אינפי 2 תרגיל 3

11/03/2007

1. תהי $f:D\to\mathbb{R}$ ($D\subseteq\mathbb{R}$) פונקציה. פונקציה $F:D\to\mathbb{R}$ תיקרא פונקציה קדומה של f על D אם F גזירה בכל D ומתקיים לכל $x_0\in D$: $F'(x_0)=f(x_0)$.

נגדיר את $\mathcal{A}_D(f)$ להיות קבוצת כל הפונקציות הקדומות של f בתחום D.

א) הוכיחו שאם D קטע (פתוח,סגור,חצי פתוח), קרן (פתוחה או סגורה) או כל הישר הממשי $\mathbb{R}$, וכן $F_1,F_2\in\mathcal{A}_D(f)$, אזי קיים קבוע $c\in\mathbb{R}$ (בלתי תלוי ב- x) כך שלכל $x\in D$ יתקיים: $F_1(x)=F_2(x)+c$.

בעקבות תוצאה זו, מקובל עבור D כנ"ל סימון מרושל לאוסף הפונקציה הקדומות $\mathcal{A}_D(f)$:

$\mathcal{A}_D(f)=F_1(x)+c$. כאשר $F_1\in\mathcal{A}_D(f)$, c (או סימון אחר) הוא סימון לקבוע ממשי שרירותי והתחום D מושמט.

הסיקו שעבור $[a,b]\subseteq D$ ו- $F_1,F_2\in\mathcal{A}_D(f)$ מתקיים: $F_2(b)-F_2(a)=F_1(b)-F_1(a)$.

ב) הוכיחו שעבור D כמו בסעיף (א) וגם $f_1,f_2:D\to\mathbb{R}$ מתקיים: $\mathcal{A}_D(f_1+f_2)=\mathcal{A}_D(f_1)+\mathcal{A}_D(f_2)$.

ג) הוכיחו שעבור D כמו בסעיף (א), $f:D\to\mathbb{R}$ וגם $\lambda\in\mathbb{R}$ מתקיים: $\mathcal{A}_D(\lambda f)=\lambda\mathcal{A}_D(f)$.

ד) יהי D כמו בסעיף (א), ויהיו $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. מהו התחום D' שבו מוגדרת הפונקציה $g(x)=f(ax+b)$?

הוכיחו כי מתקיים, ש- $G\in\mathcal{A}_{D'}(g)$ אמ"ם עבור הפונקציה F המוגדרת על-ידי: $\frac{1}{a}F(ax+b)=G(x)$ מתקיים $F\in\mathcal{A}_D(f)$.

ה) מצאו את $\mathcal{A}_D(f)$ עבור הפונקציות הבאות בתחומים הנתונים:

$$(1)D=\mathbb{R},f(x)=\sin(x)+\cos(x)\quad(2)D=(0,\infty),f(x)=\frac{1}{x}\quad(3)D=(-\infty,0),f(x)=\frac{1}{x}$$

$$(4)D=\mathbb{R}\quad f(x)=|x|$$

ו) (רשות) מצאו את $\mathcal{A}_D(f)$ עבור הפונקציות הבאות בתחומים הנתונים:

$$(1)D=\mathbb{R},f(x)=\frac{1}{1+x^2}\quad(2)D=(-1,1),f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. תהי $R_n(x)$ השארית בפיתוח טיילור מסדר n סביב 0 של הפונקציה $\exp(\pi\cdot x)$. חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}R_n(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

3.

א) תהי f גזירה $n+1$ פעמים בסביבה של נקודה $x_0\in\mathbb{R}$. יהי $P(x)$ פולינום טיילור מסדר n של f סביב x_0.

מהו פולינום טיילור מסדר $n-1$ סביב x_0 של הפונקציה f' ? הוכיחו את טענתכם.

ב) (רשות) בעזרת טענה זו ובעזרת פולינום טיילור שמצאתם בדף התרגיל הקודם, חשבו את פולינום טיילור מסדר 5 של הפונקציה $\frac{1}{\cos^2(x)}$ סביב 0.

4. תהיינה $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציית מדרגות. נסמן ב- $\int_a^b\varphi$ את האינטגרל שהגדרתם בכיתה לפונקציות מדרגות בקטע $[a,b]$.

א) נגדיר את $\psi:[a+c,b+c]\to\mathbb{R}$ עבור $c\in\mathbb{R}$ על-ידי $\psi(x)=\varphi(x-c)$. הוכיחו ש- ψ פונקצית מדרגות בקטע $[a+c,b+c]$ ושמתקיים: $\int_a^b\varphi=\int_{a+c}^{b+c}\psi$.

