סדרות וטורים של פונקציות

הגדרה סדרה של פונקציות (sequence of functions)

ה"ג (f_n) כאשר f_n פונקציה מוגדרת על אותו תחום X, לכל $n \in \mathbb{N}$

דוגמא $f_n(x) = x^n$ על $X=[0,1]$

סדרה: $x, x^2, x^3, x^4, \dots$

אנחנו מעוניינים לתת משמעות ל: "$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$" או "הסדרה (f_n) מתכנסת"

יש הרבה סוגים (לאו שקולים) של התכנסות!

התכנסות נקודתית (pointwise convergence)

הגדרה $f_n \xrightarrow{\text{נק'}} f$ אם"ם $\forall x \in X,\ f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

אם"ם $\left(\forall x\in X\ \forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}_{(\text{תלוי ב-}x,\varepsilon)}\ \forall n>N\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\right)$

זאת אומרת שבכל נקודה יש התכנסות, אבל אין קשר בין מהירות ההתכנסות בנקודות שונות

התכנסות במ"ש (uniform convergence)

$f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

אם"ם $\sup_x |f_n - f| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

אם"ם $\left(\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}_{(\text{תלוי ב-}\varepsilon)}\ \forall x\in X\ \forall n>N\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\right)$

התכנסות בממוצע (convergence in the mean)

$f_n \xrightarrow{\text{בממוצע}} f$

אם"ם $\int_X |f_n-f| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

התכנסות ב-L^2

$f_n \xrightarrow{L^2} f$

אם"ם $\int_X |f_n-f|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

הרעיון כאן של פונקציה ה"ג כמו נקודה במרחב מטרי של פונקציות והגדרה של $f_n \to f$ כאן, ה"ג

$$d(f_n,f) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ \ d(f_n,f)<\varepsilon)$$

כאשר d מושג של מרחק במרחב פונקציות שלנו.

$f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{נק'}} f$

$f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{בממוצע}} f$ (X חסום)

$f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{L^2} f$ (X חסום)

$f_n \xrightarrow{L^2} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{בממוצע}} f$ (X חסום)

דוגמאות

א) $f_n(x)=x^n$, $X=[0,1]$, $f(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$

$f_n \xrightarrow{\text{נק'}} f$, $\sup_{n\to\infty}|f_n-f| = 1 \Rightarrow f_n \not\xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

$\int_0^1 |f_n-f| = \frac{1}{n+1} \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{בממוצע}} f$

$\int_0^1 |f_n-f|^2 = \frac{1}{2n+1} \Rightarrow f_n \xrightarrow{L^2} f$

נק' $\not\Rightarrow$ במ"ש

ב) $f_n(x)=x^n$, $X=[0,1]$

בממוצע, L^2 $\not\Rightarrow$ נק'

$\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{בממוצע}} 0$

$f_n \not\xrightarrow{\text{נק'}} 0$ כי $f_n(1)=1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$\int_0^1 f_n^2 = \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{L^2} 0$

ג) $X=[0,\infty)$, $f_n(x)=\frac{n}{n^2+x^2}$

במ"ש $\not\Rightarrow$ בממוצע (X לא חסום)

$|f_n(x)| \le \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} 0$

$\int_0^\infty |f_n| = \frac{\pi}{2} \not\xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n \not\xrightarrow{\text{בממוצע}} 0$

הוכחות נניח ש- $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

א) $\sup_x |f_n-f| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$x\in X \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| \le \sup_x|f_n-f| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{נק'}} f$

ב) $\int_X |f_n-f| \le \left(\sup_x |f_n-f|\right)\cdot \int_X 1 \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{בממוצע}} f$

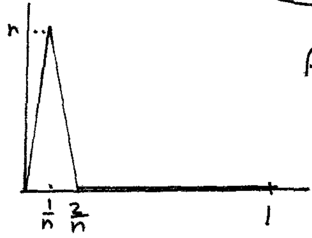
ג) $\int_X |f_n-f|^2 \le \left(\sup_x |f_n-f|\right)^2\cdot \int_X 1 \Rightarrow f_n \xrightarrow{L^2} f$

