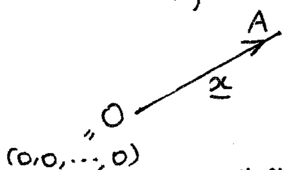
מרחבי מכפלה פנימית

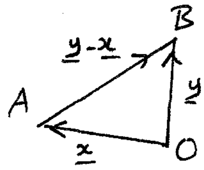
n-dimensional Euclidean space

מרחב האוקלידי n-מימדי $= E_n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\}$
נקודות



לכל נקודה $(x_1,\dots,x_n) \in E_n$, יש וקטור $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$
$\overset{\shortparallel}{A}$

לכל שני נקודות $A,B \in E_n$, יש וקטור $\overrightarrow{AB} \overset{\shortparallel}{=} \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$



<u>נורמה של וקטור</u>: $\|\underline{x}\| \equiv \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)}$ ⇐ <u>מרחק</u> $AB = \|\underline{x}-\underline{y}\| = \|\underline{y}-\underline{x}\|$.

<u>מכפלה פנימית</u> $\underline{x}\cdot\underline{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ⇐ $\underline{x}\cdot\underline{x} = \|\underline{x}\|^2$

<u>הגדרה</u> <u>מרחב מכפלה פנימית</u> (inner product space) הוא זוג של מרחב וקטורי X והעתקה $X\times X \to \mathbb{R}$, $(\underline{x},\underline{y}) \mapsto \underline{x}\cdot\underline{y}$ כך ש-

(1) (לינאריות) א) $(\underline{x}+\underline{y})\cdot\underline{z} = \underline{x}\cdot\underline{z}+\underline{y}\cdot\underline{z}$ $\quad \forall \underline{x},\underline{y},\underline{z}\in X$

ב) $(\lambda\underline{x})\cdot\underline{z} = \lambda\,\underline{x}\cdot\underline{z}$ $\quad \forall \underline{x},\underline{z}\in X \ \forall \lambda\in\mathbb{R}$

(2) (סימטריה) $\underline{x}\cdot\underline{y} = \underline{y}\cdot\underline{x}$ $\quad \forall \underline{x},\underline{y}\in X$

(3) (חיוביות) א) $\underline{x}\cdot\underline{x} \ge 0$ $\quad \forall \underline{x}\in X$

ב) $\underline{x}\cdot\underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$

<u>נגדיר: $\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x}\cdot\underline{x}} \in \mathbb{R}^+$</u>

<u>דוגמאות</u> א) $X = \mathbb{R}^n$, $\underline{x}\cdot\underline{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

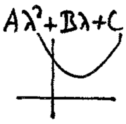
ב) $X = C[0,1] = \{$פונקציות רציפות על $[0,1]\}$, $f\cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$

<u>אי שיוויון Cauchy-Schwarz</u> $|\underline{x}\cdot\underline{y}| \le \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|$ לכל $\underline{x},\underline{y}\in X$ (X מרחב מכפלה פנימית כללית)

<u>הוכחה</u> $0 \le \|\lambda\underline{x}+\underline{y}\|^2 = (\lambda\underline{x}+\underline{y})\cdot(\lambda\underline{x}+\underline{y}) = \lambda^2\underline{x}\cdot\underline{x}+\lambda\underline{x}\cdot\underline{y}+\lambda\underline{y}\cdot\underline{x}+\underline{y}\cdot\underline{y}$
③ (לכל $\lambda\in\mathbb{R}$) ①

$\overset{②}{=} \lambda^2\underline{x}\cdot\underline{x}+2\lambda\underline{x}\cdot\underline{y}+\underline{y}\cdot\underline{y}$

לכן יש פונקציה ריבועית של λ שהיא חיובית לכל $\lambda\in\mathbb{R}$ $\quad A\lambda^2+B\lambda+C \ge 0 \ \forall\lambda$



(דיסקרימיננטה) discriminant B^2-4AC

⇐ $(2\underline{x}\cdot\underline{y})^2 - 4(\underline{x}\cdot\underline{x})(\underline{y}\cdot\underline{y}) \le 0$

