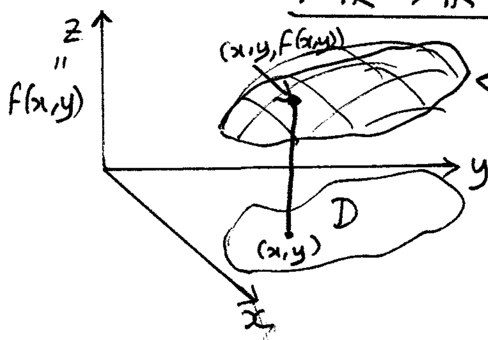
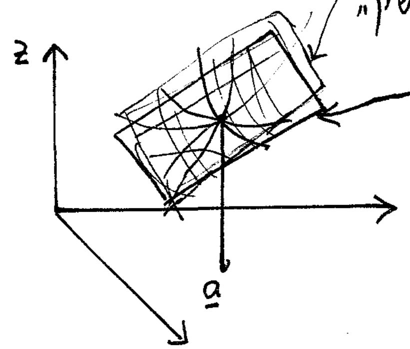
פונקציות של שתי משתנים $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$



$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ ⟸ גרף הוא משטח



f דיפרנציאבילית ב- $\underline{a} \in D$ ($\underline{a} = (a,b)$) ⟸ קיים מישור שקרוב לגרף של f

לסדר גדול מהראשון"

(מישור המשיק)

$$z = f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(a,b)}\cdot(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(a,b)}(y-b) \quad (*)$$

$$\frac{f(x,y) - f(a,b) - \frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(a,b)}(x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}\big|_{(a,b)}(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \xrightarrow[\substack{x\to a\\ y\to b}]{} 0$$

⟸ f רציפה ב-(a,b)

משוואה של מישור המשיק הוא (*):

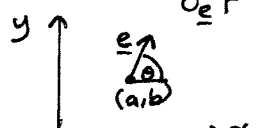
$$\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-f(a,b)\end{pmatrix}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \\ -1\end{pmatrix}}_{\text{וקטור מאונך למישור המשיק}} = 0$$

---

f דיפרנציאבילית ⟸ נגזרת כיוונית בכיוון $\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ היא

$$\partial_{\underline{e}} f = \underline{\nabla} f\cdot\underline{e} = e_1 f_x(a,b) + e_2 f_y(a,b) \quad \Leftarrow \quad \underline{\nabla} f = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y\end{pmatrix}$$

$\underline{e}$ וקטור יחידה ⟸ $\underline{e} = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$



$$\partial_{\underline{e}} f\big|_{\underline{a}} = f_x(a,b)\cos\theta + f_y(a,b)\sin\theta$$

שיפוע של גרף של f בסביבה של $\underline{a}$ בחיתוך בכיוון $\underline{e}$

$$= \|\underline{\nabla} f\|\cdot\cos\angle(\underline{\nabla} f, \underline{e})$$

(מכפלה פנימית $(\underline{\nabla} f)\cdot\underline{e}$)

$$= \begin{cases} \|\underline{\nabla} f\| & \text{(מקסימום)}, \quad \text{כאשר } \underline{\nabla} f \parallel \underline{e} \\ -\|\underline{\nabla} f\| & \text{(מינימום)}, \quad \text{כאשר } -\underline{\nabla} f \parallel \underline{e} \\ 0 & \text{(כיוון משיק לשכבות } f=\text{קבוע)}, \quad \text{כאשר } \underbrace{\underline{\nabla} f \perp \underline{e}}_{\text{ניצבים}} \end{cases}$$