ד) $\left(\int_X |f_n-f|\right)^2 \le \left(\int_X |f_n-f|^2\right)\cdot\left(\int_X 1\right)$

דוגמאות

ד) נק' $\not\Rightarrow$ בממוצע

$X=[0,1]$



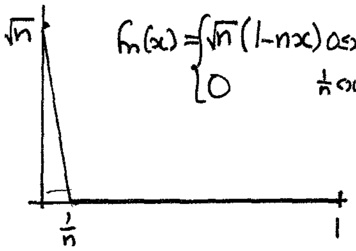
$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & 0\le x<\frac1n \\ 2n-n^2x & \frac1n\le x<\frac2n \\ 0 & \frac2n\le x\le 1\end{cases}$$

$$f_n \xrightarrow{\text{נק'}} 0$$

$$\int_0^1 f_n = 1 \Rightarrow f_n \overset{\text{בממוצע}}{\not\to} 0$$

ה) בממוצע $\not\Rightarrow L^2$ X סופי

$$f_n(x)=\begin{cases}\sqrt{n}(1-nx) & 0\le x\le\frac1n\\ 0 & \frac1n<x\le 1\end{cases}$$



$$\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{2\sqrt n}\xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow f_n\xrightarrow{\text{בממוצע}} 0$$

$$\int_0^1 f_n^2 = \frac13 \Rightarrow f_n \overset{L^2}{\not\to} 0$$

תכונות

א) בכל סוג ההתכנסות הנ"ל ⊛

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{\circledast} f \\ g_n\xrightarrow{\circledast} g \\ c\in\mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f_n+g_n\xrightarrow{\circledast} f+g \\ cf_n\xrightarrow{\circledast} cf\end{array}$$

ב) • $\begin{cases} f_n\xrightarrow{\text{נק'}} f \\ f_n\xrightarrow{\text{נק'}} g\end{cases} \Rightarrow f\equiv g$

• $\begin{cases} f_n\xrightarrow{\text{במ"ש}} f \\ f_n\xrightarrow{\text{במ"ש}} g\end{cases} \Rightarrow f\equiv g$

אבל $\begin{cases} f_n\xrightarrow{\text{בממוצע}} f \\ f_n\xrightarrow{\text{בממוצע}} g\end{cases} \not\Rightarrow f\equiv g$

(אותו דבר ב- L^2)

דוגמא: $f_n(x)=x^n$, $X=[0,1]$, $f(x)=0$

$$g(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

ג) • $\begin{cases} f_n\xrightarrow{\text{נק'}} f \\ g_n\xrightarrow{\text{נק'}} g\end{cases} \Rightarrow f_n\cdot g_n\xrightarrow{\text{נק'}} f\cdot g$

(בכל פונקציות)

• $\begin{cases} f_n\xrightarrow{\text{במ"ש}} f \\ g_n\xrightarrow{\text{במ"ש}} g \\ \exists M\ \forall n\ |f_n(x)|,|g_n(x)|<M \\ \forall x\in X\end{cases} \Rightarrow f_n\cdot g_n\xrightarrow{\text{במ"ש}} f\cdot g$

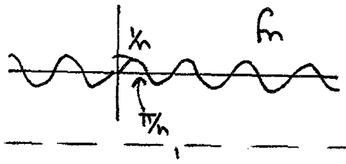
אבל: $\begin{cases} f_n\xrightarrow{\text{במ"ש}} f \\ g_n\xrightarrow{\text{במ"ש}} g\end{cases} \not\Rightarrow f_n\cdot g_n\xrightarrow{\text{במ"ש}} f\cdot g$

