אנליזה למהנדסים (1)- פתרון לתרגיל 1

17.10.2002

.1

(א) באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: עבור $n=0$: $1 = \frac{q^0-1}{q-1} = 1$.

שלב האינדוקציה: נניח ל-n ונוכיח ל-$n+1$.

$$\begin{aligned}
1+q+\ldots+q^n &= (1+q+\ldots+q^{n-1})+q^n \\
&= \frac{q^n-1}{q-1}+q^n \qquad (1)\\
&= \frac{q^n-1+q^n(q-1)}{q-1} \\
&= \frac{q^n-1+q^{n+1}-q^n}{q-1} \\
&= \frac{q^{n+1}-1}{q-1}
\end{aligned}$$

כאשר (1) הינו לפי הנחת האינדוקציה.

(ב) באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: עבור $n=1$: $|a_1| \le |a_1|$.

שלב האינדוקציה: נניח ל-n ונוכיח ל-$n+1$.

$$\begin{aligned}
|a_1+\ldots+a_n+a_{n+1}| &= |(a_1+\ldots+a_n)+a_{n+1}| \\
&\le |a_1+\ldots+a_n|+|a_{n+1}| \qquad (2)\\
&\le |a_1|+\ldots+|a_n|+|a_n+1| \qquad (3)
\end{aligned}$$

כאשר (2) הוא לפי אי-שוויון המשולש, ו-(3) הוא מהנחת האינדוקציה.

(ג) באינדוקציה:

בסיס האינדוקציה: עבור $n=2$: $1+2\alpha < 1+2\alpha+\alpha^2 = (1+\alpha)^2$ כי $\alpha^2>0$ לכל $\alpha\neq 0$.

הנחת האינדוקציה: נניח ל-n ונוכיח ל-$n+1$.

$$\begin{aligned}
(1+\alpha)^{n+1} &= (1+\alpha)(1+\alpha)^n \\
&> (1+\alpha)(1+n\alpha) \qquad (4)\\
&= 1+(n+1)\alpha+n\alpha^2 \\
&> 1+(n+1)\alpha \qquad (5)
\end{aligned}$$

כאשר (4) הוא לפי הנחת האינדוקציה ואי-השוויון נשמר כי $1+\alpha > 0$, ו-(5) הוא כי $n\alpha^2 > 0$ לכל $\alpha \neq 0$.

.2

(א) תרגום למילים : לכל $\epsilon > 0$ ממשי קיים n טבעי כך ש- $\frac{1}{n}$ קטן מ - ϵ.
נימוק: זה נכון כי לכל טבעי יש טבעי גדול יותר. קיים טבעי גדול מ-$\frac{1}{\epsilon}$, נסמנו n, אז $n > \frac{1}{\epsilon}$ ולכן $\frac{1}{n} < \epsilon$.

(ב) $\exists \epsilon \in \mathbb{R}, \epsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n} \geq \epsilon$.
במילים: קיים $\epsilon > 0$ ממשי כך שלכל n טבעי, $\frac{1}{n} \geq \epsilon$.

.3

(א) $\forall p, q \in \mathbb{Q}, p \neq q \quad \exists r \in \mathbb{Q} \quad p < r < q$. הטענה נכונה: נקח $r = \frac{p+q}{2}$, והוא מקיים את הנדרש.

(ב) $\exists p \in \mathbb{Q} \quad \forall q \in \mathbb{Q} \quad p \leq q$. הטענה לא נכונה - אם $p > 0$, נקח $q = \frac{p}{2}$, אם $p \leq 0$ אז $q = p - 1$.

.4

(א) התנאי מתקיים אם $x - 4 > 5$ או $x - 4 < -5$ כלומר $x > 9$ או $x < -1$.

(ב) התנאי מתקיים כאשר $-2 \leq x^2 - 3 \leq 2$, כלומר $1 \leq x^2 \leq 5$ כלומר $1 \leq x \leq \sqrt{5}$.

(ג) ראשית עלינו לפסול את המקרה בו המכנה מתאפס, כלומר מראש $x \neq 1$. נסתכל על אי-השוויון

$$-2 < \frac{x+2}{x-1} < 2 \, .$$

כאשר $x > 1$ המכנה חיובי ולכן נכפול בו ללא שינוי כיווני האי-שוויון ונקבל את

$$-2x + 2 < x + 2 < 2x - 2$$

כאשר אם נוסיף -2 לכל אגפי אי-השוויון נקבל

$$-2x < x < 2x - 4$$

התנאי $-2x < x$ מתקיים לכל $x > 0$ ולכן לא מגביל את התחום, $x < 2x - 4$ מתקיים כאשר $x > 4$.
אם $x < 1$ המכנה שלילי ואי-השוויון המתקבל הוא

$$-2x > x > 2x - 4$$

אי-השוויון $-2x > x$ מתקיים כאשר $3x < 0$ כלומר לכל $x < 0$, אי-השוויון השני $x > 2x - 4$ מתקיים ל-$x < 4$ ושוב לא מתקבל מידע חדש, כלומר התחום הינו

$$\{x \mid x < 0 \text{ או } x > 4\}.$$