$$\|\underline{\nabla} f\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

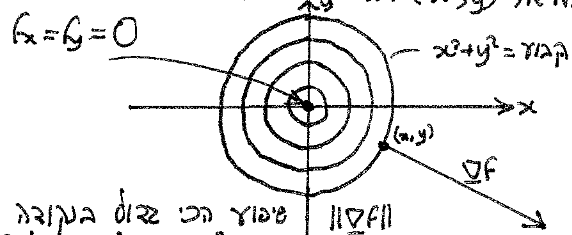
דוגמאות של פונקציות $f(x,y)$

(א) $f(x,y)=x^2+y^2$

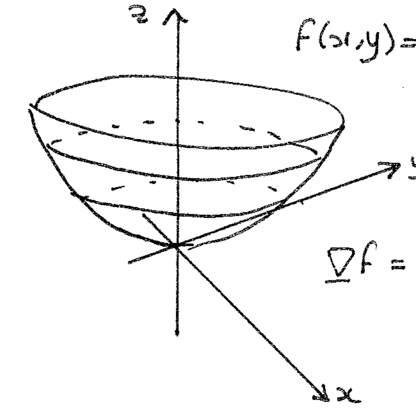
$z=$ קבוע

$\Leftarrow$ $x^2+y^2=z$

מעגל במישור (x,y) ברדיוס $\sqrt{z}$



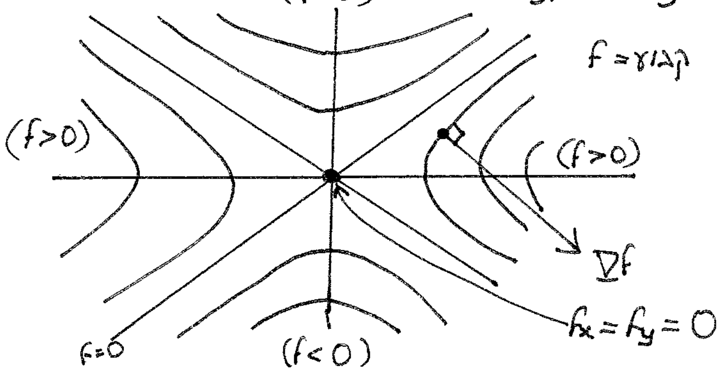
$\|\nabla f\| = 2\sqrt{(x^2+y^2)}$ שיפוע הכי גדול בנקודה (x,y) של היתוך של הגרף של f



$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

(ב) $f(x,y)=x^2-y^2$

$f=$ קבוע



$\nabla f=\begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x$

$\frac{\partial f}{\partial y}=-2y$

בנקודה $(1,2)$,

$\nabla f=\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ קו משיק למסילה

$x^2-y^2=$ קבוע, C

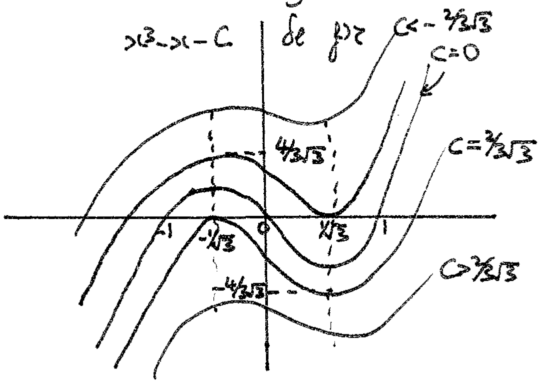
בנקודה $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(C=-3)$ הוא מאונך ל-$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(מקביל ל-$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$)

(ג) $f(x,y)=x^3-x-y^2$

$y^2=x^3-x-C$ $\Leftarrow$ $f=C$

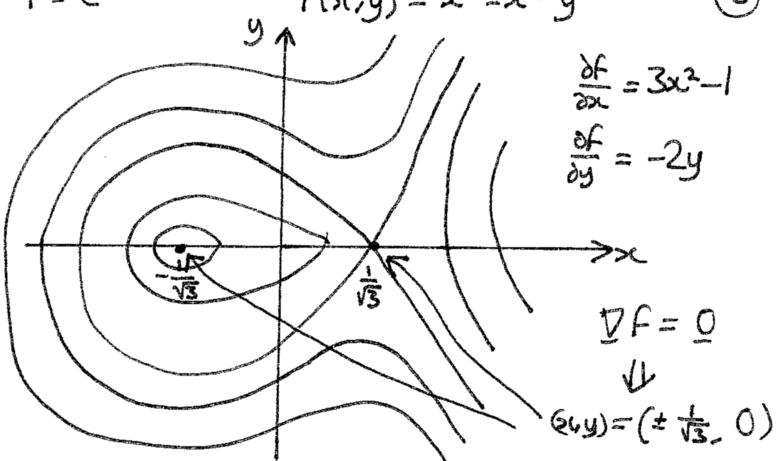
גרף של x^3-x-C



$g(x)=x^3-x \Rightarrow g'(x)=3x^2-1\ ,\ g''(x)=6x$

$g(x)=\frac{2}{3\sqrt{3}}\ ,\ x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$ מקס' $(g''<0)$

