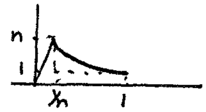
אינטגרציה איבר איבר של טורים

דוגמאות

א) $f_n(x)=\begin{cases} n^2x & 0\le x\le \frac1n \\ \frac1x & \frac1n<x\le 1\end{cases}$

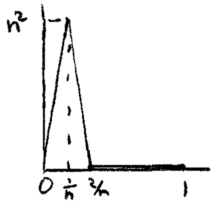


$\int_0^1 f_n(x) = \frac12 + \ln n$

$f_n(x) \xrightarrow[\text{נק'}]{n\to\infty} \left.\begin{cases} 0 & x=0 \\ 1/x & 0<x\le 1\end{cases}\right\} \equiv f(x)$

* f לא אינטגרבילית על $[0,1]$
* $\left(\int_0^1 f_n(x)\right)$ סדרה מתבדרת

ב) $f_n(x)=\begin{cases} n^3x & 0\le x\le \frac1n \\ 2n^2-n^3x & \frac1n<x\le \frac2n \\ 0 & \frac2n<x\le 1\end{cases}$



$\int_0^1 f_n(x) = n$

$f_n(x) \xrightarrow[\text{נק'}]{n\to\infty} 0 \equiv f(x)$

* f אינטגרבילית
* $\left(\int_0^1 f_n(x)\right)$ סדרה מתבדרת

משפט

$\left\{\begin{array}{l} * \ f_n \text{ רציפה ב-} [a,b] \text{ לכל } n \\ * \ f_n \to f \text{ במ"ש} \end{array}\right. \Leftarrow$

* f אינטגרבילית על $[a,b]$
* $\left(\int_a^x f_n(t)dt\right)$ סדרה מתכנסת לכל $x\in[a,b]$
* $\int_a^x f_n(t)dt \xrightarrow[\text{במ"ש על } [a,b]]{n\to\infty} \int_a^x f(t)dt$

הוכחה

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} f \Leftarrow \forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n>N(\varepsilon)\ \forall x\in[a,b]\ |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$

$\left\{\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f \\ (f_n) \text{ רציפות} \end{array}\right. \Leftarrow f$ רציפה $\Leftarrow f$ אינטגרבילית

$\forall n>N(\varepsilon)$, $\forall x\in[a,b]$:

$$\left|\int_a^x f_n(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right| = \left|\int_a^x f_n(t)-f(t)\,dt\right| \le \int_a^x |f_n(t)-f(t)|\,dt < \int_a^x \frac{\varepsilon}{b-a}dt = \varepsilon\cdot\frac{(x-a)}{(b-a)} \le \varepsilon$$

$\square$

מסקנה

$\left\{\begin{array}{l} * \ f_n \text{ רציפה ב-} [a,b] \text{ לכל } n \\ * \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ מתכנס במ"ש} \\ * \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n \overset{\text{נק'}}{=} F \end{array}\right. \Leftarrow$

* F אינטגרבילית
* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^x f_n(t)dt\right)$ מתכנס במ"ש
* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_a^x f_n(t)dt\right) = \int_a^x F(t)dt$

משפט * $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} f$ על $[a,b]$
* f_n אינטגרבילית על $[a,b]$ לכל n

$\Leftarrow$

* f אינטגרבילית על $[a,b]$
* $\int_a^x f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} \int_a^x f(t)\,dt$ על $[a,b]$

הוכחה

f אינטגרבילית: נניח ש- $0<\varepsilon$

$f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f \Leftarrow$ (*) $\exists N(\varepsilon)\ \forall n>N(\varepsilon)\ \forall x\in[a,b]\quad |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

נסמן את $N(\varepsilon)+1$ ב- n_0.

f_{n_0} אינטגרבילית $\Leftarrow$ קיימת חלוקה P כך ש- $\overline{S}_P(f_{n_0})-\underline{S}_P(f_{n_0})<\frac{\varepsilon}{2}$

$(a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b)$

סכום עליון: $\sum_{r=1}^{n}(x_r-x_{r-1})\left(\sup_{x\in[x_{r-1},x_r]} f_{n_0}(x)\right)$

סכום תחתון: $\sum_{r=1}^{n}(x_r-x_{r-1})\left(\inf_{x\in[x_{r-1},x_r]} f_{n_0}(x)\right)$

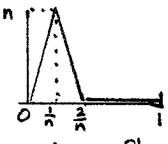
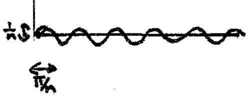
$$\overline{S}_P(f)\le\overline{S}_P(f_{n_0})+\sum_{r=1}^{n}(x_r-x_{r-1})\cdot\frac{\varepsilon}{4(b-a)}=\overline{S}_P(f_{n_0})+\frac{\varepsilon}{4}\Leftarrow\sup_{x\in[x_{r-1},x_r]}f(x)\le\sup_{x\in[x_{r-1},x_r]}f_{n_0}(x)+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\Leftarrow(*)$$

$$\underline{S}_P(f)\ge\underline{S}_P(f_{n_0})-\sum_{r=1}^{n}(x_r-x_{r-1})\cdot\frac{\varepsilon}{4(b-a)}=\underline{S}_P(f_{n_0})-\frac{\varepsilon}{4}\Leftarrow\inf_{x\in[x_{r-1},x_r]}f(x)\ge\inf_{x\in[x_{r-1},x_r]}f_{n_0}(x)-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\Leftarrow(*)$$

$$\Leftarrow\quad\overline{S}_P(f)-\underline{S}_P(f)\le\left(\overline{S}_P(f_{n_0})-\underline{S}_P(f_{n_0})\right)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

