## דוגמא של משפט Abel  $\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$

$a_n = (-1)^n$

$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x}$

תחום ההתכנסות: $(-1,1)$

אינטגרציה איבר-איבר

לכל $|x|<1$: $\int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x (-t)^n\,dt\right)$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n}$$

טור חזקה בעלת תחום התכנסות $(-1,1]$

לכן הטור מתכנס לפונקציה (נאמר $T$) רציפה על $(-1,1]$. $\Rightarrow$ $\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots \quad \text{לכל } x\in(-1,1]}$

$T(x)=\ln(1+x)$ כאשר $|x|<1$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \underset{\text{הגדרה של } T}{=} T(1) \underset{\text{משפט Abel}}{=} \lim_{x\to 1^-} T(x) \underset{\text{תכונה של } \ln(1+x)}{=} \ln 2 \quad \Leftarrow$$

---

## דוגמאות כלליות של טורי חזקות

א) $\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n}$ כאשר $\boxed{|x|<1}$ $\Leftarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ הוא טור Taylor של $\frac{1}{1-x}$

---

ב) $(-x^2 \leftarrow x) \Rightarrow$ $\frac{1}{1+x^2} = \underset{\text{טור חזקה}}{\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}(-1)^n}$ כאשר $|x^2|<1$ (ולכן כאשר $|x|<1$)

אחרי אינטגרציה איבר-איבר:

כאשר $|x|<1$:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt$$

$$\boxed{\tan^{-1} x \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}}$$

רציפה ב- $x=\pm 1$

מתכנס ב- $|x|=1$ — משפט Leibnitz

$x=1$: $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$

$x=-1$: $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$

משפט Abel

משוואה (*) מתקיימת $\boxed{\text{לכל } |x|\le 1}$

לכן תחום ההתכנסות הוא $[-1,1]$

מסקנה $(x=1)$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \pi/4 = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$

---

ג)

$$\begin{cases} e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \\ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots \\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots \end{cases}$$

לכל $x\in\mathbb{R}$ (או לכל $x\in\mathbb{C}$)

ההתכנסות במ"ש על כל תת-קבוצה חסומה של $\mathbb{R}$ (או $\mathbb{C}$)

יכול לבדוק ש- $R=\infty$; כבר בדקנו שהשארית $\xrightarrow{n\to\infty} 0$ בחלק על טורי Taylor.

③ $\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} x^n}$ כאשר $\binom{\alpha}{n} \equiv \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ $\boxed{\alpha\notin\mathbb{N}\cup\{0\}}$

שתי אפשרויות: Ⓘ לבדוק שטור Taylor של $g(x)=(1+x)^\alpha$ הוא $\sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n}x^n$

כזכור נגזרת: $\frac{d^n g}{dx^n} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ $\Leftarrow$ $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1) = g^{(n)}(0)$

לבדוק שהשארית $\xrightarrow[n\to\infty]{|x|<1} 0$ (עשינו בכתה, על טורי Taylor)

Ⓘ נתחיל עם טור הנתון, $\sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n}x^n$

(הערה: מקבלים טור סופי $\Leftarrow \alpha\in\mathbb{N}\cup\{0\}$
$\binom{\alpha}{n}=0\quad\forall n>\alpha$
משפט הנו נוסחת בינום רגיל)

$\alpha\notin\mathbb{N}\cup\{0\} \Rightarrow \binom{\alpha}{n}\neq 0 \quad \forall n$

$$\frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}} = \frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}} = \frac{n+1}{\alpha-n} \xrightarrow{n\to\infty} -1$$

$\xLeftarrow{\text{D'Alembert}}$ רדיוס ההתכנסות הנו $R=1$

נגדיר פונקציה $f_\alpha$ ע"י $f_\alpha(x) \equiv \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n}x^n$ כאשר $|x|<1$

$\left(f_\alpha(x) = 1+\alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots\right)$

<u>להוכיח ש- $f_\alpha(x)=(1+x)^\alpha$</u>:

גזירה איבר-איבר: $f_\alpha'(x) = \sum_{n=1}^\infty n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}$ כאשר $|x|<1$

$$= \sum_{n=1}^\infty \alpha\binom{\alpha-1}{n-1}x^{n-1} \Leftarrow n\binom{\alpha}{n} = \alpha\binom{\alpha-1}{n-1} \quad (n\geq 1)$$

$$= \alpha\sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha-1}{n}x^n \Rightarrow \boxed{f_\alpha' = \alpha f_{\alpha-1}}$$

$$(1+x)f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^\infty (1+x)\binom{\alpha}{n}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n}x^n + \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n}x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n}x^n + \sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n-1}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha+1}{n}x^n \Leftarrow \binom{\alpha+1}{n} = \binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n-1} \quad (n\geq 1)$$

$$\binom{\alpha+1}{0} = \binom{\alpha}{0} = 1$$

$$= f_{\alpha+1}(x) \Rightarrow \boxed{(1+x)f_\alpha = f_{\alpha+1}}$$

לכן: $f_\alpha' = \alpha f_{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+x}f_\alpha$

$$\Leftarrow \frac{d}{dx}\left((1+x)^{-\alpha}f_\alpha\right) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1}f_\alpha + (1+x)^{-\alpha}f_\alpha'$$

$$= (1+x)^{-\alpha}\left(f_\alpha' - \frac{\alpha}{1+x}f_\alpha\right) = 0$$

$\Leftarrow (1+x)^{-\alpha}f_\alpha(x) = C$ לא תלוי ב- $x$

$x=0 \Leftarrow$ $1 = 1\cdot f_\alpha(0) = C$

אבל ראשון בטור $f$ הוא 1

לכן $(1+x)^{-\alpha}f_\alpha(x)=1$ וכך $f_\alpha(x)=(1+x)^\alpha$ □

33

ה) ⇐ (ב) $(1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n$ , לכל $|x|<1$

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-\frac12)(-\frac32)\cdots(\frac12 - n)}{n!} = (-1)^n \frac{(\frac12)(\frac32)\cdots(n-\frac12)}{n!} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} 1\cdot 3\cdots(2n-1) \; (*)$$

$$\parallel$$

$$(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\cdot\frac{1\cdot 2\cdots(2n)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$$

$$(*) \Rightarrow \boxed{\binom{-1/2}{n} = (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}}$$

לכן

$$(1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(-x)^n$$

$$(1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n = 1 + \frac12 x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

לכל $|x|<1$ $\quad (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n} x^{2n}$

$$\int_0^x (1-t^2)^{-1/2}dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\int_0^x t^{2n}dt$$

$$\boxed{\text{לכל } |x|<1 \quad \sin^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}$$

---

ו) מצא את $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+n)x^{n-1}$ : תחום ההתכנסות $(-1,1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^2+n)x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2}{dx^2}(x^{n+1}) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2}{1-x}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1-(1-x^2)}{1-x}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right) = \underline{\underline{\frac{2}{(1-x)^3}}}$$

---

ז) מצא את $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$ : נגדיר $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{(2n+1)}$ . מחפשים $f(\frac13)$.

$$x f(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x (-1)^n t^{2n}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= \tan^{-1}x$$

$$x = 1/\sqrt3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt3} f\left(\frac13\right) = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt3} = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \quad f\left(\frac13\right) = \frac{\pi\sqrt3}{6} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2\sqrt3}}}$$

---

ח) מצא טור Taylor של $\frac{1}{x^2-2x-3}$

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{(x+1)(x-3)} = \frac14\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac14\left(-\frac13\,\frac{1}{1-x/3} - \frac{1}{1+x}\right)$$

$$= \frac14\left(-\frac13\sum_{n=0}^{\infty}(x/3)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)$$

$|x/3|<1 \qquad |x|<1$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{12}\left(\frac13\right)^n - (-1)^n\right)x^n \qquad (|x|<1)$$

הוא טור חזקה שמתכנס ב- $|x|<1$ לפונקציה שלנו

לכן הוא טור Taylor של הפונקציה.