$g(x)=-\frac{2}{3\sqrt{3}}\ ,\ x=+\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow$ מינ' $(g''>0)$



$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-1$

$\frac{\partial f}{\partial y}=-2y$

$\nabla f=\underline{0}$

$\Downarrow$

$(x,y)=(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},0)$

נקודות סטציונריות

הגדרה * $f: D_{\subset\mathbb{R}^n}\to\mathbb{R}$

$\underline{a}\in D$ מקסימום גלובלי (global max/min) (מינימום) אם $f(\underline{a})=\max_{\underline{x}\in D} f(\underline{x})$ (min)

$\underline{a}\in D$ מקסימום מקומי (local max/min) (מינימום) אם קיימת סביבה U של $\underline{a}$ כך ש- $U\subset D$ ועל U $\underline{a}$ מקסימום (מינימום) של $f|_U: U\to\mathbb{R}$

* $f: D_{\subset\mathbb{R}^n}\to\mathbb{R}$, $\partial f/\partial x_i$ קיימות $(1\le i\le n)$

$\underline{a}\in D$ נקראת נקודה סטציונרית (stationary point) אם $\forall i\ \ \partial f/\partial x_i\big|_{\underline{x}=\underline{a}}=0$

משפט * $f: D\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

* $\partial f/\partial x_i$ קיימות ב- $\underline{a}\in D$
* $\underline{a}$ נקודת אקסטרמום של $\underline{a}$ (מקסימום או מינימום מקומי)

$\Leftarrow$ $\underline{a}$ נקודה סטציונרית.

הוכחה נניח בשלילה ש- $\left(\exists i : \partial f/\partial x_i\big|_{\underline{x}=\underline{a}} \neq 0\right)$. נניח ש- $\partial f/\partial x_i\big|_{\underline{x}=\underline{a}} > 0$.

לכן $\lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{a}+h\underline{e}_i)-f(\underline{a})}{h} > 0$ (הגדרה של $\partial f/\partial x_i\big|_{\underline{x}=\underline{a}}$)

$\Leftarrow$ לכל h מספיק קטן, (נניח $|h|<\varepsilon$) $\frac{f(\underline{a}+h\underline{e}_i)-f(\underline{a})}{h} > 0$ $\Leftarrow$ $\left\{\begin{array}{l} f(\underline{a}+h\underline{e}_i) > f(\underline{a}) \text{ אם } 0<h<\varepsilon \\ f(\underline{a}+h\underline{e}_i) < f(\underline{a}) \text{ אם } -\varepsilon<h<0 \end{array}\right.$

$\Leftarrow$ $\underline{a}$ לא נקודת אקסטרמום □

דוגמאות

(א) $f(x,y)=x^2+y^2$
(0,0) מינימום
(0,0) נק' סטציונרית

(ב) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$
(0,0) מינימום
$\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ לא קיימות ב- (0,0)
(0,0) לא נק' סטציונרית

(ג) $f(x,y)=xy$
(0,0) לא נק' אקסטרמום
($f(0,0)=0$, סימן של f תלוי בסימנים של x,y)
(0,0) כן נק' סטציונרית

משפט * $f: D\subset\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

* f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} רציפות
* D סביבה של (a,b)
* $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ ((a,b) נק' סטציונרית)

$\Leftarrow$

* (a,b) נקודת אקסטרימום אם $f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$ (מקס\מינ אם $f_{xx} \gtrless 0$)
* (a,b) לא נקודת אקסטרימום אם $f_{xx}f_{yy} < f_{xy}^2$

הוכחה נוסחת Taylor לסדר ראשון $\Leftarrow$

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \underbrace{f_x(a,b)h + f_y(a,b)k}_{df=0} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\left(f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2\right)\Big|_{(a+\phi h,\, b+\phi k)}}_{\frac{1}{2}d^2 f(a+\phi h,\, b+\phi k) = R_1} \quad (0<\phi<1)$$

השארית בצורת Lagrange

$\left\{\begin{array}{l} h=\rho\cos\theta \\ k=\rho\sin\theta \end{array}\right.$ $\Leftarrow$

$$\Delta f = f(a+h,b+k) - f(a,b) = \frac{\rho^2}{2}\left(f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta\right)\Big|_{(a+\phi h,\, b+\phi k)}$$

