נגזרות חלקיות מסדר כלשהו
(higher order partial derivatives)

הגדרה * פונקציה $f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$
* נקודה $\underline{a} \in U$
* $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots m\}$

$\Leftarrow$ אומרים ש- $\left.\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}\right|_{\underline{a}}$ קיים

אם $\partial f / \partial x_{i_1}$, $\partial/\partial x_{i_2}(\partial f/\partial x_{i_1})$, $\vdots$, $\partial/\partial x_{i_{k-1}}(\dots \partial/\partial x_{i_2}(\partial f/\partial x_{i_1})\dots)$ קיימות בסביבה של $\underline{x} = \underline{a}$

וגם $\partial/\partial x_{i_k}(\partial/\partial x_{i_{k-1}}(\dots \partial/\partial x_{i_2}(\partial f/\partial x_{i_1})\dots))$ קיימת ב-$\underline{a}$

סימנים: בספרות יש סימנים:

$f_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$, $f_{i_1 \dots i_k}$, $f^{(k)}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$, $f^{(k)}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$, $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}$ לאותה נגזרת מסדר k

---

דוגמה $f(x,y,z) = x^2y + y^2z$

$f_x = 2xy \Rightarrow f_{xx} = 2y,\ f_{xy} = 2x,\ f_{xz} = 0$

$f_y = x^2 + 2yz \Rightarrow f_{yx} = 2x,\ f_{yy} = 2z,\ f_{yz} = 2y$

$f_z = y^2 \Rightarrow f_{zx} = 0,\ f_{zy} = 2y,\ f_{zz} = 0$

נגזרות מעורבות (mixed derivatives):

$f_{xy} = f_{yx}$

$f_{xz} = f_{zx}$

$f_{yz} = f_{zy}$

במקום f_{xy} יש סימנים f_{12}, f''_{xy}, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $f^{(2)}_{xy}$

משפט * f_{xy}, f_{yx} קיימות בסביבה של (x_0, y_0)
* f_{xy}, f_{yx} רציפות ב- (x_0, y_0)

$\Rightarrow \left.f_{xy}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.f_{yx}\right|_{(x_0,y_0)}$

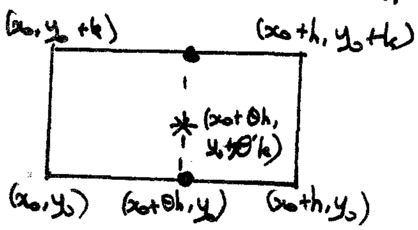
הוכחה נגדיר פונקציה ע"י: $W(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0)$ (h, k מספיק קטן)

$\phi(x) = \frac{1}{k}(f(x, y_0+k) - f(x, y_0))$ גזירה כפונקציה של x $\Rightarrow$

$\frac{W(h,k)}{hk} = \frac{\phi(x_0+h) - \phi(x_0)}{h} \overset{\text{משפט הערך הממוצע}}{=} \phi'(x_0 + \theta h)$, $\exists \theta \in (0,1)$

$= \frac{1}{k}(f_x(x_0+\theta h, y_0+k) - f_x(x_0+\theta h, y_0))$

$\underset{\exists \theta' \in (0,1)}{=} f_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta' k)$ $\leftarrow$ משפט הערך הממוצע של פונקציה $f_x(x_0+\theta h, y)$ של y



$\xrightarrow{h,k \to 0} f_{xy}(x_0, y_0)$

$\frac{W(h,k)}{hk} \xrightarrow{h,k \to 0} f_{yx}(x_0, y_0)$ גם אפשר להוכיח כ-

$\square$

דוגמאות

א) $f(x,y)$ הומוגנית מסדר 0 $((x,y)\neq(0,0))$ $\Leftarrow$ (פונקציה של y/x) $=f(x,y)$

$f(x,y)$ הומוגנית מסדר 0 בכל $\mathbb{R}^2$ $\Leftarrow$ f קבועה $\left(\begin{matrix} f(tx,ty)=f(x,y) \\ t=0 \Rightarrow f(0,0)=f(x,y)\end{matrix}\right)$

