אנליזה למהנדסים (1) - תרגיל 5

13.11.2002

1. מצא אלו מבין הפונקציות הבאות הן רציפות (על כל הישר). עבור אלו שאינן רציפות, מצא את נקודות האי רציפות.
   (א) $x^2\sin(x)$.
   (ב) $x\sin^2(x^2)$.
   (ג) $\frac{1}{x}\sin(x)$.
   (ד) $\frac{x^3+3x+7}{x^2-6x+8}$.

2. תזכורת: בהנתן פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, נאמר כי ל-$f$ יש גבול באינסוף אם יש $L\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R},\varepsilon>0\ \exists M>0\ \forall x,x>M\quad |f(x)-L|<\varepsilon$$

   לפונקציות הבאות, קבעו האם קיים גבול באינסוף, ומצאו אותו אם הוא קיים:
   (א) $\frac{1}{\sin x}+1$.
   (ב) $\sin^2 x$.
   (ג) $\frac{x^2+2x+1}{2x^2+1}$

3. קבעו עבור אלו ערכי a הפונקציות הבאות רציפות בכל התחום:
   (א) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(5x)}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$
   (ב) $g:[0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases}\frac{\tan(ax)}{x} & x\neq 0\\ 3 & x=0\end{cases}$

4. הוכיחו או הפריכו:
   (א) אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, אז כל פולינום ב-f, כלומר פונקציה מהצורה $p(x)=\sum_{i=0}^{n}a_i(f(x))^i$, רציפה.
   (ב) אם ל-$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ יש גבול באינסוף, אז קיים $M\in\mathbb{R}$ כך f חסומה על $[M,\infty)$.
   (ג) אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לא רציפה, ו-$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, אז $g\circ f$ לא רציפה.