$f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$ $\Leftarrow$ אין שורש ממשי למשוואה $f_{xx}\alpha^2 + 2f_{xy}\alpha + f_{yy} = 0$

$\Leftarrow$ סימן של $f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta$ לא תלוי ב- θ (סימן של f_{xx})

$f_{xx}f_{yy} < f_{xy}^2$ $\Leftarrow$ קיימת פתרון θ ל- $0 = f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\cos\theta\sin\theta + f_{yy}\sin^2\theta$

וגם שקיימות θ_1, θ_2 כך שהביטוי שלילי ב- θ_1, חיובי ב- θ_2 $\Leftarrow$ (משפט ערך ביניים) לא אקסטרימום

□

63

הוכחה יותר מלאה של משפט על סוג של נקודת סטציונרית

$f_{xx}f_{yy} > f_{xy}^2$ ב- (a,b) $\Leftarrow$ רציפות של f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} $\Leftarrow$ קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $f_{xx}f_{yy}>f_{xy}^2$ בסביבה $B_\varepsilon(a,b)$

$\Downarrow$

$f_{xx}\neq 0$ בסביבה

$\Downarrow$ רציפות

סימן של f_{xx} בסביבה הוא סימן של $f_{xx}(a,b)$

למה: $AC>B^2$ $\Leftarrow$ סימן של $Ax^2+2Bxy+Cy^2$ לא תלוי ב- $(x,y)\neq(0,0)$ ובפרט הוא סימן של A

למה $\Leftarrow$ סימנים של $f_{xx}\cos^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+f_{yy}\sin^2\theta$ ושל f_{xx} שווים בסביבה $B_\varepsilon((a,b))$

$\Downarrow$ נוסחת Taylor

סימן של $f(a+\rho\cos\theta, b+\rho\sin\theta)-f(a,b)$

$$=\frac{\rho^2}{2}\left(f_{xx}\cos^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+f_{yy}\sin^2\theta\right)\Big|_{(a+\rho\phi\cos\theta,\ b+\rho\phi\sin\theta)}$$

$(0<\phi<1)$ $(\rho<\varepsilon)$

הוא סימן של $f_{xx}(a,b)$

$\Downarrow$

$$\begin{cases}(a,b) \text{ נק' מקסימום אם } f_{xx}(a,b)<0\\ (a,b) \text{ נק' מינימום אם } f_{xx}(a,b)>0\end{cases}$$

□

$f_{xx}f_{yy} < f_{xy}^2$ נסמן $\begin{cases}A=f_{xx}(a,b)\\ B=f_{xy}(a,b)\\ C=f_{yy}(a,b)\end{cases}$ $\Leftarrow$ $AC<B^2$

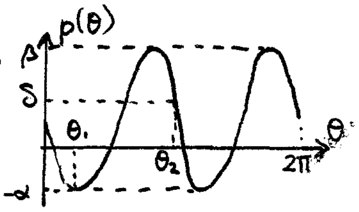
לכן $p(\theta)=A\cos^2\theta+2B\cos\theta\sin\theta+C\sin^2\theta$ היא פונקציה רציפה $p:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$

עם תמונה $[-\alpha,\beta]$, $\alpha,\beta>0$

נוסחאות: $\alpha=\sqrt{(\frac12(A-C)^2+B^2)}-\frac12(A+C)$

$\beta=\sqrt{(\frac12(A-C)^2+B^2)}+\frac12(A+C)$

(לא חשוב לנו)



נסמן את $\min(\alpha,\beta)$ ב- $\delta>0$

לכן קיימים $\theta_1,\theta_2\in[0,2\pi]$ כך ש- $\begin{cases}p(\theta_1)=-\delta\\ p(\theta_2)=\delta\end{cases}$

f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} רציפות $\Leftarrow$ קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $|f_{xx}-A|,\ |f_{xy}-B|,\ |f_{yy}-C|<\delta/3$

