סדרות וטורים של פונקציות

* $X \subset \mathbb{R}$
* $f_n: X \to \mathbb{R}$ לכל $n \in \mathbb{N}$

⇐ יכול לדבר על הסדרה $(f_n(x))$ של פונקציות
וגם על הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ של פונקציות
סכום חלקי הוא $\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ (פונקציה)

סוגים של התכנסות של פונקציות

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{נקודתית}} f$

אומרים $\forall \varepsilon>0\ \forall x\in X$
$\exists N(\varepsilon,x)\ \forall n>N(\varepsilon,x)$
$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

אומ"ם $f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty} f(x)$ לכל $x\in X$

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} f$

אומרים $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall x\in X$
$\forall n>N(\varepsilon)$
$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

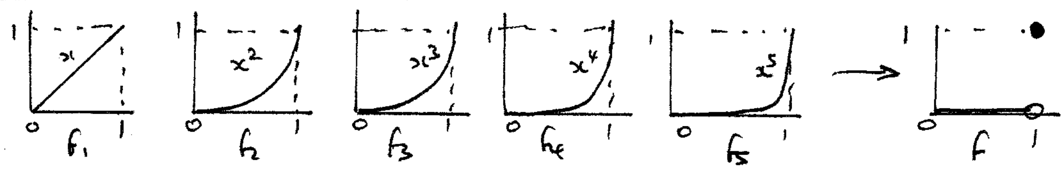
אומ"ם $\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
(קיים לכל n מספיק גדול)

יש עוד סוגים ....

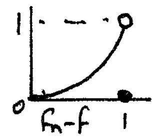
לדוגמה, התכנסות בממוצע
$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{בממוצע}} f$
אומ"ם
$\int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$
(כאשר X הוא קטע $[a,b]$)

דוגמאות

(א) $X=[0,1]$
$f_n(x)=x^n$

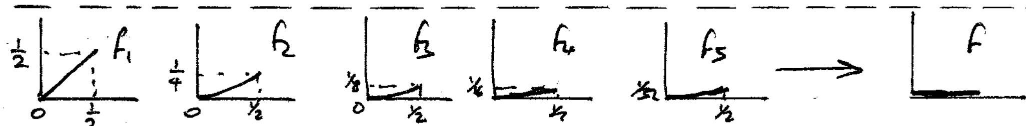


$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \equiv f(x) = \begin{cases}0 & x\in[0,1)\\ 1 & x=1\end{cases}$ ⇐ $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{נקודתית}} f$



$\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=1$
לכל n
⟹ $f_n \not\xrightarrow[n\to\infty]{\text{במ"ש}} f$

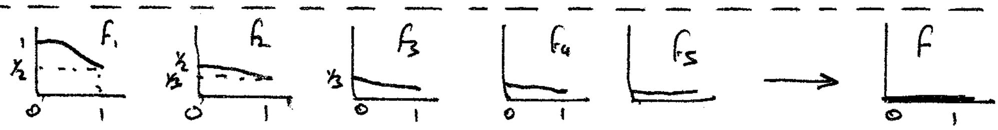
(ב) $X=[0,\frac12]$
$f_n(x)=x^n$



$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)=0\quad \forall x\in X$ ⇐ $f_n \xrightarrow{\text{נק'}} f$

$|f_n(x)|\le \frac{1}{2^n}<\varepsilon$ לכל $x\in X$
לכל $n > N(\varepsilon)=\log_2(\frac{1}{\varepsilon})$
לא תלוי ב-x
⟹ $f_n\xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

(ג) $X=[0,1]$
$f_n(x)=\frac{1}{x^2+n}$



$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0\quad \forall x$ ⇐ $f_n\xrightarrow{\text{נק'}}0$

$|f_n(x)|\le\frac{1}{n}<\varepsilon$ לכל $x\in X$
לכל $n> N(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$
לא תלוי ב-x
⟹ $f_n\xrightarrow{\text{במ"ש}}0$

(ד) $X=(-1,1)$
$f_n(x)=x^n$

$\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$: סכום חלקי הוא $F_n(x)=\sum_{m=0}^{n} x^m = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$F_n(x)\xrightarrow{\text{נק'}}\frac{1}{1-x}$ אבל לא במ"ש

לכן $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ מתכנס ל- $\frac{1}{1-x}$ נקודתית
ההתכנסות לא במ"ש על $(-1,1)$
ההתכנסות כן במ"ש על $[a,b]$
לכל $-1<a<b<1$

תכונות של התכנסות נק' ובמ"ש

א) * $f_n \xrightarrow{נק'} f$ * $f_n \xrightarrow{נק'} g$ $\Rightarrow$ $f \equiv g$

ב) * $f_n \xrightarrow{נק'} f$ * $g_n \xrightarrow{נק'} g$ $\Rightarrow$ $f_n+g_n \xrightarrow{נק'} f+g$, $f_n \cdot g_n \xrightarrow{נק'} f \cdot g$

ג) * $f_n \xrightarrow{נק'} f$ * $k:[c,d]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה * $[c,d]$ מכיל את התמונות של f_n (לכל n) וגם של f $\Rightarrow$ $k\circ f_n \xrightarrow{נק'} k\circ f$

כל התכונות האלה מיידי מאותן תכונות לגבולות של סדרות של מספרים

א' - ג' אותן תכונות עם "במ"ש" ← "נקודתית" ו"רציפה במ"ש" ← " בכל מקום.