$\square$

$\int_a^x f_n(t)\,dt \xrightarrow{\text{במ"ש}} \int_a^x f(t)\,dt$: אותה הוכחה שניתנה במקרה של רציפות.

משפט	תנאים מספיק	דוגמא נגדית
$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$ [אם $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ ו- f_n רציפה ב- x_0 אז מקבלים $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$ כלומר: f רציפה ב- x_0]	$f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ f_n רציפה ב- x_0 או לכל n $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ קיים.	$f_n(x)=x^n$, $x_0=1$ $\lim_{x\to1^-}\left(\lim_{n\to\infty}x^n\right)=\lim_{x\to1^-}(0)=0$ $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to1^-}x^n\right)=\lim_{n\to\infty}(1)=1$
$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right)=\int_a^b\left(\lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt\right)$	$f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ f_n אינטגרבילית	$a=0, b=1$, $f_n(x)=\begin{cases}n^2x & 0\le x<\frac1n\\ 2n-n^2x & \frac1n\le x<\frac2n\\ 0 & \frac2n\le x\le1\end{cases}$  $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}1=1$ $\lim_{n\to\infty}f_n(t)=0$, $t\in[0,1]$ לכל
$\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}\left(f_n(x)\right)=\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)$	$\{f_n'\}$ מתכנסת במ"ש ב- $[a,b]$ f_n רציפה ב- $[a,b]$	$f_n(x)=\frac1n\sin nx$ $\quad f_n\xrightarrow{\text{במ"ש}}0$ $f_n'(x)=\cos nx$ $\{f_n'\}$ מתבדרת לכל x 

משפט * f_n גזירה ב- $[a,b]$ לכל n
* $x_0 \in [a,b]$
* $(f_n(x_0))$ סדרה מתכנסת
* (f_n') מתכנסת במ"ש על $[a,b]$

$\Rightarrow$

* $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש
* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx} f_n(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)$

לכל $x \in [a,b]$

הוכחה * $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש

נניח ש- $\varepsilon>0$.

$(f_n(x_0))$ מתכנסת $\xRightarrow{\text{קריטריון Cauchy}}$ ① $\exists N\ \forall m,n>N \quad |f_m(x_0)-f_n(x_0)| < \varepsilon/2$

(f_n') מתכנסת במ"ש $\Rightarrow$ ② $\exists M\ \forall m,n>M\ \forall x\in[a,b] \quad |f_m'(x)-f_n'(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

משפט הערכים הממוצע על פונקציה f_m-f_n $\Rightarrow$

$\forall x,t\in[a,b]$ $\forall m,n>M$ — קיים ξ בין x ובין t ③

$$|(f_m(x)-f_n(x))-(f_m(t)-f_n(t))| = |x-t|\cdot|f_m'(\xi)-f_n'(\xi)| \overset{②}{\le} |x-t|\cdot\frac{\varepsilon}{2(b-a)} \le \frac{\varepsilon}{2}$$

$\forall x\in[a,b]$ $\forall m,n>\max(M,N)$

$$|f_m(x)-f_n(x)| \le |(f_m(x)-f_n(x))-(f_m(x_0)-f_n(x_0))| + |f_m(x_0)-f_n(x_0)| \overset{①}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

לכן $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש (לפי קריטריון Cauchy). נסמן את הגבול ב- f.

* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$ לכל $x \in [a,b]$

נניח ש- $x\in[a,b]$. נגדיר פונקציות φ_n, φ ע"י

$$\begin{cases}\varphi_n(t) = \dfrac{f_n(t)-f_n(x)}{t-x} \\ \varphi(t) = \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}\end{cases}$$

כאשר $t\in[a,b]\setminus\{x\}$

③ $\Rightarrow$ $|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)| \le \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ $\forall m,n>M$ $\xRightarrow{\text{קריטריון Cauchy}}$ $\{\varphi_n\}$ מתכנסת במ"ש על $[a,b]\setminus\{x\}$

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{נק'}} f$ $\Rightarrow$ $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{נק'}} \varphi$ על $[a,b]\setminus\{x\}$ $\Rightarrow$ $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} \varphi$ על $[a,b]\setminus\{x\}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\lim_{t\to x}\varphi_n(t)\right)}_{f_n'(x)} = \lim_{t\to x}\underbrace{\left(\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)\right)}_{\varphi(t)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

לכן f גזירה וגם

$\square$