בדצמבר 2002

.1

(א) טורי טיילור של הפונקציות הינם

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

ולכן לפי הטענה שראינו בכיתה נכפיל וניקח רק את המונומים ממעלה ≤ 6 ונקבל

$$1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{65}{24}x^4 + \frac{163}{60}x^5 + \frac{1957}{720}x^6$$

(ב) הטור של $\sin x$ הוא

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

לפי הטענה מהכיתה הפיתוח של $\sin(x^2)$ מסדר שש מתקבל מהצבת x^2 בטור למעלה (עד האיבר השני), כלומר הטור עד האיבר מסדר 6 הוא

$$x^2 - \frac{x^6}{3!}$$

ושוב נכפיל טורים כמו בסעיף הקודם כדי לקבל את הטור

$$x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3!} - \frac{3}{24}x^6$$

.2

(א) f גזירה אינסוף פעמים כי מכך ש $f^{(2)}(x) = f(x)$ נובע קיום של $f'(x)$ ולכן $f^{(3)}(x) = (f^{(2)}(x))' = f'(x)$ ובאופן דומה נובע קיום נגזרת מכל סדר. נסתכל על פולינום טיילור של f מסדר n סביב 0:

$$p_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ומהתנאי $f(0) = f'(0) = 0$ והתנאי $f^{(2)}(x) = f(x)$ נובע כי $p_n(x) = 0$ לכל n. כלומר $f(x) = R_n(x)$, כאשר $R_n(x)$ השארית מסדר n של הפיתוח, לכל $x \in \mathbb{R}$. נקבע $x \neq 0$, ובה"כ $x > 0$, יש $c \in (0, x)$ כך ש- $f(x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$. זכרו כי אם n זוגי $f^{(n+1)}(x) = f'(x)$ ואחרת $f^{(n+1)}(x) = f(x)$. f, f' פונקציות רציפות בקטע הסגור $[0, x]$ ולכן חסומות שם, וניתן לקחת חסם משותף M לשניהם (הגדול מבין שני החסמים) ולכן זהו החסם לנגזרת מכל סדר ב-$[0, x]$. נסתכל על השארית $R_n(x)$ לאחר שקבענו את x ונשאיף את n לאינסוף

$$|f(x)| = |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\right| |x|^{n+1} \leq M \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(ב) נגדיר $g(x) = f(x) - ae^x - be^{-x}$. $g'(x) = f'(x) - ae^x + be^{-x}$, $g^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) - ae^x - be^{-x}$ ולכן $g^{(2)}(x) = g(x)$ וכדי להשתמש בטענה הקודמת נרצה כי $g(0) = g'(0) = 0$.

$$0 = g(0) = f(0) - ae^0 - be^{-0} = f(0) - a - b$$

$$0 = g'(0) = f'(0) - ae^0 + be^{-0} = f'(0) - a + b$$

כלומר קבלנו שתי משוואות

$$a + b = f(0)$$

$$a - b = f'(0)$$

וויש למשוואות אלו פתרון יחיד

$$a = \frac{f(0) + f'(0)}{2}, b = \frac{f(0) - f'(0)}{2}$$

ואז תנאי הטענה הקודמת מתקיימים ולכן $g(x) = 0$ לכל x וסיימנו.

3. פתרון מלא יתקבל בתרגול.

4. נסתכל על $f(x)=x^3+px$ ונמצא איפה נקודות המינימום והמקסימום ואת ערכי הפונקציה בהם. $f'(x)=3x^2+p$ ולכן $f'(x)=0$ אםם $3x^2+p=0$ אםם $x^2=-\frac{p}{3}$.

אם $p>0$ אין נקודות התאפסות של הנגזרת והיא חיובית תמיד ולכן הפונקציה עולה ממש בכל התחום. הראנו כבר כי יש פתרון אחד לפחות אבל לא יכול להיות יותר מזה במקרה ש-$p>0$, כי אחרת יהיה אפס לנגזרת.

אם $p=0$, $f(x)=x^3$ ולכן יש פתרון אחד כי הפונקציה מונטונית עולה ממש בכל תחומה.

אם $p<0$ אזי יש שני פתרונות ל-$x^2=-\frac{p}{3}$, והם $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$. נסתכל על הנגזרת השניה, $f^{(2)}(x)=6x$ ולכן יש נקודת מינימום ב-$a=\sqrt{-\frac{p}{3}}$ ונקודת מקסימום ב-$b=-\sqrt{-\frac{p}{3}}$.

שימו לב כי $f(b)>f(a)$ תמיד. אם $f(b)\leq 0$ אזי יש פתרון אחד שמתקבל על הקרן (a,∞). אם $f(a)\geq 0$ אזי יש פתרון אחד שמתקבל על הקרן $(-\infty,b)$. אם $f(b)=0$ אז גם b פתרון. אם $f(a)=0$ אז גם a פתרון. המקרה היחיד שנשאר הוא המקרה שבו $f(b)>0>f(a)$ ואז ממשפט ערך הביניים יש שלושה פתרונות. שימו לב שכל שלושת המקרים נקבעים ביחידות על ידי ערכו של q.

5.

(א) נסתכל על הפונקציה $\ln(x)$. לפונקציה זו נגזרת $\frac{1}{x}$ ולכן היא מונוטונית עולה ממש על תחום הגדרתה. לכן $\pi^e<e^\pi$ אםם $\ln(\pi^e)<\ln(e^\pi)$ אםם $e\ln(\pi)<\pi\ln(e)$ אםם $\frac{\ln(\pi)}{\pi}<\frac{\ln(e)}{e}$.

לכן נוכל לקבל את התשובה מחקירת $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$. אם נראה שהיא מונוטונית יורדת ממש על $[e,\pi]$ נסיים. $f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$ שימו לב שעבור $x>e$, $f'(x)<0$ ולכן הפונקציה יורדת ממש ולכן מתקיים אי-השוויון.

(ב) גם כאן, $a^b=b^a$ אםם $\frac{\ln(a)}{a}=\frac{\ln(b)}{b}$. הפונקציה מונוטנית עולה ממש עד e, הפונקציה מונוטונית יורדת ממש על התחום (e,∞), ולכן פתרונות לשוויון קיימים רק עבור $a<e$,$b>e$. ערכים אפשריים ל-a הינם 1 או 2. 1 אינו אפשרי כי $1^b=1\neq b^1$, לכן $a=2$, ואם נבדוק, $2^4=4^2$ ולכן סיימנו.