תרגיל 1 באינפי 2

25.2.2007

1. חקרו את הפונקציה $f(x) = (x^2 + x^3)^{1/3}$ באופן מלא: תחום הגדרה, סימטריה, גבולות בקצות תחום ההגדרה, אסימפטוטות, רציפות, גזירות, תחומי עלייה וירידה, תחומי קמירות וקעירות, וסקיצה של גרף הפונקציה.

2. א. הוכיחו: $\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

ב. הוכיחו: לכל פולינום $P(x)$, מתקיים $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{e^x} = 0$.

ג. נגדיר:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

הוכיחו שלכל $n \in \mathbb{N}$, קיימים פולינומים P_n ו-Q_n כך שעבור $x \neq 0$ מתקיים:

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-1/x^2}$$

(רמז: אינדוקציה.)

ד. מצאו את P_1, P_2, Q_1 ו-Q_2. הערה: P_n ו-Q_n לאו דווקא ממעלה n !

ה. הוכיחו ש-$f^{(n)}(0)$ מוגדר לכל n טבעי ושווה ל-0.

3. בתרגיל זה נחקור את מספר הפתרונות הממשיים של המשוואה הכללית ממעלה שלישית: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, עבור קבועים ממשיים כלשהם a, b, c, d. נניח ש-$a \neq 0$.

א. תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. נגדיר $g_\alpha(x) = f(x - \alpha)$. הוכיחו של-$f$ ול-g_α אותו מספר שורשים ממשיים.

ב. נגדיר $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. בעזרת ההצבה $x' = x - \frac{b}{3a}$, הציגו פולינום מדרגה שלישית מהצורה $x^3 + px + q$ אשר לו אותו מספר שורשים ממשיים כמו f. חשבו את p ו-q, כתלות ב-a, b, c, d.

ג. כעת מספיק להתבונן במשוואה $x^3 + px + q = 0$. חקרו את הפונקציה $x^3 + px$. כמה פעמים היא חותכת את הישר $y = -q$?

ד. הראו שמספר הפתרונות הממשיים של $x^3 + px + q$ תלוי רק בסימן של הביטוי

$$(p/3)^3 + (q/2)^2$$