אנליזה למהנדסים - פתרון תרגיל 8

29 בדצמבר 2002

1. קיום פתרון למשוואה שקול למציאת אפס של $f(x) = x - a\sin x - b$. $|a\sin x| < 1$ ולכן אם נקח $x < b-1$ נקבל כי $f(x) < 0$, ואם נקח $x > b+1$ נקבל כי $f(x) > 0$ ולכן ממשפט ערך הביניים יש $c \in [b-1, b+1]$ כך ש-$f(c) = 0$. נניח שהיו שני פתרונות, אזי ממשפט רול היה גם אפס לנגזרת בינהם. אבל $f'(x) = 1 - a\cos x > 0$ וזו סתירה.

2.

(א) יהי $\varepsilon > 0$ ונקח $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ אז אם $|x-y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| < M \cdot |x-y| < M\delta = \varepsilon$$

(ב) נעריך את ההפרש

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \left|(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right| = \left|\frac{x-y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot |x-y|$$

לכן אם יש קבוע ליפשיץ M אזי $M > \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ לכל $x, y \in [0,1]$ אבל מכיוון ש-x, y קטנים כרצוננו אזי $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ גדול כרצוננו ולכן אין M כזה.

(ג) יהיו x, y כלשהם, אזי ממשפט לגרנג' יש $c \in (x,y)$ כך ש-$|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x-y|$. יהי M החסם על הנגזרת, אזי $|f(x) - f(y)| = |f'(c)| \cdot |x-y| \le M \cdot |x-y|$ כלומר f ליפשיצית עם קבוע M, ולכן רציפה במ"ש.

3.

(א) ישירות מלופיטל "$\frac{\infty}{\infty}$":

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$$

(ב) f גזירה באפס ולכן $f'(0)=f'_-(0)=f'_+(0)$.

$$f'_+(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

$$f'_-(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(-x)-f(0)}{-x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{-x}=-f'_+(0)$$

ולכן $f'_+(0)=-f'_+(0)=0$.

(ג) ממשפט לגרנג', לכל x יש c, $x<c<x+1$ כך ש-

$$|f(x+1)-f(x)|=|f'(c)|\cdot|x+1-x|=|f'(c)|$$

מכיוון ש-$\lim_{x\to\infty}f'(x)=0$ לכל $\varepsilon>0$ יש $N>0$ כך שלכל $x>N$ $|f'(x)|<\varepsilon$ ולכן עבור $x>N$ $|f(x+1)-f(x)|<\varepsilon$ ולכן סיימנו.

(ד) נגדיר $h(x)=f(x)-g(x)$ אזי h גזירה ב-(a,b). $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ ולכן $h(x)=c$ וסיימנו.

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ על ידי n הפעלות של לופיטל "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

ולכן סיימנו כי אם $\sum_{k=0}^n a_kx^k$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{e^x}=\sum_{k=0}^n a_k\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{e^x}=0$$

5.

(א) לופיטל "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$$

ב)

$$\lim_{x\to 0} e^{ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}$$

לופיטל "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{2x} = -\lim_{x\to 0}\frac{1}{2cos^2(x)} = -\frac{1}{2}$$

ולכן

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$