אנליזה למהנדסים (1) - פתרון תרגיל 7

1.4.2002

1. גזירה לפי ההגדרה בנק' $a \in \mathbb{R}$:

(א) $f(x) = 3x^3 + x - 1$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{3(a+h)^3 + (a+h) - 1 - 3a^3 - a + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{9a^2h + 9ah^2 + 3h^3 + h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}(9a^2 + 9ah + 3h^2 + 1) = 9a^2 + 1$$

(ב) $f(x) = \sqrt{2x+3}$, $x > -\frac{3}{2}$ נחשב על ידי הכפלה בצמוד

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(a+h)+3} - \sqrt{2a+3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(a+h)+3-(2a+3)}{h(\sqrt{2(a+h)+3} + \sqrt{2a+3})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{2(a+h)+3} + \sqrt{2a+3})} = \frac{1}{\sqrt{2a+3}}$$

(ג) $f(x) = cos^2(x)$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2(a+h) - \cos^2(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cos(a+h) - cos(a))(cos(a+h) + cos(a))}{h}$$

כעת, נשתמש בזהויות הטריגונומטריות הבאות:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

נחסר אותן ונקבל כי $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$
אם ניקח את המשוואות $\alpha - \beta = a + h$, $\alpha + \beta = a$ נקבל כי $\alpha = \frac{2a+h}{2}$, $\beta = -\frac{h}{2}$ ואז נציב בביטוי המקורי ונקבל כי

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(\frac{2a+h}{2})\sin(-\frac{h}{2})(cos(a+h) + cos(a))}{h} = \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{2a+h}{2})\sin(\frac{h}{2})(cos(a+h)+cos(a))}{-\frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \cdot \sin(\frac{2a+h}{2})(cos(a+h) + cos(a))$$

$$= -2\cos a \sin a$$

.2

$$f_1'(x) = \frac{(2x+3)(2x+2)-(x^2+2x-1)(2)}{(2x+3)^2} = \frac{4x^2+10x+6-2x^2-4x+2}{(2x+3)^2} = \frac{2x^2+6x+8}{(2x+3)^2}$$

נגזרת של מנה (כמובן רק בתחום הגדרתה)

$$f_2'(x) = -3\cos^2(x)\sin(x), \quad f_3'(x) = -3\sin(x^3)x^2$$

לפי כלל השרשרת

$$f_4'(x) = (4x-5)e^x + (2x^2-5x+1)e^x = (2x^2-x-4)e^x$$

$$f_5'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+c}}(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+c}})$$

$$f_6'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{e^x}{e^x+1})^2}}\frac{e^x(e^x+1)-e^{2x}}{(e^x+1)^2}$$

$$f_7'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}(-\frac{1}{x^2}) = 0$$

$$f_8'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\tan(\frac{x}{2})}}\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}\frac{1}{2}$$

$$f_9'(x) = (e^{\log a^x})' = (e^{x\log a})' = e^{x\log a}\log a = a^x \log a$$

$$f_{10}'(x) = \begin{cases} 0 & \alpha = 0 \\ (e^{\log x^\alpha})' = (e^{\alpha \log x})' = e^{\alpha\log x}\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} & \alpha \neq 0 \end{cases}$$

$$f_{11}'(x) = (e^{\log x^x})' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}(\frac{x}{x}+\log x) = x^x(1+\log x)$$

.3 נשים לב כי

$$f(x) = \begin{cases} x+a+x-a = 2x & x > a \\ x+a+a-x = 2a & -a \leq x \leq a \\ -x-a+a-x = -2x & x < -a \end{cases}$$

לכן f גזירה בכל נקודה למעט (אולי) ב $x = a, -a$. נראה כי בנקודות אלו f אכן אינה גזירה. מספיק שנראה זאת ב-a כי $f(x) = f(-x)$ ולכן התוצאה תהיה זהה ב $-a$.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{2(a+h)-2a}{2} = 2 \neq \lim_{h=\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 0$$

