אנליזה למהנדסים (1) - פתרון תרגיל 6

27.11.2002

.1

(א) $\mathbb{R} \to [-2,3] : f(x)$, $f(x) = x^2 + 2x + 5$. יהי $\varepsilon > 0$, נקח $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$, אם $|x-y| < \delta$ אז
$|x^2+2x+5-y^2-2y-5| = |(x-y)(x+y)+2(x-y)| \leq |x-y||x+y|+2|x-y| < \delta|x|+\delta|y|+2\delta \leq 8\delta = \varepsilon$.

(ב) $\mathbb{R} \to [0,\infty) : f(x)$, $f(x) = e^x$. נקח $\varepsilon_0 = 1$, ויהי $\delta > 0$ כלשהו,

$$|e^x - e^y| = |e^y||e^{x-y} - 1|$$

נקח y, $x = y + \frac{\delta}{2}$, אז $|x-y| = \frac{\delta}{2} < \delta$ ו- $e^{x-y} = e^{\frac{delta}{2}}$ קבוע עבור ה-δ שנקבע, ולכן ניתן לסמן $\eta = |e^{x-y} - 1|$. $lim_{y\to\infty} e^y = \infty$ ולכן קיים y_0 כך ש- $e^{y_0} \geq \frac{\varepsilon}{\eta}$ ולכן עבור y_0 ו-$x_0 = y_0 + \frac{\delta}{2}$

$$|e^{x_0} - e^{y_0}| = |e^{y_0+\frac{\delta}{2}} - e^{y_0}| = |e^{y_0}||e^{\frac{\delta}{2}} - 1| \geq \frac{\varepsilon}{\eta} \cdot \eta = \varepsilon.$$

שימו לב שניצלנו את העובדה כי ניתן להגדיל את x, y כרצוננו כאשר אנחנו משאירים את ההפרש בינהם קטן מ-δ.

2. נמצא את הפונקציה הגבולית. עבור x קבוע $\sin^2(x)$ קבוע ולכן

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2(x)}{n} = \sin^2(x) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

, כלומר הפונקציה הגבולית היא $\mathbb{R} \to [0,1] : f$, $f(x) = 0$. יהי $\varepsilon > 0$, קיים N כך ש-$\frac{1}{N} < \varepsilon$, ואז עבור $n > N$

$$|f_n(x) - f(x)| = |\frac{\sin^2(x)}{n}| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

כנדרש.

.3

(א)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

הגבול עצמו הוא ניחוש מהשוואת מעלות המונה והמכנה.

$$0 < \left|xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{x^3y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3y}{x^2}\right| + \left|\frac{x^3y}{y^2}\right| = 2|xy| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

ב)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} .$$

כאן ננחש שאין גבול מאותה סיבה. שימוש בהצבה $y=ax$ לא יעבוד, ולכן ננסה את ההצבה $y=ax^2$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{ax^4}{x^4+a^2x^4} = \frac{a}{1+a^2}$$

ולכן כאמור אין גבול, כי הערך תלוי בכיוון שממנו אנו שואפים ל-$(0,0)$.

.4

א) $\sin(x^2+y)$.

זוהי הרכבה של פונקציות רציפות (כאשר x^2+y רציפה כסכום של רציפות) ולכן רציפה.

ב) $f(x) = \begin{cases} 0 & (x,y)=(0,0) \\ \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$.

כאן, בכל נקודה שאיננה אפס, המנה מוגדרת ולכן הפונקציה רציפה כמנה של פונקציות רציפות.
נבדוק כי בגבול ב- $(0,0)$ הינו 0.

$$0 \le \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2}\right| + \left|\frac{y^3}{y^2}\right| = |x|+|y| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$