אנליזה למהנדסים (1) - פתרון תרגיל 5

6.11.2002

.1

(א) $x^2\sin(x)$ רציפה בכל הישר כמכפלה של פונקציות רציפות, $x\cdot x\cdot\sin(x)$.

(ב) $\sin(x^2)$ היא הרכבה של פונקציות רציפות ולכן רציפה, ולכן הפונקציה רציפה כמכפלה של פונקציות רציפות.

(ג) $\frac{\sin(x)}{x}$ מוגדרת כאשר $x\neq 0$ ולכן רציפה שם כמנה של פונקציות רציפות. אם נגדיר את ערך הפונקציה ב-0 להיות 1 אז נקבל מיידית פונקציה רציפה כי ראינו ש-$1=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$.

(ד) נראה מתי המונה אינו מוגדר. $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$ ולכן בכל נקודה למעט $x=2,4$ הפונקציה רציפה כמנה של פולינומים. בשאיפה לנקודות אלו המונה שואף לקבוע והמכנה שואף לאינסוף, ולכן הפונקציה תשאף ל- $\pm\infty$ בנקודות אלו.

(א) ראינו כבר כי $\lim_{x\to m\pi}\frac{1}{\sin x}=\pm\infty$ ולכן לכל $M>0$ יש ערכי $x>M$ שעבורם $1+\frac{1}{\sin x}$ גדול כרצוננו, ולכן לא קיים גבול.

(ב) לכל $M>0$, יש n כך ש-$\frac{\pi}{2}+2n\pi>M$, $n\pi$, ולכן $\sin^2(n\pi)=0$, $\sin^2(\frac{\pi}{2}+2n\pi)=1$, כלומר לכל גבול אם נקח $\varepsilon=\frac{1}{2}$ נקבל סתירה לקיום הגבול.

(ג) $\frac{1}{2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+1}{2x^2+1}$. יהי $\epsilon>0$, אז

$$\left|\frac{x^2+2x+1}{2x^2+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{4x+1}{4x^2+2}\right|<\left|\frac{5x}{4x^2}\right|<\frac{5}{4x}$$

נקח $M=\frac{5}{4\varepsilon}$ וסיימנו.

.3

(א) $5=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}=\lim_{x\to 0}5\cdot\frac{\sin(5x)}{5x}=5\cdot\lim_{t\to 0}\frac{sin(t)}{t}=5$ ולכן אם נקבע כי $a=5$ נקבל העתקה רציפה.

(ב)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\cos(ax)}\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}a\cdot\frac{\sin(ax)}{ax}\cdot\frac{1}{\cos(ax)}$$

$\lim_{x\to 0}\cos(ax)=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1$ ולכן גבול הפונקציה באפס הינו $a=a\cdot 1\cdot 1$ ולכן אם נקבע $a=3$ נקבל פונקציה רציפה.

.4

(א) נכון - סכום ומכפלה של פונקציות רציפות תמיד רציף.

(ב) נכון - נניח כי $\lim_{x\to\infty}=L$, אז בהנתן $\varepsilon=1$ יש $N>0$ כך שלכל $x>N$, $|f(x)-L|<1$, כלומר $L-1<f(x)<L+1$, נקח $M=N+1$ אז על $[M,\infty)$, f חסומה בין $L-1$ ל-$L+1$.

(ג) לא נכון. תהי f פונקציה כלשהי שאינה רציפה בנק' a, ו-g פונקצית האפס, כלומר $g(x)=0$, אז $g\circ f(x)=0$ לכל x וזוהי בוודאי פונקציה רציפה.