ב) $\left[f(x,y)=\begin{cases} y & x/y\in\mathbb{Q},\ y\neq 0 \\ 0 & x/y\notin\mathbb{Q} \text{ או } y=0\end{cases} \right.$ $\Leftarrow$ * f הומוגנית מסדר 1

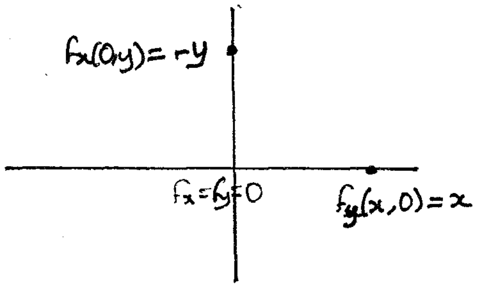
* $\partial_{(a,b)} f\Big|_{(0,0)} = \begin{cases} b & a/b\in\mathbb{Q},\ b\neq 0 \\ 0 & a/b\notin\mathbb{Q} \text{ או } b=0\end{cases}$

הומוגנית $\not\Rightarrow$ דיפרנציאבילית

* f לא דיפרנציאבילית ב-$(0,0)$
* f רציפה רק בנקודות $y=0$
* $f_x=0,\ f_y=1$ ב-$(0,0)$
* $f_x=0$ בכל קו $y=0$; f_y לא מוגדרת חוץ מב-$(0,0)$

ג) $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

f הומוגנית מסדר 2



$f=0$ בצירים $x=0,\ y=0$
$\Leftarrow f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

$(x,y)\neq(0,0)$ $\Leftarrow$ פונקציה מוגדרת ע"י נוסחה אחת:

$$f(x,y)=xy\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$f_x = y\cdot\frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)-(x^3-xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= y\cdot\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

f_x, f_y הומוגנית מסדר 1

$x\leftrightarrow y$, $f\to -f$:
$$f_y = -x\cdot\frac{y^4-x^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

לכן:

$$f_{xy}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}(f_x)\Big|_{(0,0)} = \lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{(-y)-0}{y} = -1$$

$f_{yx}(0,0)=1$ $\longleftarrow$ ($x\to y,\ f\to -f$)

לכן $f_{xy}\neq f_{yx}$ בנקודה $(0,0)$

f_{xy}, f_{yx} לא רציפות ב-$(0,0)$!

ד) $f(x,y)=\begin{cases} x^2\tan^{-1}\frac{y}{x}-y^2\tan^{-1}\frac{x}{y} & x,y\neq 0 \\ 0 & x=0 \text{ או } y=0\end{cases}$

$f=0$ בצירים $\Leftarrow f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$

לחשב $f_{xy}(0,0)$ צריך לדעת מה היו $f_x(0,y)$; אבל יש שתי נוסחות ל-f בסביבה של $(0,y)$: $\Leftarrow$ לבדוק ב'?

$f(0,y)=0$

$f(x,y)=x^2\tan^{-1}\frac{y}{x}-y^2\tan^{-1}\frac{x}{y}$ $x\neq 0$

$$\Rightarrow f_x(0,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\tan^{-1}\frac{y}{x}-y^2\tan^{-1}\frac{x}{y}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\ \underbrace{x\tan^{-1}\tfrac{y}{x}}_{\to 0} - y\,\underbrace{\frac{\tan^{-1}\frac{x}{y}}{\frac{x}{y}}}_{\to 1}$$

$$=-y$$

$\Rightarrow f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=1$ $\longleftarrow$ ($x\leftrightarrow y$, $f\to -f$)

נוסחת Taylor לכמה משתנים

נוסחת Taylor למשתנה אחד

* $F:[x_0,x_0+H]\to\mathbb{R}$
* $F, F', \dots, F^{(n)}$ רציפות ב- $[x_0,x_0+H]$
* $F^{(n+1)}$ קיימת בקטע (x_0,x_0+H)

$\Leftarrow$ לכל $x\in[x_0,x_0+H]$, קיים $c\in[x_0,x]$ כך ש-

$$F(x)=F(x_0)+\frac{F'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{F^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

שארית בצורת Lagrange

[גם נכון על קטע $[x_0-H,x_0]$ או סביבה של x_0]

