אנליזה למהנדסים (1) - פתרון תרגיל 3

6.11.2002

1. חשבו את הגבולות הבאים (באמצעות משפטי גבולות שלמדתם):

(א)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+1\right)3^{n+1}}{\left(\frac{2^n}{3^n}+1\right)3^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{3\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} \\
&= \frac{2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} \\
&= \frac{2\cdot 0+3}{0+1} \\
&= 3
\end{aligned}$$

(ב) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})=0$.

באמצעות משפט הסנדוויץ': $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<\underbrace{1+\ldots+1}_{n}=n$ ולכן

$$0<\frac{1}{n^2}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k})<\frac{1}{n^2}\cdot n=\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

(ג)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ד)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\\ &= \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2. חשבו את הגבולות הבאים באמצעות משפט הסנדוויץ':

(א) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

$$0<\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n}<\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

הכפלה במספר קטן מאחד, במקרה זה שברים מהצורה $\frac{k}{n}, k<n$ רק מקטינה את המספר.

(ב) $\lim_{n\to\infty}\frac{\cos((n!)^2)}{n}=0$.

$|\cos(x)|\leq 1$ ולכן

$$-\frac{1}{n}\leq\frac{\cos((n!)^2)}{n}\leq\frac{1}{n}$$

והחסם הימני והשמאלי שואפים שניהם לאפס.

(ג) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}\right)=0$.

האיבר הקטן ביותר בסכימה הוא $\frac{1}{n^2+n}$. האיבר הגדול ביותר בסכימה הוא $\frac{1}{n^2+1}$ ולכן

$$\frac{n}{n^2+n}<\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}<\frac{n}{n^2+1}.$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=0$.

(ד) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=\max(a,b)$.

יהי $c=max(a,b)$, אזי $a^n+b^n>c^n$ כי $min(a,b)>0$, וכן $a^n+b^n<2c^n$, ולכן

$$c=\sqrt[n]{c}<\sqrt[n]{a^n+b^n}\leq\sqrt[n]{2c^n}=c\sqrt[n]{2}\to c\cdot 1=c.$$

3.

א) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{n}{k}}=1$.

$$1<\sqrt[n]{\binom{n}{k}}=\sqrt[n]{\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}}=\frac{1}{\sqrt[n]{k!}}\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{k}(n-i)}=\frac{1}{\sqrt[n]{k!}}\prod_{i=0}^{k}\sqrt[n]{n-i}<\frac{1}{\sqrt[n]{k!}}\prod_{i=0}^{k}\sqrt[n]{n}\to 1.$$

ב) $\lim_{n\to\infty}a_n=4$.

$$\frac{4}{\sqrt[n]{3n}}<\frac{2^2}{\sqrt[n]{2n+1}}<\sqrt[n]{\frac{2^{2n}}{2n+1}}<\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}<\sqrt[n]{2^{2n}}=4$$

ו -

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt[n]{3n}}=\frac{4}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}=\frac{4}{1\cdot 1}$$

ולכן סיימנו.

ג) $\lim_{n\to\infty}n^k l^n=0$, $0<l<1$, $k\in\mathbb{N}$ קבוע.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^k l^{n+1}}{n^k l^n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)l=\left(1+\frac{1}{n}\right)l.$$

$\frac{1}{l}>1$ ולכן יש $\eta>0$ כך ש- $\frac{1}{l}=1+\eta$. $1+\frac{1}{n}\to 1$ ולכן אם נקח $\varepsilon=\frac{\eta}{2}$ אז יש $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$, $1+\frac{1}{n}<1+\varepsilon$ ואז

$$(1+\frac{1}{n})l<(1+\varepsilon)l=l+\frac{\eta}{2}l=l+\frac{\frac{1}{l}-1}{2}l=l+\frac{1-l}{2}=\frac{l+1}{2}<1$$

ואם נקח $q=\frac{l+1}{2}$, סיימנו.

ד) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}=0$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\frac{2^n\cdot 2\cdot(n+1)\cdot n!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 2^n\cdot n!}=2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}$, $\frac{1}{e}<.4$ ולכן החל ממקום כלשהו המנה קטנה מ - $q=.8$ כנדרש.