הוכחות: בדיוק ההוכחות שהגיון לאותן תכונות של גבולות של סדרות של מספרים. אבל עכשיו יש עוד משתנה x .... ו- N לא תלוי ב-x.

דוגמה: ב')

$f_n \xrightarrow{במ"ש} f$: $\forall \varepsilon>0\ \exists N_1(\varepsilon)\ \forall n>N_1(\varepsilon)\ \forall x\in X\ |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$g_n \xrightarrow{במ"ש} g$: $\forall \varepsilon>0\ \exists N_2(\varepsilon)\ \forall n>N_2(\varepsilon)\ \forall x\in X\ |g_n(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall n>\max(N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon))\ \forall x\in X,$

$|(f_n(x)+g_n(x))-(f(x)+g(x))|$

$\le |f_n(x)-f(x)|+|g_n(x)-g(x)|$

$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ □

משפט $f_n \xrightarrow{במ"ש} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{נק'} f$

מסקנה $f_n \xrightarrow{נק'} f$, $f_n \xrightarrow{במ"ש} g$ $\Rightarrow$ $f\equiv g$

משפט (ב') * $f_n \xrightarrow{במ"ש} f$ * $g_n \xrightarrow{במ"ש} g$ * $\exists M\ \forall n\ \forall x\ |f_n(x)|,|g_n(x)|<M$ $\Rightarrow$ $f_n\cdot g_n \xrightarrow{במ"ש} f\cdot g$

בלי תנאי השלישי יש דוגמה נגדית: $f_n(x)=x+\frac{1}{n}$, $X=\mathbb{R}$, $g_n(x)=x$, $f(x)=g(x)=x$

$f_n \xrightarrow{במ"ש} f$, $g_n \xrightarrow{במ"ש} g$, $f_n\cdot g_n \not\xrightarrow{במ"ש} f\cdot g$

משפט (קריטריון של Cauchy) סדרה (f_n) מתכנסת במ"ש $\Leftrightarrow$ $(\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall m,n>N(\varepsilon)\ \forall x\in X\ |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon)$

הוכחה $(\Leftarrow)$ $\left(\begin{matrix} f_n \xrightarrow{במ"ש} f \\ \varepsilon>0\end{matrix}\right) \Rightarrow \exists N(\varepsilon)\ \forall n>N(\varepsilon)\ \forall x\in X\ |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall m,n>N(\varepsilon)\ \forall x\in X\ |f_m(x)-f_n(x)|\le|f_m(x)-f(x)|+|f(x)-f_n(x)|$
$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$(\Rightarrow)$ $\left(\begin{matrix}\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall m,n>N(\varepsilon)\ \forall x\in X \\ ⊛\ |f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon\end{matrix}\right)$ $\Rightarrow$ לכל $x\in X$ קבועה, $(f_n(x))$ סדרת קושי ולכן מתכנסת

$\Rightarrow \forall x\in X\ \exists f(x):\ f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$

⊛ כאשר $m\to\infty$ $\Rightarrow \forall n>N(\varepsilon)\ |f(x)-f_n(x)|\le\varepsilon$

$\Rightarrow \forall n>N(\frac{\varepsilon}{2})\ \forall x\in X\ |f(x)-f_n(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{במ"ש} f$ □

מסקנה (קריטריון של Cauchy לטורים) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש $\Leftrightarrow$ $(\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall m\ge n>N(\varepsilon)\ \forall x\in X\ |\sum_{r=n}^{m} f_r(x)|<\varepsilon)$

משפט (Weierstrass) * $a_n\ge0$ מספרים * $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס * $|f_n(x)|\le a_n$ לכל $x\in X$ $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש

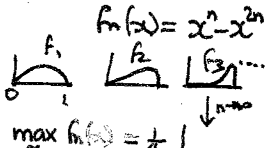
הוכחה $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\xRightarrow{\text{קריטריון של Cauchy לטורים של מספרים}}$ $\left(\begin{matrix}\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall m\ge n>N(\varepsilon) \\ \sum_{r=n}^{m} a_r<\varepsilon\end{matrix}\right)$ $\Rightarrow$ $\forall m\ge n>N(\varepsilon):\ \forall x\in X\ |\sum_{r=n}^{m} f_r(x)|\le\sum_{r=n}^{m}|f_r(x)|\le\sum_{r=n}^{m} a_r<\varepsilon$ $\xRightarrow{\text{קריטריון של Cauchy}}$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\ \text{מתכנס במ"ש}\right)$ □