נוסחת Taylor לשני משתנים

* $f: D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$
* D סביבה של (x_0,y_0)
* כל נגזרות חלקיות עד סדר $n+1$ של f הן קיימות ורציפות ב-D
* $\Delta x,\Delta y$ מספיק קטן כך שבקטע $[(x_0,y_0),(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)]\subset D$

$\Leftarrow$ קיים $\theta\in(0,1)$ כך ש-

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)&=f(x_0,y_0)+\frac{f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y}{1!}\\&+\frac{f_{xx}(x_0,y_0)\Delta x^2+2f_{xy}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y+f_{yy}(x_0,y_0)\Delta y^2}{2!}\\&+\dots+\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial x^i\partial y^{n-i}}\Big|_{(x_0,y_0)}\Delta x^i(\Delta y)^{n-i}\\&+\frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^i\partial y^{n+1-i}}\Big|_{(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)}(\Delta x)^i(\Delta y)^{n+1-i}\end{aligned}$$

הוכחה * נגזרות חלקיות עד סדר $n+1$ רציפות $\Leftarrow$ הם לא תלוי בסדר של נגזרות (לדוגמא $f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$)

נגדיר F ע"י $F(t)=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$ $\Rightarrow$ $F(1)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$, $F(0)=f(x_0,y_0)$

f_x, f_y רציפות $\Leftarrow$ f דיפרנציאבילית $\Leftarrow$ F דיפרנציאבילית $\Leftarrow$ $F'(t)=f_x\cdot\Delta x+f_y\cdot\Delta y$ בנקודה $(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$

$f_{xx},f_{xy},f_{yx},f_{yy}$ רציפות $\Leftarrow$ f_x,f_y דיפרנציאביליות $\Leftarrow$ F' גזירה $\Leftarrow$

$$F''(t)=((f_x)_x\Delta x+(f_x)_y\Delta y)\Delta x+((f_y)_x\Delta x+(f_y)_y\Delta y)\Delta y$$

וגם $f_{xy}=f_{yx}$

כל נגזרות בנקודה $(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)$

$$=f_{xx}\Delta x^2+2f_{xy}\Delta x\Delta y+f_{yy}(\Delta y)^2$$

טענה $F^{(n)}(t)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f}{\partial x^i\partial y^{n-i}}\Big|_{(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)}(\Delta x)^i(\Delta y)^{n-i}$ $\xRightarrow{\text{נוסחת Taylor משתנה אחד}}$ מסקנה

$\square$

הוכחה (אינדוקציה) נכון ל-n $\Leftarrow$

$$F^{(n+1)}(t)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\underbrace{\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^i\partial y^{n-i}}\right)\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^n f}{\partial x^i\partial y^{n-i}}\right)\Delta y\right]}_{\text{נגזרת של } \frac{\partial^n f}{\partial x^i\partial y^{n-i}}\big|_{(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)}}(\Delta x)^i(\Delta y)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^{i+1}\partial y^{n-i}}(\Delta x)^{i+1}(\Delta y)^{n-i}+\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^i\partial y^{n+1-i}}(\Delta x)^i(\Delta y)^{n+1-i}=\sum_{i=0}^{n+1}\underbrace{\left[\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right]}_{=\binom{n+1}{i}}\frac{\partial^{n+1}f}{\partial x^i\partial y^{n+1-i}}(\Delta x)^i(\Delta y)^{n+1-i}\Rightarrow$$ נכון ל-$(n+1)$

$\square$

נוסחת Taylor לכמה משתנים (כללי)

משפט

* $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^d$ קבוצה פתוחה
* $[\underline{a},\underline{b}] \in D$ הקטע
* כל נגזרות חלקיות עד סדר $n+1$ של f, הן קיימות ורציפות ב-D

$\Leftarrow$ קיים $\theta \in (0,1)$ כך ש-

$$f(\underline{b})-f(\underline{a})=\sum_{k=1}^{n}\frac{(T^{(k)}f)(\underline{a})}{k!}+\frac{(T^{(n+1)}f)(\underline{a}+\theta\underline{h})}{(n+1)!}$$

כאשר $\underline{h}=\underline{b}-\underline{a}$

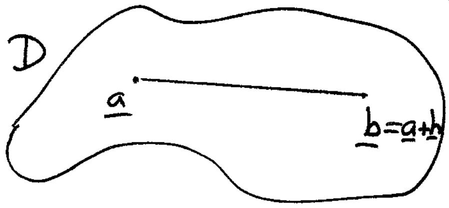
וגם $T=h_1\partial/\partial x_1+\cdots+h_d\partial/\partial x_d$.

