אנליזה למהנדסים (1) - פתרון תרגיל 4

6.11.2002

.1

(א) עבור (א,ב) נסמן את הסדרה ב-a_n ונסתכל על הסדרה המתקבלת מהצבת ערכי n. הסדרה היא $3,2,1,2,3,2,1,2,3,2,1,2,3,\dots$. לכן $\limsup a_n = 3$ כי הסדרה a_{3n+1}, $n \geq 0$ מתכנסת לגבול זה, וברור כי אין תת סדרה המתכנסת לגבול גדול יותר (כי 3 חוסם את הסדרה). משיקול דומה, $\liminf a_n = 1$.

(ב) עבור (ג,ד) נסמן את הסדרה ב- b_n ונסתכל על הסדרה המתקבלת מהצבת ערכי n. עבור n זוגי, $b_n = \frac{1}{n^2}$. עבור n אי-זוגי, $b_n = 1$. לכן $\limsup b_n = 1$, $\liminf b_n = 0$.

.2

(א) לא נכון. נקח $f(x) = 0$, $g(x) = x$, אז g על אבל $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(0) = 0$ ולכן $g \circ f$ לא על.

(ב) לא נכון. נקח $f(x) = x$, $g(x) = 0$. אז $g \circ f(x) = 0$ לכל x וזו אינה העתקה חח"ע.

(ג) נכון. יהיו $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$. ממונוטוניות f נובע כי $f(x) \leq f(y)$, ממונוטוניות g נובע כי $g(f(x)) \geq g(f(y))$ ולכן $x \leq y$ גורר $g \circ f(x) \geq g \circ f(y)$, כלומר $g \circ f$ מונוטונית יורדת.

.3 נמצא δ כך ש- $|x^2 - 2x - x_0^2 + 2x_0| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
|x^2 - 2x - x_0^2 + 2x_0| &= |(x-x_0)(x+x_0) - 2(x-x_0)| \\
&\leq |x-x_0||x+x_0| + 2|x-x_0| \\
&< |x+x_0|\delta + 2\delta \\
&= |x - x_0 + 2x_0|\delta + 2\delta \\
&\leq (|x-x_0| + 2|x_0|)\delta + 2\delta \\
&< \delta^2 + (2|x_0|+2)\delta
\end{aligned}$$

$2|x_0|+2 > 1$ ולכן אם נבחר $\delta = \frac{\varepsilon}{2(2|x_0|+2)}$ אז $\delta < \frac{\varepsilon}{2} < 1$ עבור ערכי ε הנתונים ולכן $\delta^2 < \frac{\varepsilon}{2}$ ונקבל כי $\delta^2 + (2|x_0|+2)\delta < \varepsilon$ כנדרש.

.4

(א)

$$\lim_{x\to 2} 3x = 3(\lim_{x\to 2} x) = 3 \cdot 2 = 6 .$$

במכפלה - אם קיימים הגבולות של המכופלים, אז גבול המכפלה קיים ושווה למכפלת הגבולות.

(ב)

$$\lim_{x\to 3} 4x + 3 = 4(\lim_{x\to 3}) + 3 = 15 .$$

כמו בא' - גם לסכומים.

(ג)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-1}{2x+2}=\frac{\lim_{x\to 1}x^2+2x-1}{\lim_{x\to 1}2x+2}=\frac{1^2+2\cdot 1-1}{2\cdot 1+2}=\frac{1+2-1}{2+2}=\frac{1}{2}.$$

(ד)

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{5+\sqrt[3]{2x^5}}=\sqrt{5+\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{2x^5}}=\sqrt{5+\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}2x^5}}=\sqrt{5}.$$

.5

(א) בכל נקודה שונה מ -1 המכנה לא מתאפס ולכן ניתן להשתמש במשפטי גבולות כדי להראות שהפונקציה רציפה. נחשב:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+2}{2x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+2)(x+1)}{2(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+2}{2}=\frac{1}{2}.$$

ולכן f רציפה בכל הישר.

(ב) $\sin(x)\underset{x\to m\pi}{\longrightarrow}0$, ולכן $\frac{1}{\sin(x)}\underset{x\to m\pi}{\longrightarrow}\pm\infty$. לכן הפונקציה אינה רציפה ב $x=m\pi$. בכל נקודה אחרת המנה מוגדרת ולכן הפונקציה רציפה.