טורי חזקות

<u>טור חזקה</u> (power series): הוא טור בצורה $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ כאשר a_n מספרים לא תלוי ב-x

<u>תחום ההתכנסות</u> (region of convergence) $\equiv X = \{x\in\mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ מתכנס}\}$

<u>רדיוס ההתכנסות</u> (radius of convergence) $\equiv R \equiv \sup_{x\in X}(|x|) \in [0,\infty]$

דוגמאות

א) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $\quad X=(-1,1)$ $\quad R=1$

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $\quad X=[-1,1)$ $\quad R=1$

ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ $\quad X=(-1,1]$ $\quad R=1$

ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $\quad X=[-1,1]$ $\quad R=1$

ה) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad X=\mathbb{R}$ $\quad R=\infty$

ו) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$ $\quad X=\{0\}$ $\quad R=0$

הערות

א) תמיד $0\in X$

ב) אפשר להגדיר $X\subset\mathbb{C}$ במקום $X\subset\mathbb{R}$

ג) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ תמיד מתכנס נקודתית על X

ד) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ לא מתכנס במ"ש על $X=(-1,1)$

ה) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ מתכנס במ"ש על $X=[-1,1]$

<u>משפט</u> (Abel) ① $\alpha\in X,\ |x|<|\alpha| \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בהחלט ($x\in X$)

② $\alpha\notin X,\ |x|>|\alpha| \Rightarrow x\notin X$

<u>הוכחה</u> ① $\alpha\in X \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n\alpha^n$ מתכנס $\Rightarrow \{a_n\alpha^n\}$ חסומה $\Rightarrow \exists M\ \forall n\ |a_n\alpha^n|<M$

$\Rightarrow |a_n x^n| \le M\,|x/\alpha|^n$

$|x|<|\alpha| \xRightarrow{\text{כלל ההשוואה}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בהחלט

① $\Rightarrow$ ②

□

<u>משפט</u> $|x|<R \Rightarrow x\in X$ וההתכנסות בהחלט

$|x|>R \Rightarrow x\notin X$

<u>הוכחה</u> $|x|<R \Rightarrow \exists y\in X,\ |x|<|y| \Rightarrow x\in X$ וגם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בהחלט

$|x|>R \Rightarrow x\notin X$

□

<u>משפט</u> (Cauchy-Hadamard) $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

<u>הוכחה</u> נגדיר $C\equiv \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

$$\left.\begin{array}{l} |x|>\frac{1}{C} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=C|x|>1 \Rightarrow x\notin X \\ |x|<\frac{1}{C} \Rightarrow \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n x^n|}=C|x|<1 \Rightarrow x\in X \end{array}\right\} \Rightarrow R=\frac{1}{C}$$

□

<u>משפט</u> (D'Alembert) אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \Rightarrow R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

<u>משפט</u> $0<r<R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס במ"ש על $[-r,r]$

<u>הוכחה</u> $r<R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$ מתכנס $\xRightarrow{\text{Weierstrass}} \sum a_n x^n$ מתכנס במ"ש על $[-r,r]$ □

<u>משפט</u> א) $R\notin X \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ לא מתכנס במ"ש על $(-R,R)$

ב) $r\in X \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס במ"ש על $[0,r]$

ג) $[a,b]\subseteq X \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס במ"ש על $[a,b]$

הוכחה א) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס במ"ש על $(-R,R)$ (של.ל. ⇐ של.ל.) $\Leftarrow$ $|\sum_{r=n}^{m} a_r x^r| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall m\ge n>N(\varepsilon)$ $\forall x\in(-R,R)$

$\xLeftarrow{x\to R}$ $|\sum_{r=n}^{m} a_r R^r| \le \varepsilon$ $\forall \varepsilon>0\ \forall m\ge n>N(\varepsilon)$

$\Leftarrow$ $\sum_{r=0}^{\infty} a_r R^r$ מתכנס, $R\in X$ □

ב) $r\in X$ ⇐ $\sum_{i=0}^{\infty} a_i r^i$ מתכנס ⇐ $|\sum_{i=n}^{m} a_i x^i| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall m\ge n>N(\varepsilon)$

רמ'זו
למה (Abel):

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_r b_r = \alpha_n\left(\sum_{r=1}^{n} b_r\right) + \sum_{r=1}^{n-1}(\alpha_r - \alpha_{r+1})\left(\sum_{s=1}^{r} b_s\right)$$

$\Downarrow$ $\alpha_i = (x/r)^i,\ b_i = a_i r^i$

$\forall m\ge n>N(\varepsilon)\ \forall x\in[0,r]$

$$\sum_{i=n}^{m} a_i x^i \le \left|\frac{x}{r}\right|^m \left|\sum_{i=n}^{m} a_i r^i\right| + \sum_{i=n}^{m-1} \underbrace{\left(\left(\frac{x}{r}\right)^i - \left(\frac{x}{r}\right)^{i+1}\right)}_{\ge 0} \left|\sum_{s=n}^{i} (a_s r^s)\right|$$

$$\le \left(\frac{x}{r}\right)^m \cdot \varepsilon + \left(\left(\frac{x}{r}\right)^n - \left(\frac{x}{r}\right)^m\right)\cdot\varepsilon \le \varepsilon$$ □

נציג $S(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ → סכום של הטור, פונקציה של x.

משפט $R>0$ ⇐ $S(x)$ רציפה בקטע $(-R,R)$

הוכחה $0<r<R$ ⇐ $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{\text{רציפה}}$ מתכנס במ"ש על $[-r,r]$ ⇐ $S(x)$ רציפה ב-$[-r,r]$ □

משפט $R>0$ ⇐
* $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{a_n}{n+1} x^{n+1}}_{\int_0^x a_n t^n dt}$ בעלת רדיוס ההתכנסות R
* $\int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ לכל $R>|x|$ ①
* $R\in X$ ⇐ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n R^{n+1}}{n+1}$ מתכנס וגם ① מקיים ל-$x=R$

אינטגרציה איבר-איבר

משפט הגבול של Abel $\begin{cases} R>0 \\ R\in X \end{cases}$ ⇐ $S(x)$ רציפה משמאל ב-$x=R$

דוגמא $\begin{cases} a_n = (-1)^n \quad R=1 \\ X=(-1,1] \\ S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \end{cases}$ $\Longleftarrow$ $\int_0^1 S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$

$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$

משפט $R>0$ ⇐
* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ בעלת רדיוס ההתכנסות R
* $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ לכל $R>|x|$ ②
* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n R^{n-1}$ מתכנס ⇐ $R\in X$ וגם ② מקיים ל-$x=R$

גזירה
איבר-איבר

מסקנה $R>0$ ⇐ $S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}$ לכל $R>|x|$ ⇐ $S^{(k)}(0) = k!\,a_k$

$\Downarrow$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

לכל $x\in X$

טור Taylor של S