העתקה על פונקציות

הוכחה

נגדיר פונקציה $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ ע"י

$$F(t)=f(\underline{a}+t\underline{h})$$



* F גזירה ברציפות $(n+1)$ פעמים
* $F(0)=f(\underline{a}),\ F(1)=f(\underline{b})$
* $F^{(k)}(t)=(T^{(k)}f)(\underline{a}+t\underline{h})$ $\xleftarrow{\text{אינדוקציה}}$

g דיפרנציאבילית $\Leftarrow$ $\frac{d}{dt}(g(\underline{a}+t\underline{h}))=(Tg)(\underline{a}+t\underline{h})$

הוכחה כלל השרשרת

$$\frac{d}{dt}(g(\underline{a}+t\underline{h}))=(Dg)\big|_{\underline{a}+t\underline{h}}\cdot\underbrace{\underline{h}}_{\frac{d}{dt}(\underline{a}+t\underline{h})}$$

$$=\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{\underline{a}+t\underline{h}}\cdot h_i$$

$$=(Tg)(\underline{a}+t\underline{h})$$

□

$\Leftarrow$ משפט מ"ק מנוסחת Taylor ל-F:

$$F(1)=F(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{F^{(k)}(0)}{k!}+\frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$ קיים $\theta\in(0,1)$

□

דוגמאות ① $d=2$:

$$T=h_1\partial/\partial x_1+h_2\partial/\partial x_2$$

$$T^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}h_1^i h_2^{n-i}\frac{\partial^n}{\partial x_1^i\,\partial x_2^{n-i}}$$

② $\underline{h}=\underline{b}-\underline{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \Leftarrow \underline{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \underline{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$

$$f(x,y,z)=z\cos(xy)$$

$$T=\partial/\partial x-\partial/\partial y+\partial/\partial z$$

$$Tf=-zy\sin(xy)+zx\sin(xy)+\cos(xy)$$

$$=z(x-y)\sin(xy)+\cos(xy)$$

$$T^2f=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)(Tf)$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}-2\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}$$

③ יש נוסחה כללי ל-T^n:

$$T^nf=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_d\in\mathbb{Z}^+\\ i_1+\cdots+i_d=n}}\frac{n!}{i_1!\cdots i_d!}\cdot\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_d^{i_d}}h_1^{i_1}\cdots h_d^{i_d}$$

מקדמים מולטינומים

$$(x_1+\cdots+x_d)^n=\sum_{\substack{i_1,\dots,i_d\in\mathbb{Z}^+\\ i_1+\cdots+i_d=n}}\frac{n!}{i_1!\cdots i_d!}\cdot x_1^{i_1}\cdots x_d^{i_d}$$

דיפרנציאל:

$$d^nf\equiv\sum\frac{n!}{i_1!\cdots i_d!}\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_d^{i_d}}(dx_1)^{i_1}\cdots(dx_d)^{i_d}$$

דוגמאות של טורי Taylor לכמה משתנים

מספר של
בן-ציון קון
מדו"א 2

א. מצא du בנקודה $(3,4)$ כאשר $u=\sqrt{x^2+y^2}$, $\Delta x=0.1, \Delta y=0.02$.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{3}{5} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow du = \tfrac{3}{5}\Delta x + \tfrac{4}{5}\Delta y = 0.06 + 0.016 = 0.076$$

ב. מצא קירוב ל- $\sin 29^\circ \cdot \tan 46^\circ$

$$f(x,y) = \sin x \tan y \Rightarrow \begin{matrix} f_x = \cos x \tan y \\ f_y = \sin x \sec^2 y \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x_0 = 30^\circ = \pi/6 \\ y_0 = 45^\circ = \pi/4 \end{cases} \quad \Delta x = -1^\circ = -\pi/180 \quad \Delta y = 1^\circ = \pi/180$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_0,y_0) = \frac{1}{2} \\ f_x(x_0,y_0) = \sqrt{3}/2 \\ f_y(x_0,y_0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta x + \Delta y = \tfrac{1}{2} + \pi/180\,(1-\sqrt{3}/2) = 0.498\ldots$$

