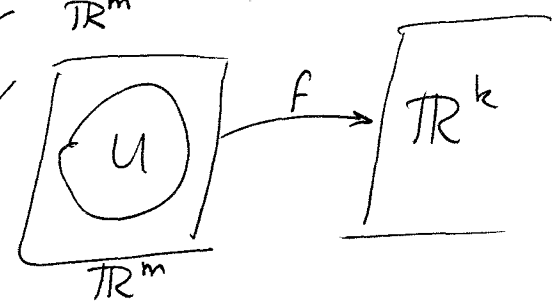
פונקציות $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

פונקציה $f: U \to \mathbb{R}^k$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$



מקרה $k=1$ $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^m$ $f(x_1, \dots, x_m)$

דוגמא $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$

מקרה $m=1$ $f:$ קטע ב-$\mathbb{R}$ $\to \mathbb{R}^k$ $\quad \underline{f}(t) \in \mathbb{R}^k$

דוגמא $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

מקרה כללי דוגמא $f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ x_2^2 + x_3 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

הגדרה $\begin{cases} f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \\ x_0 \in \bar{U} \\ \underline{L} \in \mathbb{R}^k \end{cases}$ אומרים ש- $\underline{L} = \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x})$ אם

$$(*) \begin{pmatrix} \underline{x}^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \underline{x}_0 \\ \underline{x}^{(n)} \in U \end{pmatrix} \Rightarrow f(\underline{x}^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \underline{L}$$

או אם

$$(\#) \begin{pmatrix} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \underline{x} \in U \cap B_\delta(\underline{x}_0) \\ \Rightarrow f(\underline{x}) \in B_\varepsilon(\underline{L}) \end{pmatrix}$$

$$[d(\underline{x}, \underline{x}_0) < \delta \Rightarrow d(f(\underline{x}), \underline{L}) < \varepsilon]$$

הוכחה של שקילות

$\underline{(\#) \Leftarrow (*)}$ נניח בשלילי: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists \underline{x} \in U \cap B_\delta(\underline{x}_0), \ f(\underline{x}) \notin B_\varepsilon(\underline{L})$

$\overset{\delta = 1/n}{\Longleftarrow} \ \exists \underline{x}^{(n)} \in U \cap B_{1/n}(\underline{x}_0), \ f(\underline{x}^{(n)}) \notin B_\varepsilon(\underline{L})$

$\Downarrow$ $d(\underline{x}^{(n)}, \underline{x}_0) < 1/n$ $\Downarrow$ $\underline{x}^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \underline{x}_0$ $\overset{(*)}{\Downarrow}$ $f(\underline{x}^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \underline{L} \Rightarrow \exists N \ \forall n > N \ d(f(\underline{x}^{(n)}), \underline{L}) < \varepsilon$

$\Downarrow$ $d(\underline{x}^{(n)}, \underline{L}) \geq \varepsilon \quad \forall n$

סתירה $\xrightarrow[n = N+1]{} (\#)$

$\underline{(*) \Leftarrow (\#)}$ נניח ש- $\begin{pmatrix} \underline{x}^{(n)} \in U \\ \underline{x}^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \underline{x}_0 \end{pmatrix}$. צריך להוכיח כי $f(\underline{x}^{(n)}) \xrightarrow{n\to\infty} \underline{L}$

כלומר $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n > N \ d(f(\underline{x}^{(n)}), \underline{L}) < \varepsilon$

נניח בשלילי: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N \ d(f(\underline{x}^{(n)}), \underline{L}) \geq \varepsilon$

לבנות סדרה עולה ממש $(n_r) \subset \mathbb{N}$ כך ש-

$d(f(\underline{x}^{(n_r)}), \underline{L}) \geq \varepsilon$ לכל r

$(\#) \Rightarrow (\exists \delta > 0 \ \forall \underline{x} \in U \ d(\underline{x}, \underline{x}_0) < \delta \Rightarrow d(f(\underline{x}), \underline{L}) < \varepsilon)$

$\underline{x}^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \underline{x}_0 \Rightarrow \underline{x}^{(n_r)} \xrightarrow{r\to\infty} \underline{x}_0 \Rightarrow \exists N \ \forall r > N \ d(\underline{x}^{(n_r)}, \underline{x}_0) < \delta$

$\overset{(\#)}{\Rightarrow} d(f(\underline{x}^{(n_r)}), \underline{L}) < \varepsilon$