⇐ $(\underline{x}\cdot\underline{y})^2 \le (\underline{x}\cdot\underline{x})(\underline{y}\cdot\underline{y})$

⇐ $|\underline{x}\cdot\underline{y}| \le \|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|$

□

<u>אי שיוויון המשולש</u> $\|\underline{x}+\underline{y}\| \le \|\underline{x}\|+\|\underline{y}\|$ לכל $\underline{x},\underline{y}\in X$ (X מרחב מכפלה פנימית כללית)

<u>הוכחה</u> $\|\underline{x}+\underline{y}\|^2 = (\underline{x}+\underline{y})\cdot(\underline{x}+\underline{y}) = \underline{x}\cdot\underline{x}+2\underline{x}\cdot\underline{y}+\underline{y}\cdot\underline{y} \overset{\text{CS}}{\le} \|\underline{x}\|^2+2\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|+\|\underline{y}\|^2$
$= (\|\underline{x}\|+\|\underline{y}\|)^2$

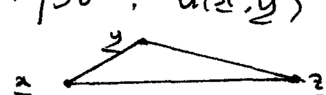
□

לכל מרחב מכפלה פנימית, אפשר להגדיר מרחק בין שתי נקודות $\underline{x},\underline{y}\in X$ ע"י $d(\underline{x},\underline{y}) = \|\underline{x}-\underline{y}\|$. לכן:

$d(\underline{x},\underline{z}) \le d(\underline{x},\underline{y})+d(\underline{y},\underline{z})$

$\|\underline{x}-\underline{z}\| \le \|\underline{x}-\underline{y}\|+\|\underline{y}-\underline{z}\|$

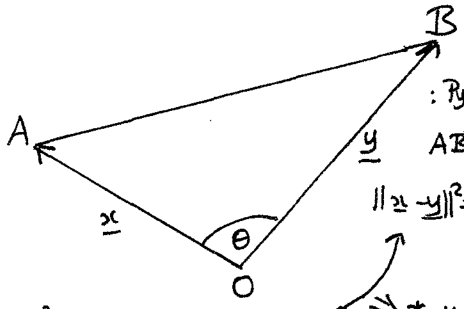
סכום $(\underline{x}-\underline{y})+(\underline{y}-\underline{z})$



$\boxed{36}$

ב- $\mathbb{R}^n$

הכללה ל- Pythagorus:



$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\,OB\cos\theta$

$\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2\|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta$

$\|x-y\|^2=(x-y)\cdot(x-y)$
$=x\cdot x-2x\cdot y+y\cdot y$

$\Rightarrow x\cdot y=\|x\|\cdot\|y\|\cos\theta$

$\cos\theta=\frac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|}$

ב- $C[0,1]$ עם מכפלה פנימית
$f\cdot g=\int_0^1 f(x)g(x)dx$

$\int_0^1 f(x)g(x)dx\le\sqrt{\int_0^1 f(x)^2dx}\cdot\sqrt{\int_0^1 g(x)^2dx}$

הגדרה במרחב מכפלה פנימית, הזווית $\theta=\angle(x,y)$ מוגדרת ע"י $\cos\theta=\frac{x\cdot y}{\|x\|\cdot\|y\|}$

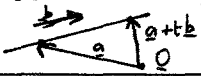
דוגמאות א) $X=\mathbb{R}^2$

$\angle\left(\binom{1}{1},\binom{2}{3}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{3}}{\|\binom{1}{1}\|\cdot\|\binom{2}{3}\|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}}\right)=\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{26}}$

ב) $X=C[0,1]$ $\quad f\cdot g=\int_0^1 f(x)g(x)dx$

$\angle(x,x^2)=\cos^{-1}\left(\frac{x\cdot x^2}{\|x\|\cdot\|x^2\|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1/4}{\sqrt{1/3}\sqrt{1/5}}\right)=\cos^{-1}\frac{\sqrt{15}}{4}$

