

אנליזה למהנדסים (1) - פתרון לתרגיל 1

17.10.2002

1.

(א) באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 0$: $1 = \frac{q^0 - 1}{q - 1} = 1$
שלב האינדוקציה: נניח ל- n ונוכיח ל- $n + 1$.

$$\begin{aligned} 1 + q + \dots + q^n &= (1 + q + \dots + q^{n-1}) + q^n \\ &= \frac{q^n - 1}{q - 1} + q^n & (1) \\ &= \frac{q^n - 1 + q^n(q - 1)}{q - 1} \\ &= \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q - 1} \\ &= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

כאשר (1) הינו לפי הנחת האינדוקציה.

(ב) באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 1$: $|a_1| \leq |a_1|$
שלב האינדוקציה: נניח ל- n ונוכיח ל- $n + 1$.

$$\begin{aligned} |a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}| &= |(a_1 + \dots + a_n) + a_{n+1}| \\ &\leq |a_1 + \dots + a_n| + |a_{n+1}| & (2) \end{aligned}$$

$$\leq |a_1| + \dots + |a_n| + |a_n + 1| \quad (3)$$

כאשר (2) הוא לפי אי-שוויון המשולש, ו-(3) הוא מהנחת האינדוקציה.

(ג) באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: עבור $n = 2$: $(1 + \alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 > 1 + 2\alpha$ כי $\alpha^2 > 0$ לכל $\alpha \neq 0$.
הנחת האינדוקציה: נניח ל- n ונוכיח ל- $n + 1$.

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)^{n+1} &= (1 + \alpha)(1 + \alpha)^n \\ &> (1 + \alpha)(1 + n\alpha) & (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 + (n + 1)\alpha + n\alpha^2 \\ &> 1 + (n + 1)\alpha & (5) \end{aligned}$$

כאשר (4) הוא לפי הנחת האינדוקציה ואי-השוויון נשמר כי $1 + \alpha > 0$ ו- (5) הוא כי $n\alpha^2 > 0$ לכל $\alpha \neq 0$.

2.

(א) תרגום למילים: לכל $\epsilon > 0$ ממש קיים n טבעי כך ש- $\frac{1}{n}$ קטן מ- ϵ .
 נימוק: זה נכון כי לכל טבעי יש טבעי גדול יותר. קיים טבעי גדול מ- $\frac{1}{\epsilon}$, נסמנו n , אז $n > \frac{1}{\epsilon}$ ולכן $\frac{1}{n} < \epsilon$.

(ב) $\exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \frac{1}{n} \geq \epsilon$
 במילים: קיים $\epsilon > 0$ ממש כי שלכל n טבעי, $\frac{1}{n} \geq \epsilon$.

3.

(א) $\forall p, q \in \mathbb{Q}, p \neq q \exists r \in \mathbb{Q} p < r < q$. הטענה נכונה: נקח $r = \frac{p+q}{2}$, והוא מקיים את הנדרש.
 (ב) $\exists p \in \mathbb{Q} \forall q \in \mathbb{Q} p \leq q$. הטענה לא נכונה - אם $p > 0$, נקח $q = \frac{p}{2}$, אם $p \leq 0$ אז $q = p - 1$.

4.

(א) התנאי מתקיים אם $x - 4 > 5$ או $x - 4 < -5$ כלומר $x > 9$ או $x < -1$.
 (ב) התנאי מתקיים כאשר $2 \leq x^2 - 3 \leq -2$, כלומר $1 \leq x^2 \leq 5$ כלומר $1 \leq x \leq \sqrt{5}$ או $-1 \leq x \leq -\sqrt{5}$.
 (ג) ראשית עלינו לפסול את המקרה בו המכנה מתאפס, כלומר מראש $x \neq 1$. נסתכל על אי-השוויון

$$-2 < \frac{x+2}{x-1} < 2$$

כאשר $x > 1$ המכנה חיובי ולכן נכפול בו ללא שינוי כיווני האי-שוויון ונקבל את

$$-2x + 2 < x + 2 < 2x - 2$$

כאשר אם נוסיף -2 לכל אגפי אי-השוויון נקבל

$$-2x < x < 2x - 4$$

התנאי $-2x < x$ מתקיים לכל $x > 0$ ולכן לא מגביל את התחום, $x < 2x - 4$ מתקיים כאשר $x > 4$.

אם $x < 1$ המכנה שלילי ואי-השוויון המתקבל הוא

$$-2x > x > 2x - 4$$

אי-השוויון $-2x > x$ מתקיים כאשר $0 > 3x$ כלומר לכל $x < 0$, אי-השוויון השני $x > 2x - 4$ מתקיים ל- $x < 4$ ושוב לא מתקבל מידע חדש, כלומר התחום הינו

$$\{x \mid x < 0 \text{ או } x > 4\}$$