סתירה □

הגדרה $\begin{cases} f: U \to \mathbb{R}^k, \ U \subseteq \mathbb{R}^m \\ \underline{x}_0 \in U \end{cases}$ f נקראת **רציפה** ב-$\underline{x}_0$ אם $f(\underline{x}_0) = \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x})$

אם $\underline{x}^{(n)} \to \underline{x}_0 \Rightarrow f(\underline{x}^{(n)}) \to f(\underline{x}_0)$

או אם $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ f(U \cap B_\delta(\underline{x}_0)) \subset B_\varepsilon(f(\underline{x}_0))$

או אם $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ (d(\underline{x}, \underline{x}_0) < \delta \Rightarrow d(f(\underline{x}), f(\underline{x}_0)) < \varepsilon)$

<u>דוגמאות</u> א)

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0}\begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_k(\underline{x})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f_k(\underline{x})\end{pmatrix}$$

ב) $\lim_{(x,y)\to\underline{0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ לא קיים

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = -1$$

ג) $\lim_{(x,y)\to\underline{0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ לא קיים

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0 = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \left(x=y \Rightarrow \frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\,!\right)$$

ד) $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{x_0}{y_0}} f(x,y)$ קיים

קיים $\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\phi(y)$ לכל $y\in[c,d]$

$f:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$

$\Leftarrow$ $\lim_{y\to y_0}\phi(y)$ קיים

$$\lim_{y\to y_0}\phi(y) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$$

<u>הוכחה</u> $\lim_{\binom{x}{y}\to\binom{x_0}{y_0}} f(x,y)$ קיים $\Leftarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ |f(x,y)-L|<\varepsilon/2$

לכל $d((x,y),(x_0,y_0))<\delta$

$\Uparrow$

$d(x,x_0),\ d(y,y_0)<\delta/2$

נניח ש- $d(y,y_0)<\delta/2$.

$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\phi(y)$ $\Leftarrow$ $\exists\rho>0\ d(x,x_0)<\rho \Rightarrow |f(x,y)-\phi(y)|<\varepsilon/2$

ρ תלוי ב-y

נבחר x כך ש- $d(x,x_0)<\delta/2,\rho$ $\Leftarrow$ $|\phi(y)-L| \le |\phi(y)-f(x,y)|+|f(x,y)-L| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$

$\square$

	<u>דרך קבוצות פתוחות</u>	<u>דרך סדרות</u>
$\bar{A}$	קבוצה סגורה הכי קטן שמכיל את A	קבוצה של כל הגבולות של סדרות ב- A
X קומפקטי	לכל כיסוי פתוחה קיים תת כיסוי סופי ($\bigcup_{i\in I} U_i = X$, $U_i\subset X$ פתוחות $\Leftarrow$ $\exists J\subset I$ סופי , $\bigcup_{i\in J} U_i = X$)	Heine-Borel לכל סדרה קיימת תת סדרה מתכנסת
X שלם	לכל <u>סדרה יורדת</u> של כדורים $B_{r_n}(x_n)$, $B_{r_{n+1}}(x_{n+1})\subset B_{r_n}(x_n)$ קיים חיתוך לא ריקה $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(x_n)\neq\emptyset$	כל סדרת קושי היא סדרה מתכנסת
$f:X\to Y$ רציפה	$A\subset Y$ פתוחה $\Rightarrow$ $f^{-1}(A)\subset X$ פתוחה	$x^{(n)}\xrightarrow{n\to\infty}x \Rightarrow f(x^{(n)})\xrightarrow{n\to\infty}f(x)$

רציפות של פונקציות $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

הגדרה $\underline{f}: \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cap}{U}} \to \mathbb{R}^n$ רציפה $\Leftrightarrow$ $\underline{f}$ רציפה בכל נקודה $\underline{x}_0$ ב-U

$\Leftrightarrow$ לכל סדרה מתכנסת שב-U $\underline{x}_i \to$ בתוך U

$$\lim_{i\to\infty} \underline{f}(\underline{x}_i) = \underline{f}\left(\lim_{i\to\infty} \underline{x}_i\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\left(\begin{array}{l}\forall \varepsilon>0\ \forall \underline{x}\in U\ \exists \delta>0\ \forall \underline{y}\in U \\ \quad d(\underline{x},\underline{y})<\delta \Rightarrow d(\underline{f}(\underline{x}),\underline{f}(\underline{y}))<\varepsilon\end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\forall\varepsilon>0\ \forall \underline{x}\in U\ \exists\delta>0\quad \underline{f}(B_\delta(\underline{x})) \subset B_\varepsilon(\underline{f}(\underline{x}))$$