הגדרה קו ישר במרחב וקטורי הוא קבוצה בצורה $\{a+tb\mid t\in\mathbb{R}\}$ כאשר $a,b\in X$, $b\neq 0$



מרחבים מטריים

הגדרה מרחב מטרי (metric space) הוא זוג (X,d) כאשר X קבוצה ו-d העתקה
$X\times X\to\mathbb{R}^+$
$(x,y)\mapsto d(x,y)$
כאשר
* $d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$ לכל $x,y,z\in X$
* $d(y,x)=d(x,y)$ לכל $x,y\in X$
* $d(x,y)=0$ אם"ם $x=y$

דוגמאות א) לכל מרחב מכפלה פנימית $(X,\cdot)$ אפשר להגדיר מרחב מטרי (X,d) ע"י $d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x-y)\cdot(x-y)}$

ו) לכל קבוצה X יש מרחב מטרי דיסקרטי
$d(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$
discrete metric

ב) $(\mathbb{R}^n,d_2)$
$d_2(x,y)=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2\right)}$

מכפלה פנימית

ג) $(C[0,1],d_2)$
$d_2(f,g)=\sqrt{\int_0^1(f(x)-g(x))^2dx}$

ד) $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$
$d_\infty(x,y)=\max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$

לא מכפלה פנימית

ה) $(C[0,1],d_\infty)$
$d_\infty(f,g)=\sup_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|$

הגדרות סביבות (X מרחב מטרי)

* $\bar{B}_r(x)=\{y\in X\mid d(x,y)\le r\}$; $B_r(x)=\{y\in X\mid d(x,y)<r\}$ $(r>0)$
closed ball, open ball

* לקבוצה $A\subseteq X$ נגדיר קבוצות $\bar{A}$, $\mathring{A}$, ∂A ע"י

$\{x\in X\mid\forall\varepsilon>0\ A\cap B_\varepsilon(x)\neq\emptyset\}=\bar{A}$ closure סגור

$\{x\in X\mid\exists\varepsilon>0\ B_\varepsilon(x)\subset A\}=\mathring{A}$ interior פנים

$\{x\in X\mid\forall\varepsilon>0,\ A\cap B_\varepsilon(x)\neq\emptyset,\ A^c\cap B_\varepsilon(x)\neq\emptyset\}=\partial A$ boundary שפה

* A נקראת קבוצה סגורה $\Leftrightarrow$ $\bar{A}=A$
A נקראת קבוצה צפופה $\Leftrightarrow$ $\bar{A}=X$
A נקראת קבוצה פתוחה $\Leftrightarrow$ $\mathring{A}=A$

* לקבוצה $A\subseteq X$, נקודה $x\in X$ נקראת
— נקודת הצטברות (point of accumulation) אם"ם $\forall\varepsilon>0\ A\cap(B_\varepsilon(x)\setminus\{x\})\neq\emptyset$
— נקודה פנימית (interior point) אם"ם $\exists\varepsilon>0\ B_\varepsilon(x)\subset A$
$(\Leftrightarrow x\in\mathring{A})$
— נקודה חיצונית (exterior point) אם"ם $\exists\varepsilon>0\ B_\varepsilon(x)\cap A=\emptyset$
$(\Leftrightarrow x\notin\bar{A})$

דוגמאות של סביבות ו- $\partial A, \bar{A}, \mathring{A}$

א) במרחב דיסקרטי, $B_r(x)=\{x\}$ $r\le 1$ $\quad B_r(x)=X$ $r>1$

$\bar{B}_r(x)=\{x\}$ $r<1$ $\quad \bar{B}_r(x)=X$ $r\ge 1$

לכן $\mathring{A}=\bar{A}=A$ לכל קבוצה A, $\partial A=\emptyset$

(A סגורה וגם פתוחה)

ב) תמיד $X, \emptyset$ גם סגורות וגם פתוחות.