לכל $(x,y)\in B_\varepsilon((a,b))$

$\Leftarrow$

$$\left|(f_{xx}\cos^2\theta+2f_{xy}\cos\theta\sin\theta+f_{yy}\sin^2\theta)-p(\theta)\right|$$

$$\le |f_{xx}-A|\cos^2\theta+|f_{xy}-B|\cdot|2\cos\theta\sin\theta|+|f_{yy}-C|\sin^2\theta$$

$$<\ \delta/3\cdot 1\ +\ \delta/3\cdot 1\ +\ \delta/3\cdot 1\ =\delta \quad ⊛$$

כאשר $\theta\in[0,2\pi]$, $(x,y)\in B_\varepsilon((a,b))$

$\theta=\theta_1$ $\xRightarrow[⊛]{p(\theta_1)=-\delta}$ לכל $(x,y)\in B_\varepsilon(a,b)$, $f_{xx}\cos^2\theta_1+2f_{xy}\cos\theta_1\sin\theta_1+f_{yy}\sin^2\theta_1<0$

לכל $\rho<\varepsilon$ $\xRightarrow[\text{Taylor}]{\text{נוסחת}}$ $f(a+\rho\cos\theta_1, b+\rho\sin\theta_1)-f(a,b)<0$ $\Rightarrow$ לא מקס'

$$\frac{\rho^2}{2}\left(f_{xx}\cos^2\theta_1+2f_{xy}\cos\theta_1\sin\theta_1+f_{yy}\sin^2\theta_1\right)\Big|_{(a+\rho\phi\cos\theta_1,\ b+\rho\phi\sin\theta_1)}$$

$\theta=\theta_2$ $\xRightarrow[⊛]{p(\theta_2)=\delta}$ לכל $(x,y)\in B_\varepsilon((a,b))$, $f_{xx}\cos^2\theta_2+2f_{xy}\cos\theta_2\sin\theta_2+f_{yy}\sin^2\theta_2>0$

לכל $\rho<\varepsilon$ $\xRightarrow[\text{Taylor}]{\text{נוסחת}}$ $f(a+\rho\cos\theta_2, b+\rho\sin\theta_2)-f(a,b)>0$ $\Rightarrow$ לא מינ'

$$\frac{\rho^2}{2}\left(f_{xx}\cos^2\theta_2+2f_{xy}\cos\theta_2\sin\theta_2+f_{yy}\sin^2\theta_2\right)\Big|_{(a+\rho\phi\cos\theta_2,\ b+\rho\phi\sin\theta_2)}$$

□

<u>פתרון</u> $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

$$\begin{cases} f_x = 4x^3-4x+4y \\ f_y = 4y^3+4x-4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_{xx}=12x^2-4 \\ f_{xy}=4 \\ f_{yy}=12y^2-4 \end{cases}$$

נקודה סטציונרית $\Rightarrow f_x=f_y=0 \Rightarrow x^3=x-y=-y^3$

$\Rightarrow x=-y$

$\Rightarrow x^3=2x$

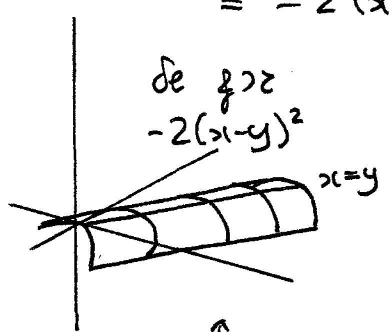
$\Rightarrow x=0,\pm\sqrt{2}$

שלוש נקודות סטציונריות <u>$(0,0),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2})$</u>

<u>$(0,0)$</u>: $f_{xx}=f_{yy}=-4,\ f_{xy}=4 \Rightarrow f_{xx}f_{yy}=f_{xy}^2$

ולכן לא יודעים מהמשפט
האם היא נקודת אקסטרימום!

$$f(x,y)=(-2x^2+4xy-2y^2)+(x^4+y^4)$$
$$=-2(x-y)^2+(x^4+y^4)$$



נקודת מקסימום
ב- $(0,0)$
(גם בכל (x,x))

(x^4+y^4) בסדר 4 אבל
בכיוון $y=x$ יכול להוסיף מספיק
כך ש- <u>$(0,0)$ לא נקודת אקסטרימום</u>
של f:

$$f(\varepsilon,\varepsilon)=2\varepsilon^4>0$$
$$f(\varepsilon,0)=\varepsilon^4-2\varepsilon^2<0 \quad (\varepsilon<1)$$

<u>$(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$</u>: $f_{xx}=f_{yy}=20,\ f_{xy}=4 \Rightarrow f_{xx}f_{yy}>f_{xy}^2$

לכן <u>$(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$ הן נקודות מינימום</u> של f