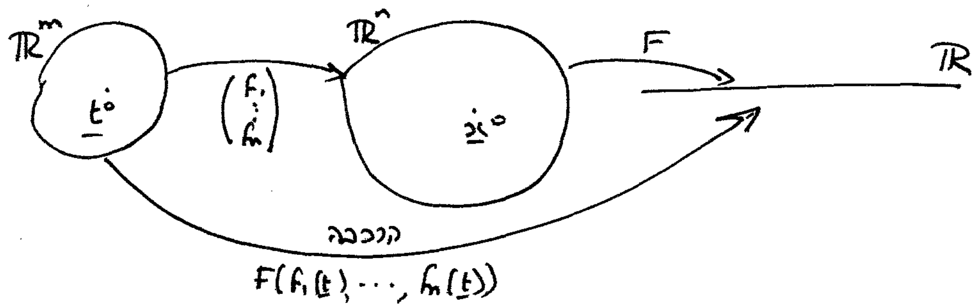
הרכבה של פונקציות רציפות

* $f_i:$ (סביבה של $\underline{t}^0$ ב-$\mathbb{R}^m$) $\to \mathbb{R}$, $1\le i\le n$
* $F:$ (סביבה של $\underline{x}^0$ ב-$\mathbb{R}^n$) $\to \mathbb{R}$

$x_i^0 = f_i(\underline{t}^0)$

* f_i רציפה ב-$\underline{t}^0$ לכל i
* F רציפה ב-$\underline{x}^0$

$\Leftarrow$ $F(f_1(\underline{t}),\dots,f_n(\underline{t}))$: (סביבה של $\underline{t}^0$ ב-$\mathbb{R}^m$) $\to \mathbb{R}$ היא רציפה ב-$\underline{t}^0$



הוכחה

$$\text{סדרה מתכנסת} \xrightarrow[\text{רציפה}]{f_i} \text{סדרה מתכנסת} \xrightarrow[\text{רציפה}]{F} \text{סדרה מתכנסת}$$

דוגמאות

א) $f_1(s,t) = st$
$f_2(s,t) = s+t$
$F(x_1,x_2) = \frac{x_1}{x_2}$
f_1, f_2 רציפות
F רציפה ב-(x_1,x_2), $x_2\neq 0$

$\Leftarrow$ $F(f_1,f_2) = \frac{st}{s+t}$ רציפה בכל נקודה (s,t), $s+t\neq 0$

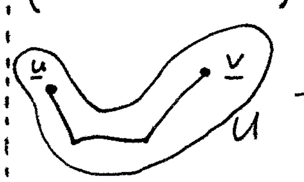
ב) $\underline{F}: \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{\cap}{U}} \to \mathbb{R}^n$ רציפה אמ"מ $f_i: U\to\mathbb{R}$ רציפות $\forall i$ $(1\le i\le n)$

ג) $d: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ רציפה

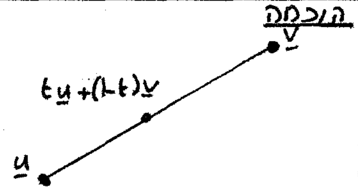
משפט הערך הביניים

* $f: U_{\subseteq\mathbb{R}^m} \to \mathbb{R}$
* $\underline{u},\underline{v}\in U$
* $f(\underline{u}) < C < f(\underline{v})$
* U קבוצה קשירה

$\Leftarrow$ $(\exists \underline{x}\in U: f(\underline{x}) = C)$



הוכחה



$f(t\underline{u}+(1-t)\underline{v}) : [0,1] \to \mathbb{R}$
פונקציה רציפה

$\boxed{44}$

<u>משפט</u>

* $f: \underset{\mathbb{R}^m}{\overset{}{U}} \to \mathbb{R}$ רציפה, $U \subset \mathbb{R}^m$
* U קבוצה קומפקטית (חסומה וסגורה)

$\Leftarrow$

* f חסומה
* $\exists \underline{y},\underline{z}\in U: \ \sup_{\underline{x}\in U} f(\underline{x}) = f(\underline{y})$

$\inf_{\underline{x}\in U} f(\underline{x}) = f(\underline{z})$

כלומר: $f(U)\subset\mathbb{R}$ קבוצה קומפקטית (חסומה וסגורה)

<u>הוכחה</u> צ"ל שלכל סדרה ב- $f(U)$ קיימת תת-סדרה מתכנסת.