ג) $\bar{A}\supset A$, $\mathring{A}\subset A$ $\qquad$ ה) $X\setminus\mathring{A}=\overline{(X\setminus A)}$

ד) $\bar{A}$ סגורה, $\mathring{A}$ פתוחה $\qquad$ ו) $\partial(X\setminus A)=\partial A$

ז) $\bar{A}$ = קבוצה סגורה הכי קטנה שמכילה את A

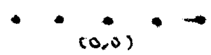
$\mathring{A}$ = קבוצה פתוחה הכי גדולה שמוכלת ב- A

$\overset{ג}{\underset{ד}{\Longrightarrow}}$ $\left[A\subset B\Rightarrow\begin{pmatrix}\bar{A}\subset\bar{B}\\ \mathring{A}\subset\mathring{B}\end{pmatrix}\right]$

ח) ב- $\mathbb{R}^2$ עם מטריקה d_2: $B_r(\underline{x})=$ כדור ברדיוס r בלי שפה $\quad \bar{B}_r(\underline{x})=$ כדור ברדיוס r עם שפה

$\overline{B_1(\underline{0})}=\bar{B}_1(\underline{0})$; $\partial B_1(\underline{0})=\{\underline{x}\mid\|\underline{x}\|=1\}$

$A=\{(n,0)\mid n\in\mathbb{Z}\}$ $\quad \mathring{A}=\emptyset$ $\quad \partial A=\bar{A}=A$



$B=\{(\frac{1}{n},0)\mid n\in\mathbb{N}\}$ $\quad \mathring{B}=\emptyset$ $\quad \partial B=\bar{B}=B\cup\underset{\text{נקודת הצטברות}}{(0,0)}$

$C=\{(x,\sin\frac{1}{x})\mid x>0\}$ $\quad \mathring{C}=\emptyset$ $\quad \partial C=\bar{C}=C\cup\{(0,y)\mid -1\le y\le 1\}$

ט) תמיד $x\in\bar{A}\setminus A \Rightarrow x$ נקודת הצטברות ($\Rightarrow x\in\bar{A}$)

אבל יכול להיות שיש נקודה $a\in A$ שגם נקודת הצטברות

י) ב- $\mathbb{R}$ עם מטריקה $d(x,y)=|x-y|$: $B_r(x)=(x-r,x+r)$

$\bar{B}_r(x)=[x-r,x+r]$

{קבוצה פתוחה, קבוצה סגורה} הגדרות הנ"ל שקולות להגדרות רגילות לתת קבוצות של $\mathbb{R}$

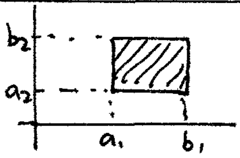
יא) $X\setminus\begin{pmatrix}\text{קבוצה}\\\text{פתוחה}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{קבוצה}\\\text{סגורה}\end{pmatrix}$

$\bigcup_{\text{כללי}}\begin{pmatrix}\text{קבוצות}\\\text{פתוחות}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{קבוצה}\\\text{פתוחה}\end{pmatrix}$, $\quad \bigcap_{\text{כללי}}\begin{pmatrix}\text{קבוצות}\\\text{סגורות}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{קבוצה}\\\text{סגורה}\end{pmatrix}$

$\bigcap_{\text{סופי}}\begin{pmatrix}\text{קבוצות}\\\text{פתוחות}\end{pmatrix}=$ פתוחה, $\quad \bigcup_{\text{סופי}}\begin{pmatrix}\text{קבוצות}\\\text{סגורות}\end{pmatrix}=$ סגורה

יב) $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-1/n,1)=[0,1)$ לא פתוחה, $\quad \bigcup_{n=1}^{\infty}[1/n,1]=(0,1]$ לא סגורה

יג) $(\mathbb{R}^n,d_\infty)$: "כדור" סגור הוא תבה בצורה n ממדית $\{\underline{x}\mid\forall i,\ x_i\in[a_i,b_i]\}$



התכנסות במרחבים מטריים

* נניח ש-(X,d) מרחב מטרי.
* $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ אם"ם $d(x_n,x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$
* (x_n) נקראת סדרה מתכנסת אם"ם $(\exists x\in X : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x)$
* (x_n) נקראת סדרת קושי אם"ם $(\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n>N\ d(x_m,x_n)<\varepsilon)$
* X נקרא מרחב קומפקטי (compact) אם"ם לכל סדרה קיימת תת סדרה מתכנסת
* X נקרא מרחב שלם (complete) אם"ם כל סדרת קושי היא סדרה מתכנסת.