4. ברור כי הפונקציה גזירה בכל נקודה למעט 0, כי אלו פונקציות אלמנטריות.
נבדוק ב - 0:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f_{m,n}(0+h)-f_{m,n}(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f_{m,n}(h)}{h}=\lim_{h\to 0}h^{n-1}\sin\frac{1}{h^m}$$

וגבול זה קיים אסם $n>1$ וזה כי $|\mathrm{h}^{n-1}| \leq |h^{n-1}\sin\frac{1}{h^m}|$ ו- $n>1 \Leftrightarrow 0 \longrightarrow_{h\to 0} |h^{n-1}|$,
כי אחרת נקח סדרות $x_k=(\frac{1}{2\pi k})^{\frac{1}{m}}$ ו- $y_k=(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k})^{\frac{1}{m}}$ אוז $f(x_k)\to 0$ אבל $f(y_k)\to 1$, למרות ששתי הסדרות שואפות ל -0.

5. בכל נקודה $x\neq 2$ הפונקציה גזירה כפונקציה אלמנטרית, לכן נבדוק גזירות ב $x=2$ כלומר נבדוק באלו תנאים הנגזרת מימין שווה לנגזרת משמאל. נבדוק משמאל:

$$f_{-}^{'}(2)=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{e^{2+h}-e^2}{h}$$

וזו בברור הנגזרת של e^x משמאל בנקודה 2, ולכן $f_{-}^{'}(x)=e^2$.

$$\begin{aligned}f_{+}^{'}(x) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{a(2+h)^2+b(2+h)+3-e^2}{h}\\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{ah^2+4ah+4a+2b+bh+3-e^2}{h}\\ &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}(\frac{4a+2b+3-e^2}{h}+(ah+b+4a))\end{aligned}$$

כעת, כדי שיהיה קיים הגבול צריך כי מונה הביטוי $\frac{4a+2b+3-e^2}{h}$ יתאפס כי אחרת הביטוי ישאף לאינסוף, לכן נקבל משוואה ראשונה שהיא $4a+2b+3-e^2=0$. בהנחה ששוויון זה מתקיים, אזי נדרוש כי $\lim_{h\to 0}ah+b+4a=e^2$ וזה קורה אסם $b+4a=e^2$. לכן יש לנו שתי משוואות בשני נעלמים וניתן לפתור עבור a,b .

6.

(א) $\sin$ גזירה ברציפות בכל הישר ולכן לפי משפט לגרנג', לכל $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha<\beta$ קיים c,$\alpha<c<\beta$ כך ש-

$$\frac{\sin(\beta)-\sin(\alpha)}{\beta-\alpha}=(\sin)'(c)=\cos(c).$$

זה בוודאי נכון גם בערך מוחלט ולכן

$$|\sin(\beta)-\sin(\alpha)|=|\cos(c)||\beta-\alpha|\leq|\beta-\alpha|$$

כאשר אי-השויון נובע מכך ש-$|\cos(x)|\leq 1$ לכל x.

(ב) כדי להוכיח את אי-השוויון נסתכל על הפונקציה $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$. פונ' זו גדירה ברציפות בכל תחום הגדרתה עם נגזרת $f'(x)=\frac{1}{1+x}$.
כש-$x=0$ אי-השויון מיידי. נסתכל לכן על שני התחומים $(-1,0),(0,\infty)$. אם $x<0$ אז לפי משפט לגרנז' יש c, $x<c<0$ כך ש $f'(c)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, כלומר ש - $\frac{1}{1+c}=\frac{\ln(1+x)}{x}$.
בנוסף מ- $-1<x<c<0$ נובע כי $0<1+x<1+c<1$ ולכן $1<\frac{1}{1+c}<\frac{1}{1+x}$, כלומר $1<\frac{\ln(1+x)}{x}<\frac{1}{1+x}$ והכפלה ב-x,$x<0$ תתן את אי-השוויון הנדרש.
עבור $x>0$ נקבל ממשפט לגרנג' באותו אופן כי $\frac{1}{1+c}=\frac{\ln 1+x}{x}$ עבור $0<c<x$. ולכן באותו אופן $1>\frac{\ln(1+x)}{x}>\frac{1}{1+x}$ והכפלה ב-x תסיים.