ג. מצא d^2u כאשר $u=f(ye^x, xe^y)$ ב- $x=y=0$

$$\begin{pmatrix} u=f(v,w) \\ v=ye^x \\ w=xe^y \end{pmatrix} \Rightarrow d^2u = u_{xx}\Delta x^2 + 2u_{xy}\Delta x\Delta y + u_{yy}\Delta y^2$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} = ye^x\frac{\partial}{\partial v} + e^y\frac{\partial}{\partial w} \\ \frac{\partial}{\partial y} = e^x\frac{\partial}{\partial v} + xe^y\frac{\partial}{\partial w} \end{pmatrix}$$

$$u_x = f_v ye^x + f_w e^y, \quad u_y = f_v e^x + f_w xe^y$$

$$u_{xx} = (f_{vv}ye^x + f_{vw}e^y)ye^x + f_v ye^x + (f_{wv}ye^x + f_{ww}e^y)e^y$$

$$u_{xy} = (f_{vv}e^x + f_{vw}xe^y)ye^x + f_v e^x + (f_{wv}e^x + f_{ww}xe^y)e^y + f_w e^y$$

$$u_{yy} = (f_{vv}e^x + f_{vw}xe^y)e^x + (f_{wv}e^x + f_{ww}xe^y)xe^y + f_w xe^y$$

$$\Rightarrow d^2u = f_{ww}\Delta x^2 + 2(f_v + f_w + f_{wv})\Delta x\Delta y + f_{vv}\Delta y^2 \Leftarrow x=y=0$$

$$\Rightarrow \underset{\text{סדר שני בסביב } (0,0)}{\Delta u} \cong du + \tfrac{1}{2}d^2u = \underbrace{(f_w\Delta x + f_v\Delta y)}_{u_x = f_w(0,0),\ u_y = f_v(0,0)} + \tfrac{1}{2}(f_{ww}\Delta x^2 + 2(f_v + f_w + f_{vw})\Delta x\Delta y + f_{vv}\Delta y^2) \quad \circledast$$

בנקודה $x=y=0$

ד. מצא d^2u כאשר $u=xyz$

$u_{xx} = u_{yy} = u_{zz} = 0$

$u_{xy} = z, \quad u_{xz} = y, \quad u_{yz} = x$

$d^2u = 2z\,dx\,dy + 2y\,dx\,dz + 2x\,dy\,dz$

כיוון אחר

$$u = f(v,w) \Rightarrow \Delta u = \Delta f \approx df + \tfrac{1}{2}d^2f = (f_v\Delta v + f_w\Delta w) + \tfrac{1}{2}(f_{vv}\Delta v^2 + 2f_{vw}\Delta v\Delta w + f_{ww}\Delta w^2)$$

$$v = ye^x \Rightarrow \begin{cases} v_{xx} = v_x = ye^x \\ v_{xy} = v_y = e^x \\ v_{yy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underset{\text{סדר שני}}{\Delta v} \approx dv + \tfrac{1}{2}d^2v = \Delta y + \tfrac{1}{2}(2\Delta x\Delta y) \quad \text{ב-}(0,0)$$

$$w = xe^y \Rightarrow \begin{cases} w_{xx} = 0 \\ w_{xy} = w_x = e^y \\ w_{yy} = w_y = xe^y \end{cases} \Rightarrow \underset{\text{סדר שני}}{\Delta w} \approx dw + \tfrac{1}{2}d^2w = \Delta x + \tfrac{1}{2}(2\Delta x\Delta y)$$

לכן:

$$\underset{\text{סדר שני}}{\Delta u} \approx (f_v(\Delta y + \Delta x\Delta y) + f_w(\Delta x + \Delta x\Delta y)) + \tfrac{1}{2}(f_{vv}\Delta y^2 + 2f_{vw}\Delta x\Delta y + f_{ww}\Delta x^2)$$