X נקרא מרחב חסום (bounded) אם"ם $(\exists M\ \forall x,y\in X\ d(x,y)<M)$

א) ב-$\mathbb{R}^N$, $\underline{x}^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} \underline{x}$ אם"ם $x_i^{(n)} \to x_i$ לכל $i = 1,2,\dots N$

$\underline{x}^{(n)} = (x_1^{(n)},\dots x_N^{(n)})$

(לא משנה לפי איזה מטריקה d_2, d_∞)

ב) במטריקה דיסקרטית, רק סדרות קבועות (ל-n מספיק גדול) מתכנסות.

ג) $\mathbb{R}^N$ מרחב שלם

ד) $X\subset\mathbb{R}^N$ קומפקטי אם"ם X קבוצה חסומה וסגורה (משפט Heine-Borel)

ה) $X\subset\mathbb{R}^N$ שלם אם"ם X קבוצה סגורה.

ו) $A\subset X \Rightarrow (x\in\bar{A})$ אם"ם (קיימת סדרה של נקודות ב-A שמתכנסת ל-x)

ז) $(X,d)=(C[0,1],d_\infty)$

$(f_n)\xrightarrow{n\to\infty} f$ סדרה מתכנסת $\Leftrightarrow$ $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N\ \forall x\in[0,1]\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow$ $f_n\to f$ במ"ש

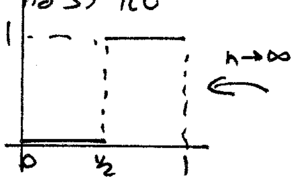
(f_n) סדרת קושי ב-(X,d) $\overset{\text{קריטריון}}{\underset{\text{Cauchy}}{\Leftrightarrow}}$ (f_n) מתכנסת במ"ש

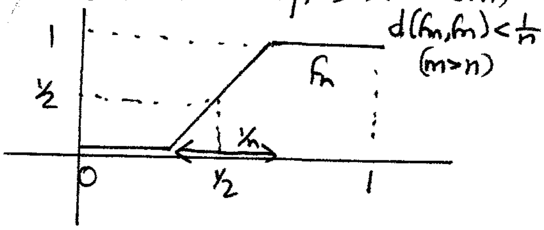
לכן (X,d) מרחב שלם.

ח) $(X,d)=(C[0,1],d_2)$ הוא מרחב מטרי לא שלם

$$f_n = \begin{cases}0 & 0\le x\le \frac12-\frac1{2n}\\ n(x-\frac12)+\frac12 & \frac12-\frac1{2n}<x<\frac12+\frac1{2n}\\ 1 & \frac12+\frac1{2n}\le x\le 1\end{cases} \Leftarrow$$ (f_n) סדרת קושי לא מתכנסת

לא רציפה





(X,d) מרחב מטרי — קבוצה סגורה $\Leftrightarrow$ התכנסות של סדרות

משפט: יהי $A \subset X$. אזי: $x \in \bar{A} \Leftrightarrow$ (קיימת סדרה מתכנסת ל-x של נקודות ב-A)

$$\left(\exists x_n \in A,\ n\in\mathbb{N} \ : \ x_n \xrightarrow{n\to\infty} x\right)$$

הוכחה $(\Leftarrow)$: $x\in\bar{A}$ $\overset{\text{הגדרה}}{\Rightarrow}$ $\forall \varepsilon>0 \quad B_\varepsilon(x)\cap A \neq \emptyset$