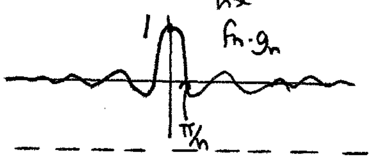
דוגמא $\begin{cases} f_n(x)=\frac1n\sin nx \\ X=(0,1] \\ g_n(x)=\frac1x=g(x) \\ f(x)=0\end{cases}$

$$\sup|f_n|=\frac1n \Rightarrow f_n\xrightarrow{\text{במ"ש}} f=0$$

$$g_n=g\ \forall n \Rightarrow g_n\xrightarrow{\text{במ"ש}} g$$

$$\sup(f_n\cdot g_n)=1 \Rightarrow \underbrace{f_n\cdot g_n}_{\frac{\sin nx}{nx}} \overset{\text{במ"ש}}{\not\to} \underbrace{f\cdot g}_{0}$$





ד) $\begin{cases}(f_n) \text{ סדרה מתכנסת במ"ש} \\ f_n\xrightarrow{\text{נק'}} f\end{cases} \Rightarrow f_n\xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

הוכחה: $f_n\xrightarrow{\text{במ"ש}} g \Rightarrow f_n\xrightarrow{\text{נק'}} g$

$f_n\xrightarrow{\text{נק'}} f$

$\Rightarrow f\equiv g \Downarrow f_n\xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

משמעות

לכן לבדוק התכנסות במ"ש של סדרה (f_n), כל מספיק למצוא את הגבול נק' f ולבדוק האם $\sup_x|f_n-f|\to 0$ בשביל הפונקציה ספציפי f הזאת.

ה) $f_n \xrightarrow{\circledast} f$ *

$$k\circ f_n \xrightarrow{\circledast} k\circ f \Leftarrow \begin{cases} \forall n \quad f_n: X\to[c,d] \; * \\ \text{רציפה} \quad k:[c,d]\to\mathbb{R} \; * \end{cases}$$

composition
הרכבה

$\circledast =$ נק' או במ"ש

<u>הוכחה</u> $f_n \xrightarrow{\circledast} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{נק'}} f \Rightarrow \forall x\in X,\ f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in [c,d] \Rightarrow f:X\to[c,d]$

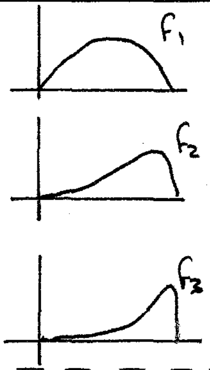
(כי $\forall n \quad f_n(x)\in[c,d]$)

לכן $k\circ f_n$, $k\circ f$ מוגדרות היטב.

נניח ש- $\varepsilon>0$ $\xRightarrow[\text{על תחום קומפקטי}]{k \text{ רציפה}}$ (#) $\left(\exists\delta>0 \ \forall s,t\in[c,d] \ |s-t|<\delta \Rightarrow |k(s)-k(t)|<\varepsilon\right)$ (#)

נק' $=\circledast$: $f_n \xrightarrow{\text{נק'}} f \Rightarrow \forall x \ \exists N \ \forall n>N \ |f_n(x)-f(x)|<\delta$ $\Rightarrow$ (#) $\forall x \ \exists N \ \forall n>N \ |k(f_n(x))-k(f(x))|<\varepsilon \Rightarrow k\circ f_n \xrightarrow{\text{נק'}} k\circ f$

במ"ש $=\circledast$: $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f \Rightarrow \exists N \ \forall n>N \ \forall x \ |f_n(x)-f(x)|<\delta$ $\Rightarrow$ (#) $\exists N \ \forall n>N \ \forall x \ |k(f_n(x))-k(f(x))|<\varepsilon \Rightarrow k\circ f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} k\circ f$



<u>דוגמאות</u> א) האם $f_n(x)=x^n-x^{2n}$ סדרה מתכנסת במ"ש?
$X=[0,1]$

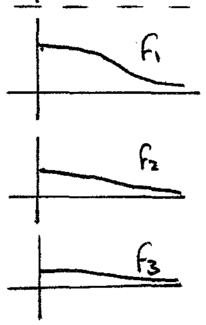
נמצא את הגבול נקודתית: $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad \forall x\in X$

$x^n \to \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$

$x^{2n} \to \begin{cases} 0 & x<1 \\ 1 & x=1 \end{cases}$

לבדוק מה $\sup_X |f_n-f|$: $\forall n, \ \sup_{[0,1]} |f_n| = \frac14 \not\to 0$

לכן (f_n) לא מתכנסת במ"ש



ב) האם $f_n(x)=\frac{1}{n+x^2}$ סדרה מתכנסת במ"ש?
$X=[0,1]$

נמצא את הגבול נקודתית: $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0 \quad \forall x\in X$

לבדוק מה $\sup_x |f_n-f|$: $\sup_X |f_n(x)| = \frac1n \to 0$

(f_n) מתכנסת במ"ש.