ב) יהי $\lambda>0$ ממשי ונגדיר $\psi:[\lambda a,\lambda b]\to\mathbb{R}$ על-ידי $\psi(x)=\varphi(x/\lambda)$. הוכיחו ש- ψ פונקצית מדרגות בקטע $[\lambda a,\lambda b]$ ושמתקיים: $\lambda\int_a^b\varphi=\int_{\lambda a}^{\lambda b}\psi$.

ג) נגדיר $\psi:[-b,-a]\to\mathbb{R}$ על-ידי $\psi(x)=\varphi(-x)$. הוכיחו ש- ψ פונקצית מדרגות בקטע $[-b,-a]$ ושמתקיים: $\int_a^b\varphi=\int_{-b}^{-a}\psi$. בעזרת תוצאה זו והתוצאה מסעיף ב' נסחו והוכיחו טענה מקבילה לטענה בסעיף ב' עבור $\lambda<0$.

ד) תהי $\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקצית מדרגות. הוכיחו ש- $\varphi+\psi$ פונקצית מדרגות בקטע $[a,b]$ ושמתקיים:

$$\int_a^b(\varphi+\psi)=\int_a^b\varphi+\int_a^b\psi.$$

5. (רשות) תהי f פונקציה בעלת נגזרת שנייה רציפה בנקודה $x_0\in\mathbb{R}$. נניח שקיים $f''(x_0)\neq 0$. יהי $h>0$ קטן מספיק כך שניתן להסיק ממשפט לגראנז' (או מפיתוח טיילור מסדר ראשון והצגת השארית בצורת לגראנז') שמתקיים: $f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(c_h)$, כאשר $x_0\le c_h\le x_0+h$. ניתן לרשום אזי $c_h=x_0+\theta_h h$, כאשר $\theta_h=\dfrac{c_h-x_0}{h}$ וקיים $0\le\theta_h\le 1$. הוכיחו שמתקיים: $\theta_h\underset{h\to 0}{\to}\dfrac{1}{2}$. רמז: ייתכן שתצטרכו להשתמש בפולינום טיילור עבור יותר מפונקציה אחת.

6. נגדיר לכל $\alpha\in\mathbb{R}$ ולכל n שלם אי-שלילי את המקדם הבינומיאלי המוכלל: $\binom{\alpha}{n}=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

עבור $\alpha\ge 0$ שלם ו- $0\le n\le\alpha$ מתקבל המקדם הבינומיאלי המוכר. בתרגיל זה נוכיח הכללה לנוסחה הבינומית של חזקת סכום מספרים. לשם-כך, נדון בפונקציה $f(x)=(1+x)^{\alpha}$.

א) הראו כי לכל α הפונקציה f מוגדרת בקטע $(-1,1)$, והוכיחו שהיא גזירה בקטע זה אין-סוף פעמים ומתקיים לכל $n\ge 0$ שלם ולכל $x\in(-1,1)$: $f^{(n)}(x)=\binom{\alpha}{n}(1+x)^{\alpha-n}$.

ב) הציגו את השארית בפיתוח טיילור מסדר n של f סביב ה- 0 בהצגת קושי, והראו שמתקיים:

$|R_n(x)|<C_\alpha\left|\binom{\alpha}{n}x^{n+1}\right|$ לכל $x\in(-1,1)$, כאשר $C_\alpha>0$ קבוע שאינו תלוי ב- n.

ג) הראו שלכל $x\in(-1,1)$ מתקיים $R_n(x)\underset{x\to\infty}{\to}0$, והסיקו שעבור x כנ"ל מתקיים: $(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$.

7.

א) חשבו את הערכים הבאים בעזרת פולינום טיילור מתאים בשגיאה שאינה עולה על 10^{-4}: $(ii)\,e^{1/3}$ $(i)\sin(1)$.

ב) עד לאיזה סדר יש לפתח את פולינום טיילור של $\sqrt{1+x}$ סביב 0 כדי לקרב את $\sqrt{2}$ בשגיאה הקטנה מ- 10^{-2}?

8.(רשות) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת כך:

$$(\forall x\neq 0)\,f(x)=e^{-1/x^2}\qquad f(0)=0$$

מתקיים כי f גזירה אין-סוף פעמים. הראו כי לכל $\varepsilon>0$ הפונקציה $f^{(n)}(x)$ מקבלת מכסימום בקטע $[0,\varepsilon]$.

הוכיחו כי מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\max\left\{f^{(n)}(x)\mid x\in[0,\varepsilon]\right\}\right)=\infty$.