אנליזה למהנדסים (1) - תרגיל 8(להגשה)

11.12.2002

1. יהי $0 < a < 1$, $b \in \mathbb{R}$. הראו כי ל-$x - a\sin(x) = b$ יש פתרון יחיד.
2. פונקציה תקרא ליפשיצית בקטע $[a,b]$ (או $[a,b),(a,b)$) אם קיים $M > 0$ כך שלכל $x,y \in [a,b]$

$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$.

   (א) הראו כי אם פונקציה ליפשיצית ב-$[a,b]$ עם קבוע M, אזי היא רציפה שם במידה שווה.
   (ב) הראו כי רציפות במידה שווה אינה גוררת כי הפונקציה ליפשיצית על ידי בדיקת הדוגמא $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.
   (ג) הראו כי בהנתן פונקציה גזירה $f(x)$ כך שהנגזרת שלה חסומה על כל תחום הגדרתה, אז f רציפה במ"ש.
3. הוכיחו:
   (א) תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה כך ש-$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$, אז $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.
   (ב) $f(x)$ תקרא זוגית אם $f(x) = f(-x)$. אם $f(x)$ זוגית וגזירה באפס, אז $f'(0) = 0$.
   (ג) אם $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה ו-$\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ אזי $\lim_{x\to\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0$.
   (ד) תהיינה f, g שתי פונקציות גזירות בקטע (a,b). אם $f'(x) = g'(x)$ לכל $x \in (a,b)$, אז // $f(x) = g(x) + c$ עבור c קבוע.
4. הראו כי לכל פולינום $p(x)$ מתקיים

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0 .$$

   הדרכה: הראו כי $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ לכל n טבעי.
5. חשבו את הגבולות הבאים:
   (א) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.
   (ב) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.