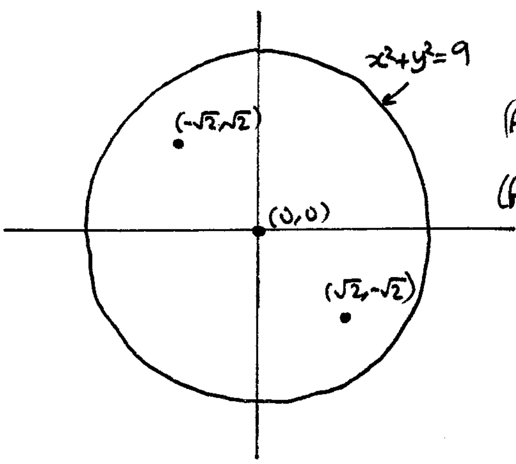
דוגמא: מצא את $\max_{\underline{x}\in D} f(\underline{x})$ ואת $\min_{\underline{x}\in D} f(\underline{x})$

כאשר
$$\left\{\begin{array}{l} D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 9\} \\ f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2 \end{array}\right.$$

פתרון: f פונקציה רציפה על תחום קומפקטי D. לכן $\left\{\begin{array}{l}\max_{\underline{x}\in D} f(\underline{x}) \\ \min_{\underline{x}\in D} f(\underline{x})\end{array}\right.$ קיימים.

צ"ל שקיימות נקודות $\underline{x}_1, \underline{x}_2 \in D$ כך ש-
$$f(\underline{x}_1)=\max_{\underline{x}\in D} f(\underline{x}) \quad , \quad f(\underline{x}_2)=\min_{\underline{x}\in D} f(\underline{x})$$

דף 64 $\Leftarrow$ נקודות סטציונריות של f הן $(0,0),(\sqrt2,-\sqrt2),(-\sqrt2,\sqrt2)$



$(0,0)$: לא אקסטרימום

$(\sqrt2,-\sqrt2)$: מינימום מקומי $(f=-8)$

$(-\sqrt2,\sqrt2)$: מינימום מקומי $(f=-8)$

או $\underline{x}_1 \in \overset{\circ}{D}$ או $\underline{x}_1 \in \partial D$

$\underline{x}_1 \in \overset{\circ}{D}$
$\Downarrow$
$\underline{x}_1$ נק' סטציונרית
$\Downarrow$
$\underline{x}_1$ אחת מהנקודות הנ"ל
$\Downarrow$
✗

או $\underline{x}_2 \in \overset{\circ}{D}$ או $\underline{x}_2 \in \partial D$

$\underline{x}_2 \in \overset{\circ}{D}$
$\Downarrow$
$\underline{x}_2$ נק' סטציונרית
$\Downarrow$
$\underline{x}_2$ אחת מהנקודות הנ"ל
$\Downarrow$
$\underline{x}_2=(\sqrt2,-\sqrt2)$ או $(-\sqrt2,\sqrt2)$

$f=-8$

צריך לבדוק מה $\begin{array}{c}\max\\ \min\end{array} f$ על ∂D.

אבל $\partial D=\{(x,y)\mid x^2+y^2=9\}$
$=\{(3\cos\theta, 3\sin\theta)\mid 0\le\theta\le 2\pi\}$

$$\begin{aligned} f(3\cos\theta,3\sin\theta) &= 81\cos^4\theta+81\sin^4\theta-18\cos^2\theta+36\cos\theta\sin\theta-18\sin^2\theta \\ &= 81(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-162\cos^2\theta\sin^2\theta-18(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+36\cos\theta\sin\theta \\ &= 81-\tfrac{81}{2}\sin^2 2\theta-18+18\sin 2\theta \\ &= -\tfrac{81}{2}\left(\sin^2 2\theta-\tfrac{4}{9}\sin 2\theta\right)+63 = -\tfrac{81}{2}\left(\sin 2\theta-\tfrac{2}{9}\right)^2+65 \end{aligned}$$

לכן $\max_{\partial D} f$ הוא 65 וקיים כאשר $\sin 2\theta=\frac{2}{9}$

וגם $\min_{\partial D} f$ הוא $-\frac{81}{2}\left(-1-\frac{2}{9}\right)^2+65 = -\frac{121}{2}+65 = \frac{9}{2}$ וקיים כאשר $\sin 2\theta=-1$