דוגמאות

א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ מתכנס במ"ש על $\mathbb{R}$

ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ מתכנס נקודתית על $\mathbb{R}$

ג) $f_n(x)=x^n-x^{2n}$, $X=[0,1]$



$f_n \xrightarrow{נק'} 0$

$f_n \not\xrightarrow{במ"ש} 0$

$\max_x f_n(x)=\frac{1}{4}$ לכל n

רציפות בסדרות וטורים

משפט
- $x_0 \in X$
- f_n רציפה ב-x_0 לכל $n \in \mathbb{N}$
- $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

$\Leftarrow$ f רציפה ב-x_0

הוכחה $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ $\Leftarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n>N(\varepsilon)\ \forall x\in X\ |f_n(x)-f(x)| < \varepsilon/3$

$f_{N(\varepsilon)+1}$ רציפה ב-x_0 $\Leftarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall(x: |x-x_0|<\delta) \Rightarrow |f_{N(\varepsilon)+1}(x)-f_{N(\varepsilon)+1}(x_0)| < \varepsilon/3$

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_{N(\varepsilon)+1}(x)| + |f_{N(\varepsilon)+1}(x)-f_{N(\varepsilon)+1}(x_0)| + |f_{N(\varepsilon)+1}(x_0)-f(x_0)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

$\square$

מסקנה
- f_n רציפה לכל $n \in \mathbb{N}$
- $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$

$\Leftarrow$ f רציפה

משפט Dini
- $f_n(x) \geq 0$ לכל $n\in\mathbb{N}$, $x\in[a,b]=X$
- f_n רציפה לכל $n\in\mathbb{N}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ טור מתכנס נקודתית ל-$F(x)$
- F פונקציה רציפה

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש

הוכחה נסמן את סכום חלקי ב- $\sum_{r=1}^{n} f_r(x) \equiv F_n(x)$ ואת השארית ב- $F(x)-F_n(x) \equiv R_n(x)$

$f_n(x)$ רציפה לכל x $\Leftarrow$ $F_n(x)$ רציפה

F רציפה $\Leftarrow$ R_n רציפה . . . . ①

$f_n(x) \geq 0$ $\Leftarrow$ סדרה $(F_n(x))$ מונוטונית לא יורדת לכל x

$\Leftarrow$ סדרה $(R_n(x))$ מונוטונית לא עולה לכל x . . ②

$F_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} F(x)$ לכל x (נקודתית) $\Leftarrow$ $R_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ לכל $x \in [a,b]$ . . . . . ③
(ולכן $R_n(x) \geq 0$ לכל n, x)

נניח בשלילה ש- $F_n \overset{\text{במ"ש}}{\not\to} F$ $\Leftarrow$ $\exists\varepsilon>0\ \underbrace{\forall N\ \exists n>N}\ \exists x\in X : \underbrace{|F_n(x)-F(x)|}_{R_n(x)} \geq \varepsilon$

לבנות סדרה מונוטונית עולה ממש של מספרים טבעיים (n_k) N-n-ים הנ"ל

$$n_1 \quad \exists x_1 \in X : R_{n_1}(x_1) \geq \varepsilon$$
$$n_2 > n_1 \quad \exists x_2 \in X : R_{n_2}(x_2) \geq \varepsilon$$
$$\vdots$$

מקבלים סדרה (x_n) של נקודות ב-X כך ש- $\forall k, R_{n_k}(x_k) \geq \varepsilon$

$n_k \xrightarrow{k\to\infty} \infty$ $\Leftarrow$ $\forall m\in\mathbb{N}\ \exists K\ \forall k>K \quad n_k \geq m$

$\Leftarrow$ $\forall m\in\mathbb{N}\ \exists K\ \forall k>K \quad \varepsilon \leq R_{n_k}(x_k) \overset{②}{\leq} R_m(x_k)$

(x_k) סדרה של נקודות ב-X $\Leftarrow$ קיימת תת-סדרה מתכנסת (x_{k_r}), $x_{k_r} \xrightarrow{r\to\infty} x_0$

$\overset{(k_r \geq r > K)}{\Leftarrow}$ $\forall m\in\mathbb{N}\ \exists K\ \forall r>K \quad R_m(x_{k_r}) \geq \varepsilon$

① $\Leftarrow$ R_m רציפה $\overset{r\to\infty}{\Leftarrow}$ $\forall m\in\mathbb{N} \quad R_m(x_0) \geq \varepsilon$

③ $\Leftarrow$ $R_m(x_0) \xrightarrow{m\to\infty} 0$ סתירה!