<u>הגדרה</u> הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, כאשר $f_n:X\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$ פונקציות, הוא <u>טור מתכנס</u> לפי ההתכנסות ⊛ אם"ם הסדרה של סכומי חלקיים $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)$ ה"נ סדרה מתכנסת לפי אותו סוג של התכנסות ⊛.

טור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\rightsquigarrow$ סדרה $\left(F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k\right)_{n=1}^{\infty}$

משפטים על התכנסות של טורים $\Longrightarrow$ משפטים על התכנסות של סדרות

דוגמאות

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ על $X=[0,1)$

$F_n(x)=\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-x}{x-1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{x}{1-x} = F(x)$ $\left(F_n \xrightarrow{\text{נק'}} F\right)$

$F_n(x)-F(x) = \frac{x^{n+1}}{x-1}$

$\sup_x |F_n-F| = \infty \Rightarrow F_n \not\xrightarrow{\text{במ"ש}} F$

ב) $\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n-1})$ על $X=[0,1)$

$F_n(x)=\sum_{k=1}^{n}(x^k-x^{k-1}) = x^n-1 \xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{-1}_{F(x)}$ $\quad 0\le x<1$

$(F_n-F)(x) = x^n \Rightarrow \sup_x |F_n-F| = 1 \not\xrightarrow{n\to\infty} 0$

הטור לא מתכנס במ"ש

משפט (קריטריון Cauchy) (f_n) סדרה מתכנסת במ"ש $\iff$ $\left(\forall\varepsilon>0\ \exists \underset{(\text{תלוי ב-}\varepsilon)}{N}\in\mathbb{N}\ \forall m,n>N\ \forall x\in X\ |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon\right)$

הוכחה ($\Leftarrow$) (f_n) סדרה מתכנסת במ"ש $\Rightarrow$ קיימת פונקציה f כך ש- $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

$\varepsilon>0 \Rightarrow \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n>N\ \forall x\in X\ |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \forall m,n>N\ \forall x\in X\ |f_m(x)-f_n(x)| \le |f_m(x)-f(x)| + |f(x)-f_n(x)|$

$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

($\Rightarrow$) $\left(\begin{array}{c}\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall m,n>N\ \forall x\in X \\ |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon\end{array}\right) \ (*)$ $\Rightarrow$ הסדרה $(f_n(x))$ היא סדרת Cauchy, $\forall x\in X$

$\Rightarrow$ $(f_n(x))$ סדרה מתכנסת, $\forall x\in X$

$\Rightarrow$ קיים מספר $f(x)$ כך ש- $f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ $\forall x\in X$

נניח ש- $\varepsilon>0$ $\stackrel{(*)}{\Rightarrow} \exists N\ \forall m,n>N\ \forall x\in X\ |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

$\xRightarrow{m\to\infty} \forall n>N\ \forall x\in X\ |f(x)-f_n(x)| \le \varepsilon$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ □

מסקנה (קריטריון Cauchy לטורים) $\sum_{k=1}^{\infty} f_n$ טור מתכנס במ"ש אם"ם $\left(\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m>n>N\ \forall x\in X\ \left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right|<\varepsilon\right)$

$\Updownarrow$

$\left(\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall m,n>N\ \forall x\in X\ |F_m(x)-F_n(x)|<\varepsilon\right) \xLeftrightarrow{\text{משפט}} \left(F_n=\sum_{k=1}^{n} f_k\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת במ"ש

משפט (Weierstrass)

* $a_n\ge 0$ מספרים
* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס
* $\forall x\in X\ |f_n(x)|\le a_n$