---

ט) מצא טור Taylor של $\int_0^x e^{-t^2}dt$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n} \Rightarrow \int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^{2n}dt = \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}}}$$

לכל $x$ $\qquad\qquad$ לכל $x$

$\boxed{34}$

(י) חשב $\int_0^{0.5}\frac{\sin x}{x}dx$ עם דיוק 0.0001

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots \Rightarrow \frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{\sin t}{t}dt = x-\frac{x^3}{3\cdot3!}+\frac{x^5}{5\cdot5!}-\cdots \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \int_0^{0.5}\frac{\sin x}{x}dx=\left(\tfrac12\right)-\frac{1}{2^3\cdot3\cdot3!}+\frac{1}{2^5\cdot5\cdot5!}-\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}(2n+1)(2n+1)!}$$

לקבל תשובה עם דיוק 0.0001, מספיק למצוא סכום חלקי $\sum_{n=0}^{N-1}\cdots$

כאשר $\frac{1}{2^{2N+1}(2N+1)(2N+1)!}<0.0001$ (משפט Leibnitz)

כלומר $2^{2N+1}(2N+1)(2N+1)!>10{,}000$   $N=2$ מספיק: $2^5\cdot5\cdot5!=160\cdot120>10{,}000$

$$\Leftarrow \quad \int_0^{0.5}\frac{\sin x}{x}dx \underset{\text{דיוק}<10^{-4}}{\approx} \frac12-\frac{1}{2^3\cdot3\cdot3!}=\underline{\underline{\frac{71}{144}}}$$

---

(יא) מה הטור Taylor של פונקציה

$$\begin{cases}\frac{\cos(x^3)-1}{x^6} & x\neq0\\ -\frac12 & x=0\end{cases} \quad ?$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow \cos(x^3)=1-\frac{x^6}{2!}+\frac{x^{12}}{4!}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6n}}{(2n)!}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(x^3)-1}{x^6}=-\frac{1}{2!}+\frac{x^6}{4!}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{6(n-1)}}{(2n)!}$$

(לכל $x\neq0$)

קבלנו טור חזקה שווה לפונקציה שלנו לכל $x$ $\Leftarrow$ הוא טור Taylor $\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{6n}}{(2n+2)!}}}$

---

(יב) מצא את טור Taylor לפי חזקות של $x+4$ של $\frac{1}{x^2+3x+2}$

נסמן את $x+4$ ב-$y$. לכן $x=y-4$.

$$\frac{1}{x^2+3x+2}=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{y-3}-\frac{1}{y-2}=-\frac13\cdot\frac{1}{1-y/3}+\frac12\cdot\frac{1}{1-y/2}$$

$$=-\frac13\sum_{n=0}^{\infty}(y/3)^n+\frac12\sum_{n=0}^{\infty}(y/2)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\tfrac12\right)^{n+1}-\left(\tfrac13\right)^{n+1}\right]y^n \qquad |y|<2$$

$$=\underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\tfrac12\right)^{n+1}-\left(\tfrac13\right)^{n+1}\right](x+4)^n}} \qquad |x+4|<2 \quad (-6<x<-2)$$

---

(יג) מצא את שלושת האיברים הראשונים של טור Taylor של $\ln(\cos x)$

(I)

$$\begin{cases}\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\cdots & \forall x\\ \ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots & |y|<1\end{cases}$$

$$\ln(\cos x)=\ln\left(1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)\right)$$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)-\frac12\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)^2+\frac13\left(-\frac{x^2}{2}-\cdots\right)^3$$

$$=-\frac{x^2}{2}+\left(\frac{1}{4!}-\frac12\cdot\frac{1}{2^2}\right)x^4+\left(-\frac{1}{6!}-\frac12(2)\left(-\frac12\right)\left(\frac{1}{4!}\right)+\frac13\left(-\frac12\right)^3\right)x^6+\cdots=\underline{\underline{-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}-\cdots}}$$

(II) יש: יכול למצוא נגזרות של $\ln(\cos x)$: $d/dx(\ln(\cos x))=-\tan x$

---

(יד) הרכבה $F(g(x))$: טור Taylor של $f$ בסביבה של $y_0$ ; טור Taylor של $g$ בסביבה של $x_0$ $\Big\}$ $y_0=g(x_0)$

$\Leftarrow$ מקבלים טור Taylor של $f\circ g$ בסביבה של $x_0$.

חשוב $y_0=g(x_0)$ אם לא, כל איבר בטור הרכבה יהיה סכום אין סופי!

| |
|---|
| דוג': $f(x)=\ln x$ |
| $g(x)=\cos x$ |
| $x_0=0,\ y_0=1$ |