אנליזה למהנדסים (1) - פתרון תרגיל 2

28 באוקטובר 2002

.1

(א) $A=\{n+\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$.

A אינה חסומה מלמעלה כי לכל $M\in\mathbb{R}$ יש $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $M<n$, ובוודאי $M<n+\frac{1}{n}$. A חסומה מלמטה כי $1<n+\frac{1}{n}$ אסם $0<(n-1)+\frac{1}{n}$ וזה נכון לכל $n\in\mathbb{N}$.

$\min(A)=2$ כי $2\le n+\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. נראה זאת באינדוקציה: עבור $n=1$ הטענה מתקיימת. נניח ל-n ונראה ל-$n+1$. $\frac{1}{n}\le 1$ לכל n ולכן $n+1+\frac{1}{n+1}\ge n+\frac{1}{n}\ge 2$ לפי הנחת האינדוקציה.

$1+\frac{1}{1}=2\in A$ ולכן זהו מינימום לקבוצה.

(ב) $B=\{2+\frac{(-1)^n}{n} \mid n\in\mathbb{N}\}$.

לכל $x\in B$, $1\le x\le 3$ כי $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}\le 1$. לכן B חסומה.

נראה כי לכל $n\in\mathbb{N}$, $2+\frac{(-1)^n}{n}\ge 1$. זה מתקיים אסם $1+\frac{(-1)^n}{n}>0$, וזה נכון לפי הפסקה הקודמת. $1\in B$ ולכן $\min(B)=1$.

נראה כי לכל $n\in\mathbb{N}$, $2+\frac{(-1)^n}{n}\le 2.5$. זה מתקיים אסם $\frac{(-1)^n}{n}\le .5$. אם n אי-זוגי זה מיידי, אחרת $n=2k$ עבור k טבעי, ואז $\frac{(-1)^{2k}}{2k}=\frac{1}{2k}\le\frac{1}{2}$ לכל $k\in\mathbb{N}$. $2.5\in B$ ולכן $\max(B)=2.5$.

(ג) $C=\{x\in\mathbb{R} \mid |x^2-1|\le 1\}$.

$|x^2-1|\le 1$ אסם $-1\le x^2-1\le 1$ אסם $0\le x^2\le 2$ אסם $-\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$. $\pm\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ ולכן $\min(C)=-\sqrt{2}$, $\max C=\sqrt{2}$.

(ד) $D=\{x\in\mathbb{Q} \mid |x^2-1|\le 1\}$.

שימו לב, כאן $\sqrt{2}\notin D$. נראה כי $\sup(D)=\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ חסם מלעיל לפי סעיף קודם . לכל $\varepsilon>0$ קיים $q\in\mathbb{Q}, q>0$ כך ש- $\sqrt{2}-\varepsilon<q\le\sqrt{2}$. $0<q^2\le 2$ ולכן $q\in D$, כנדרש. באותו אופן, $\inf(D)=-\sqrt{2}$, אבל אין מינימום או מקסימום.

.2

(א) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

$\varepsilon=\frac{1}{10}$:

$\left|\frac{1}{n+2}\right|<\frac{1}{10}$ אסם $n+2>10$, ולכן נקח $N=8$.

$\varepsilon=\frac{1}{27}$:

$\left|\frac{1}{n+2}\right|<\frac{1}{27}$ אסם $n+2>27$, ולכן נקח $N=25$.

(ב) $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$.

$\varepsilon=\frac{1}{2}$:

$\left|\frac{n+4}{2n+5}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ אסם $\left|\frac{3}{4n+10}\right|<\frac{1}{2}$ אסם $4n+10>6$ וזה נכון לכל n.

$\varepsilon=0.01$:

נשתמש בחישוב הקודם , נרצה N כך שלכל $n>N$, $\left|\frac{3}{4n+10}\right|<\frac{1}{100}$, וזה אסם $4n+10>300$, כלומר אם $N=72$.

(ג) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\varepsilon = \frac{1}{7}$:

$\left|\frac{n+1}{n^3}\right| < \frac{1}{7}$ אםם $n^3 > 7n+7$. באינדוקציה ניתן לראות כי זה נכון לכל $n > 3$.

$\varepsilon = \frac{1}{19}$: $\left|\frac{n+1}{n^3}\right| < \frac{1}{19}$ אםם $n^3 > 19n+19$. באינדוקציה ניתן לראות כי זה נכון לכל $n > 19$.

.3

(א) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+4}{2n+5} = \frac{1}{2}$.

יהי $\varepsilon > 0$, אז

$$\left|\frac{n+4}{2n+5} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{3}{4n+10}\right| < \frac{3}{n}.$$

נקח $N = \left\lceil \frac{3}{\varepsilon} \right\rceil$, ונסיים.

(ב) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^3} = 0$

יהי $\varepsilon > 0$, אז

$$\left|\frac{n+1}{n^3}\right| \le \left|\frac{2n}{n^3}\right| = \frac{2}{n^2} \le \frac{2}{n}.$$

נקח $N = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil$, ונסיים.

(ג) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+n}{5n^3+n^2+1} = \frac{2}{5}$

יהי $\varepsilon > 0$, אז

$$\left|\frac{2n^3+n}{5n^3+n^2+1} - \frac{2}{5}\right| = \left|\frac{10n^3+5n-10n^3-2n^2-2}{25n^3+5n^2+5}\right| = \left|\frac{5n-2n^2-2}{25n^3+5n^2+5}\right|$$

$$= \left|\frac{2n^2-5n+2}{25n^3+5n^2+5}\right| < \left|\frac{3n^2}{25n^3}\right| = \frac{3}{25n}$$

נקח $N = \left\lceil \frac{3}{25\varepsilon} \right\rceil$, ונסיים.

.4 לסדרות הבאות מצאו והוכיחו קיום הגבול (אם קיים) או הפריכו התכנסות הסדרה:

(א) $a_n = \frac{(-1)^n}{n+4}$.

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

יהי $\varepsilon > 0$.

$\left|\frac{(-1)^n}{n+4}\right| = \frac{1}{n+4} < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(ב) $b_n = \begin{cases} \frac{2}{n} & \text{זוגי } n \\ -\frac{1}{n^2} & \text{אי-זוגי } n \end{cases}$.

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.

יהי $\varepsilon > 0$. $\frac{2}{n} > \left|-\frac{1}{n^2}\right|$ לכל n, ולכן $|b_n| \le \left|\frac{2}{n}\right| < \varepsilon$, עבור n מספיק גדול.

(ג) $c_n = 2 + \sin(\frac{n\pi}{2})$.

אין גבול לסדרה זו. ערכיה הם $3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, \ldots$. נניח שהיה גבול $L \in \mathbb{R}$, נסתכל על $c = \min(|L-1|, |L-2|, |L-3|)$. אם $c = 0$ נקח $\varepsilon = \frac{1}{2}$, אחרת נקח $\varepsilon = \frac{c}{2}$. כעת ברור כי לכל N, גדול ככל שיהיה, יש $n > N$ כך ש- $|c_n - L| \ge \varepsilon$.