לכן: $\underline{\underline{\max_D f=65 \quad , \quad \min_D f=-8}}$

ב-∂D ; ב- $(\pm\sqrt2,\mp\sqrt2)$

דוגמה   מצא את נק' אקסטרימום של

א) $z = x + y + 4\sin x \cdot \sin y$

ב) $u = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z) \quad (a>0)$

א)

$$\begin{cases} z_x = 1 + 4\cos x \cdot \sin y \\ z_y = 1 + 4\sin x \cdot \cos y \end{cases} \xRightarrow{z_x = z_y = 0} \begin{cases} \cos x \cdot \sin y = -\tfrac14 \\ \sin x \cdot \cos y = -\tfrac14 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\tan x = \tan y$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{(n\in\mathbb{Z})}{x = y + n\pi} \Rightarrow \sin x = \underset{(-1)^n}{\pm}\sin y \Rightarrow \sin x\cdot\cos x = (-1)^n\cdot(-\tfrac14)$$

$$\Rightarrow \sin 2x = (-1)^{n+1}\cdot\tfrac12$$

$$\Rightarrow 2x = \pi/6 + (n+1)\pi + 2m\pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{n+1+2m}{2}\pi \\ y = \frac{\pi}{12} + \frac{-n+1+2m}{2}\pi \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} z_{xx} = -4\sin x\sin y = z_{yy} \\ z_{xy} = 4\cos x\cos y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} z_{xx} = z_{yy} = 4(-1)^{n+1}\sin^2 x = \begin{cases} -4\cos^2\pi/12 & \text{n זוגי} \\ +4\sin^2\pi/12 & \text{n אי זוגי} \end{cases} \\ z_{xy} = 4(-1)^n\cos^2 x = \begin{cases} +4\sin^2\pi/12 & \text{n זוגי} \\ -4\cos^2\pi/12 & \text{n אי זוגי} \end{cases} \end{matrix}$$

מקסימום — $z_{xx}z_{yy} > z_{xy}^2$ n זוגי

לא אקסטרימום — $z_{xx}z_{yy} < z_{xy}^2$ n אי זוגי $\Leftarrow \sin^2\pi/12 < \cos^2\pi/12$

לכן נקודות אקסטרימום הן בצורה: $\left(\frac{7\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + l\pi\right)$ כאשר $k,l\in\mathbb{Z}$ שניהם זוגי או שניהם אי זוגי

ב)

$$\begin{cases} u_x = ay^2z^3 - 2xy^2z^3 - y^2z^3(2y+3z) \\ u_y = 2axyz^3 - 2x^2yz^3 - 6xy^2z^3 - 6xyz^4 \\ u_z = 3axy^2z^2 - 3x^2y^2z^2 - 6xy^3z^2 - 12xy^2z^3 \end{cases} \xLeftarrow{u_x = u_y = u_z = 0} \begin{matrix} a = 2x+2y+3z & \text{או} & yz=0 \\ a = x+3y+3z & \text{או} & xyz=0 \\ a = x+2y+4z & \text{או} & xyz=0 \end{matrix}$$

$$\Downarrow$$

$x=y=z=a/7$ או $xyz=0$

$u = (a/7)^7$ $u=0$

$u_{xx} = -2y^2z^3$, $u_{xy} = 2ayz^3 - 4xyz^3 - 6y^2z^3 - 6yz^4$

$u_{xz} = 3ay^2z^2 - 6xy^2z^2 - 6y^3z^2 - 12y^2z^3$

$u_{yy} = 2axz^3 - 2x^2z^3 - 12xyz^3 - 6xz^4$

$u_{yz} = 6axyz^2 - 6x^2yz^2 - 18xy^2z^2 - 24xyz^3$

$u_{zz} = 6axy^2z - 6x^2y^2z - 12xy^3z - 36xy^2z^2$

$$\left(\frac{a}{7}\right)^5\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -6 & -6 \\ -3 & -6 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{xy} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{xz} & u_{yz} & u_{zz} \end{pmatrix}$$

Hessian של u

$$-2<0, \quad \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -2 & -6 & -6 \\ -3 & -6 & -12 \end{vmatrix} < 0 \xRightarrow{\text{מבחן Sylvester}} d^2u \text{ תבנית שלילית}$$

$$u(\underline{x}) = u(\underline{x}_0) + \underbrace{du}_{0} + \tfrac12\underbrace{d^2u}_{\text{שלילי}} + \cdots \Rightarrow \text{נק' מקסימום}$$