$\overset{\varepsilon=1/n}{\Rightarrow}$ $B_{1/n}(x)\cap A\neq\emptyset$

$\Rightarrow$ $\exists x_n \in B_{1/n}(x)\cap A$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} x_n\in A \\ d(x_n,x)<1/n \end{matrix}\right\}$ $\Rightarrow$ $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

$(\Rightarrow)$: $\begin{pmatrix} x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \\ x_n\in A \\ \varepsilon>0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $d(x_n,x)\xrightarrow{n\to\infty}0$ $\Rightarrow$ $\exists N\ \forall n>N\quad d(x_n,x)<\varepsilon$

$\Rightarrow$ $d(x_{N+1},x)<\varepsilon$

$\Rightarrow$ $x_{N+1}\in B_\varepsilon(x)\cap A$ $\Rightarrow$ $B_\varepsilon(x)\cap A\neq\emptyset$ □

מסקנה: $A\subset X$ סגורה אמ"מ (לכל סדרה מתכנסת של נקודות ב-A, גם הגבול שייך ל-A)

$$\left(\begin{matrix} * \ x_n\in A \text{ לכל } n \\ * \ x_n\xrightarrow{n\to\infty}x \end{matrix} \Rightarrow x\in A\right)$$

הוכחה: A סגורה $\overset{\text{הגדרה}}{\Leftrightarrow}$ $\bar{A}=A$ $\underset{A\subset\bar{A}}{\Leftrightarrow}$ $(x\in\bar{A} \Rightarrow x\in A)$ $\overset{\text{משפט}}{\Leftrightarrow}$ $\left(\begin{matrix} x_n\in A \\ x_n\xrightarrow{n\to\infty}x\end{matrix} \Rightarrow x\in A\right)$ □

(X,d) מרחב מטרי, $Y\subseteq X$ $\Rightarrow$ (Y,d') מרחב מטרי כאשר $d'=d|_{Y\times Y}$

מטריקה מושרית (induced metric)

נניח ש-$A\subset\mathbb{R}^k$. A נקראת **סגורה** אמ"מ A סגורה במרחב מטרי $(\mathbb{R}^n, d_2)$

פתוחה אמ"מ A פתוחה במרחב מטרי $(\mathbb{R}^n, d_2)$

חסומה אמ"מ המרחב מטרי (A, d_2') חסום $\Leftrightarrow$ קיים כדור שמכיל את A: $\exists x\,\exists r\ A\subset B_r(x)$

קומפקטית אמ"מ המרחב מטרי (A,d_2') קומפקטי

משפט: $A\subset\mathbb{R}^k$ קומפקטית אמ"מ A קבוצה חסומה וסגורה

הוכחה $(\Leftarrow)$ נניח ש-A קומפקטית. **חסומה**: נניח בשלילה ש-A אינה חסומה

$\Rightarrow$ $\forall r\quad A\not\subset B_r(\underline{0})$

$\Rightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N}\ \exists x_n\in A\setminus B_n(\underline{0})$

$\overset{A\text{ קומפקטית}}{\Rightarrow}$ קיימת תת סדרה מתכנסת $(x_{n_r}) \xrightarrow{r\to\infty} x$

$\Rightarrow$ $d(x_{n_r},\underline{0})\xrightarrow{r\to\infty}d(x,\underline{0})$ $\qquad |d(x_{n_r},\underline{0})-d(\underline{x},\underline{0})| \underset{\text{אי שוויון המשולש}}{\leq} d(x_{n_r},\underline{x})\xrightarrow{r\to\infty}0$

סתירה כי $n_r\leq d(x_{n_r},\underline{0})$, $n_r \xrightarrow{r\to\infty} \infty$.