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש על X

הוכחה נניח ש- $\varepsilon>0$ $\xRightarrow[\sum a_n \text{ מתכנס}]{\text{Cauchy לטורים של מספרים}}$ $\exists N\ \forall m>n>N\ \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall m>n>N\ \left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| \le \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \le \sum_{k=n}^{m} a_k < \varepsilon$

$\xRightarrow{\text{קריטריון Cauchy לטורים של פונקציות}}$ $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ מתכנס במ"ש על X □

דוגמאות א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ מתכנס במ"ש $\xLeftarrow{\text{Weierstrass}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ טור מתכנס

ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר $\Leftarrow$ אי אפשר לקבל התכנסות במ"ש מ-Weierstrass

* $\frac{1}{n}$ סדרה מונוטונית
* $\frac{1}{n}\longrightarrow 0$
* $\left(\sum_{n=1}^{N}\sin nx\right)_{N=1}^{\infty}$ חסומה

$\xLeftarrow{\text{Dirichlet}}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ מתכנס נקודתית

$$\begin{cases} e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \\ e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\sin nx=\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$

$$\sum_{n=1}^{N}(\sin nx)=\frac{1}{2i}\left[\sum_{n=1}^{N}e^{inx}-\sum_{n=1}^{N}e^{-inx}\right]$$

$$\overset{x\neq 0}{=}\frac{1}{2i}\left[\frac{e^{i(N+1)x}-e^{ix}}{e^{ix}-1}-\frac{1-e^{-iNx}}{e^{ix}-1}\right]$$

$$\left|\sum_{n=1}^{N}(\sin nx)\right|\underset{x\neq 0}{=}\frac{|e^{i(N+1)x}-e^{ix}-1+e^{-iNx}|}{2\,|e^{ix}-1|}\leq\frac{4}{2\cdot|e^{ix}-1|}$$

חסם לא תלוי ב-N

($x=0\Rightarrow\sum_{n=1}^{N}\sin nx=0\ \forall N$)

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ לא מתכנס בהחלט (נקודתית)

$x=\frac{\pi}{2}$: $\sin nx=\begin{cases}0 & \text{זוגי } n\\ \pm 1 & \text{אי־זוגי } n\end{cases}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

לא מתכנס בהחלט

באותה $\sum\frac{\sin nx}{n}$ לא מתכנס במ"ש אבל להוכיח צריך להשתמש במשפטים הבאים!

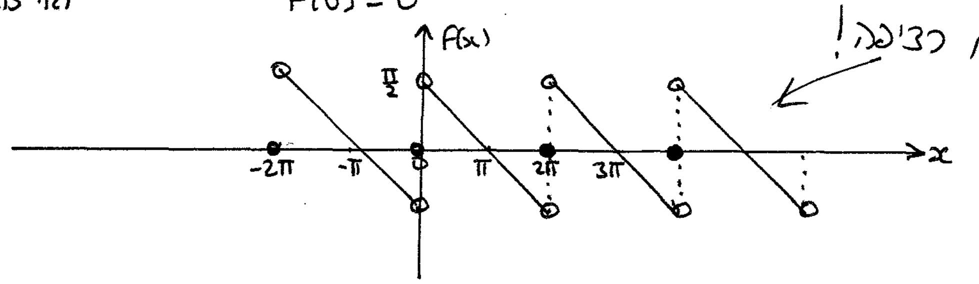
$\frac{\sin nx}{n}$ רציפה $\forall n$ $\Leftarrow$ אם ההתכנסות הייתה במ"ש, אז הסכום צריך להיות פונקציה רציפה.

אפשר להוכיח מתורת טורי Fourier ש- $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ כאשר f פונקציה מחזורית בעלת מחזור 2π (ברור)

$\frac{\sin nx}{n}$ $\forall n$ פונקציה מחזורית ואי זוגית

$$f(x)=\tfrac{1}{2}(\pi-x)\qquad 0<x<2\pi$$

$$f(0)=0$$



לא רציפה! $\Rightarrow$ התכנסות לא במ"ש!