נניח ש- (t_n) סדרה ב- $f(U)$ $\Leftarrow$ $\exists \underline{x}_n\in U: \ t_n = f(\underline{x}_n)$

U קומפקטית $\Leftarrow$ קיימת תת סדרה $(\underline{x}_{n_k})$ מתכנסת

$\lim_{k\to\infty} \underline{x}_{n_k} \in U$

$\Leftarrow \lim_{k\to\infty} t_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(\underline{x}_{n_k}) \underset{f \text{ רציפה}}{=} f\left(\lim_{k\to\infty} \underline{x}_{n_k}\right) \in f(U)$

$\square$

<u>הגדרה</u> $f: \underset{\mathbb{R}^m}{U} \to \mathbb{R}^n$ <u>רציפה במ"ש</u> $\Longleftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \forall\varepsilon>0 \ \exists\delta(\varepsilon)>0 \ \forall\underline{x}\in U \ \forall\underline{y}\in U \\ d(\underline{x},\underline{y})<\delta(\varepsilon) \Rightarrow d(f(\underline{x}),f(\underline{y}))<\varepsilon \end{pmatrix}$$

<u>משפט (Cantor)</u>

* $U\subset\mathbb{R}^m$ קומפקטית
* $f:U\to\mathbb{R}^n$ רציפה

$\Leftarrow$ f רציפה במ"ש

<u>הוכחה</u> נניח בשלילה ש- f לא רציפה במ"ש

$\Leftarrow \ \exists\varepsilon>0 \ \forall\delta>0 \ \exists\underline{x},\underline{y}\in U \ \ d(\underline{x},\underline{y})<\delta, \ d(f(\underline{x}),f(\underline{y}))\geq\varepsilon$

$\circledast \quad \underset{\delta=1/n}{\Leftarrow} \ \forall n\in\mathbb{N} \ \exists\underline{x}_n,\underline{y}_n\in U \ \ d(\underline{x}_n,\underline{y}_n)<\frac{1}{n}, \ d(f(\underline{x}_n),f(\underline{y}_n))\geq\varepsilon$

U קומפקטית $\Leftarrow$ קיימת תת סדרה מתכנסת של $(\underline{x}_n)$: $\underline{x}_{n_k}\xrightarrow{k\to\infty}\underline{x}$

U קומפקטית $\Leftarrow$ קיימת תת סדרה מתכנסת של $(\underline{y}_{n_k})$: $\underline{y}_{n_{k_i}}\xrightarrow{i\to\infty}\underline{y}$

$\Leftarrow \ \underline{x}_{n_{k_i}}\xrightarrow{i\to\infty}\underline{x}, \ \underline{y}_{n_{k_i}}\xrightarrow{i\to\infty}\underline{y}$

$\circledast \ \Leftarrow \ 0 \leq d(\underline{x},\underline{y}) \underset{d \text{ רציפה}}{\longleftarrow} d(\underline{x}_{n_{k_i}},\underline{y}_{n_{k_i}}) < \frac{1}{n_{k_i}} \xrightarrow{i\to\infty} 0$

$\Leftarrow \ d(\underline{x},\underline{y})=0$

$\Leftarrow \ \underline{x}=\underline{y}$

f רציפה ב- $\underline{x}$ $\Leftarrow$ $\exists\delta>0 \ \forall\underline{z}\in U \ \ d(\underline{x},\underline{z})<\delta \Rightarrow d(f(\underline{x}),f(\underline{z}))<\frac{\varepsilon}{2}$

$\begin{cases} \underline{x}_{n_{k_i}}\xrightarrow{i\to\infty}\underline{x} \\ \underline{y}_{n_{k_i}}\xrightarrow{i\to\infty}\underline{x} \end{cases} \Leftarrow \begin{matrix} d(\underline{x},\underline{x}_{n_{k_i}})<\delta \\ d(\underline{x},\underline{y}_{n_{k_i}})<\delta \end{matrix}$ לכל i מספיק גדול $\Leftarrow \begin{rcases} d(f(\underline{x}_{n_{k_i}}),f(\underline{x}))<\frac{\varepsilon}{2} \\ d(f(\underline{y}_{n_{k_i}}),f(\underline{x}))<\frac{\varepsilon}{2} \end{rcases}$

$\underset{\text{אי שיוויון המשולש}}{\Leftarrow} \ d(f(\underline{x}_{n_{k_i}}),f(\underline{y}_{n_{k_i}}))<\varepsilon$

סתירה ל- $\circledast$ $d(f(\underline{x}_n),f(\underline{y}_n))\geq\varepsilon$

$\square$