סגורה: נניח ש- $\left(\begin{matrix} x_n\in A \text{ לכל } n \\ x_n\xrightarrow{n\to\infty}x\end{matrix}\right)$

$\overset{A\text{ קומפ'}}{\Rightarrow}$ קיימת תת סדרה מתכנסת (x_{n_r}) בתוך A

$\Rightarrow$ $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{r\to\infty}x_{n_r}\in A$

$(\Rightarrow)$ נניח ש-A חסומה וסגורה $\overset{A\text{ חסומה}}{\Rightarrow}$ $\exists a_i\leq b_i\in\mathbb{R},\ 1\leq i\leq k \ : \ A\subset[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_k,b_k]$

וגם ש-$(x^{(n)})$ סדרה ב-A

$\overset{x^{(n)}\in A}{\Rightarrow}$ $a_i\leq x_i^{(n)}\leq b_i$ לכל $1\leq i\leq k$

צריך להוכיח כי קיימת תת סדרה של $(x^{(n)})$ מתכנסת לגבול שייך ל-A.

$\boxed{40}$

<u>המשך של הוכחה (⇐)</u> ⇐ $(x_i^{(n)})$ סדרה חסומה של מספרים ממשיים $\forall 1\le i\le k$

$(x_1^{(n)})$ סדרה חסומה ⇐ קיימת תת סדרה מתכנסת $x_1^{(m_r)} \xrightarrow{r\to\infty} x_1$

$(x_2^{(m_r)})$ סדרה חסומה ⇐ קיימת תת סדרה מתכנסת $x_2^{(m_{r_s})} \xrightarrow{s\to\infty} x_2$

וגם $x_1^{(m_{r_s})} \xrightarrow{s\to\infty} x_1$

תת סדרה של סדרה מתכנסת $(x_1^{(m_r)}) \to x_1$

(n פעמים):

⋮

מקבלים בסוף תת סדרה $(\underline{x}^{(N_j)})$ כך ש-

$\forall 1\le i\le k,\quad x_i^{(N_j)} \xrightarrow{j\to\infty} x_i$

$\Leftarrow \underline{x}^{(N_j)} \xrightarrow{j\to\infty} \underline{x}=(x_1,\dots,x_k)$

A סגורה $\Leftarrow$ $\underline{x}\in A$

□

<u>דוגמאות</u> א) ב- $\mathbb{R}$ (מטריקה $d(x,y)=|x-y|$) כל ההגדרות כלליות מצמצמות להגדרה רגילות לתת קבוצות ב- $\mathbb{R}$.

ב) <u>סביבה</u> של $x\in X$ במרחב מטרי X היא קבוצה פתוחה שמכילה את x

$B_\varepsilon(x)$ היא סביבה של X, לכל $\varepsilon>0$.

ג) ב- $\mathbb{R}^2$, כדור ≡ דיסק

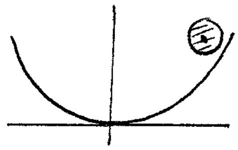
ב- $\mathbb{R}^1$, כדור ≡ קטע $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$

ד) $\underline{x}^{(n)}=(\sin\frac{\pi n}{2},\frac{1}{n})\in\mathbb{R}^2$ סדרה מתבדרת

$\underline{x}^{(2n)}=\underline{y}^{(n)}=(\sin \pi n,\frac{1}{2n})\in\mathbb{R}^2$ סדרה מתכנסת ל- $(0,0)$

$A=\{(\sin\frac{\pi n}{2},\frac{1}{n})\mid n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}^2 \Rightarrow \bar{A}=A\cup\{(0,0),(1,0),(-1,0)\}$

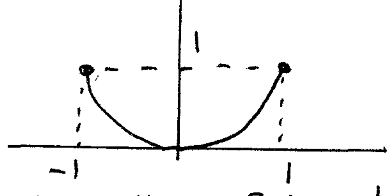
ה) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=x^2\}$ קבוצה סגורה



לכל $(x,y)\notin A$

קיימת סביבה לא חותכת את A.

ו) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid |x|\le 1,\ y=x^2\}$ קבוצה קומפקטית



ז) $x_n\xrightarrow{n\to\infty}x \Leftrightarrow d(x_n,x)\xrightarrow{n\to\infty}0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N\ d(x_n,x)<\varepsilon$