אנליזה למהנדסים - תרגיל 9 (לא להגשה)

16 בדצמבר 2002

1. חשבו את טורי טיילור מסדר שש סביב אפס של הפונקציות הבאות:

   (א) $\frac{e^x}{1-x}$.

   (ב) $e^x \cdot \sin(x^2)$.

2.

   (א) (קשה) תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש- $f(x) = f''(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$ וכך ש-$f(0) = f'(0) = 0$. הראו כי $f(x) = 0$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

   (הדרכה: הראו כי f גזירה אינסוף פעמים. השתמשו בשארית פיתוח טיילור כדי לקבל את הנדרש.

   (ב) הראו כי אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מקיימת $f(x) = f''(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$ אזי יש $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש-$f(x) = ae^x + be^{-x}$.

   (הדרכה: הגדירו $g(x) = f(x) - ae^x - be^{-x}$. הראו כי אפשר לבחור a, b כך שיתקיים $g(0) = g'(0) = 0$ והשתמשו בסעיף הקודם.

3. מצאו את תחום ההגדרה, נקודות אי-הרציפות, נקודות אי-הגזירות, תחומי העליה והירידה, תחומי הקמירות והקעירות, ואת האסימפטוטות לפונקציות:

   (א) $f(x) = xe^{-\frac{1}{x+3}}$.

   (ב) $g(x) = (6x^2 - x^3)^{\frac{1}{3}}$.

4. על ידי חקירת הפונקציה $f(x) = x^3 + px$ קבעו את מספר הפתרונות של $x^3 + px + q = 0$ כתלות במספרים הממשיים p, q.

5. ענה על שני הסעיפים הבאים תוך שימוש בתכונות הפונקציה $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

   (א) מי יותר גדול, e^π או π^e.

   (ב) מצא את כל הזוגות של מספרים טבעיים $a \neq b$, שמקיימים $a^b = b^a$.