אותה תשובה ⊛

59

ו) פתח את e^{x+y} עד סדר שלישי בסביבת $(0,0)$

$$f(x,y)=e^{x+y} \Leftarrow \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}} = e^{x+y} \underset{(0,0)\text{ב}}{=} 1 \Leftarrow$$ טור Taylor הוא
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i y^{n-i}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!(n-i)!}x^i y^{n-i}\right)$$
$$= \underbrace{1}_{f(0,0)} + \underbrace{x+y}_{df(0,0)} + \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2 + xy + \tfrac{1}{2}y^2}_{\frac{1}{2}d^2f(0,0)} + \underbrace{\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2y + \tfrac{1}{2}xy^2 + \tfrac{1}{6}y^3}_{\frac{1}{6}d^3f(0,0)} + \cdots$$

[הערה $= (1+x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{6}x^3+\cdots)(1+y+\tfrac{1}{2}y^2+\tfrac{1}{6}y^3+\cdots)$]

ז. פתח את $\tan^{-1}\frac{1+x}{1-y}$ עד סדר שלישי בסביבת $(0,0)$

$$f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-y}\right) = g\left(\frac{1+x}{1-y}\right)$$

טור Taylor של g בסביבת $z=1$ עד סדר שלישי $\longrightarrow g(z)=\tan^{-1}z = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(z-1)-\frac{1}{4}(z-1)^2+\frac{1}{12}(z-1)^3-\cdots$

($z=\frac{1+x}{1-y}$ בסביבת 1)

$$g'(z)=\frac{1}{1+z^2} \Rightarrow \frac{1}{2}=g'(1)$$
$$g''(z)=-\frac{2z}{(1+z^2)^2} \Rightarrow -\frac{1}{2}=g''(1)$$
$$g'''(z)=\frac{2(3z^2-1)}{(1+z^2)^3} \Rightarrow \frac{1}{2}=g'''(1)$$

$$z=\frac{1+x}{1-y} = (1+x)(1+y+y^2+y^3+\cdots) = 1+(x+y)+(xy+y^2)+(xy^2+y^3)+\cdots$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-y}\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left((x+y)+(xy+y^2)+(xy^2+y^3)\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left((x+y)+(xy+y^2)+\cdots\right)^2 + \frac{1}{12}\left((x+y)+\cdots\right)^3+\cdots$$
$$\cong \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x+y)+\left(\frac{1}{2}(xy+y^2)-\frac{1}{4}(x+y)^2\right)+\left(\frac{1}{2}(xy^2+y^3)-\frac{1}{2}(x+y)(xy+y^2)+\frac{1}{12}(x+y)^3\right)$$
$$f_{xxy}(0,0)=-\frac{1}{2} \Leftarrow \quad = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}(x+y)+\left(-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2\right)+\left(\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{4}x^2y-\frac{1}{4}xy^2+\frac{1}{12}y^3\right)$$ לסדר שלישי

ל. פתח את $\cos x\cos y$ בסביבת $(0,0)$ עד סדר שלישי

$$f(x,y)=\cos x\cos y = -f_{xx}=-f_{yy} \Leftarrow -f_{xxx}=-f_{xyy}=f_x=-\sin x\cos y$$
$$-f_{yyy}=-f_{xxy}=f_y=-\cos x\sin y$$
$$f_{xy}=\sin x\sin y$$

$\Leftarrow$ ב-$(0,0)$ כל הנגזרות חלקיות עד סדר מתאפסים מ-N

$f_{xx}=f_{yy}=-f=-1$

$\Downarrow$

$$f(x,y)=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+\cdots \text{ (קירוב מסדר 3)} = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{24}\Big[(x^4+6x^2y^2+y^4)\cos\theta x\cos\theta y$$
$$-4(xy^3+x^3y)\sin\theta x\sin\theta y\Big]$$

שארית $n=3$ בצורת Lagrange

$0<\theta<1$

מ. פתח את x/y לסדר שני בסביבת $(1,1)$

$$f(x,y)=x/y \Leftarrow \begin{cases} f_x = 1/y \\ f_y = -x/y^2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} f_{xx}=0 \\ f_{xy}=-1/y^2 \\ f_{yy}=2x/y^3 \end{cases} \Leftarrow$$
$$f(x,y)=1+(x-1)-(y-1)-(x-1)(y-1)+(y-1)^2+\cdots$$